ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου

Γ΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου

Γ΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά
Γ΄ Γυμνασίου, Τεύχος Γ΄

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Παλάτου - Χριστόφια Μαριάννα, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2013
Εκτύπωση: Lithoweb Ltd

ISBN: 978-9963-0-4656-0

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω το τρίτο και τελευταίο τεύχος των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου. Τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών βρίσκονται στον τρίτο χρόνο εφαρμογής τους και κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά επεκτάθηκαν και καλύπτουν από την Α΄ μέχρι και τη Γ΄ Γυμνασίου.

Όλες οι εκδόσεις των τελευταίων δύο χρόνων, για τα Μαθηματικά Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου είναι δοκιμαστικές και βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση ανατροφοδότησης και γενικά παρατηρήσεων που προέρχονται και από τη βάση, τους μάχιμους καθηγητές των Μαθηματικών.

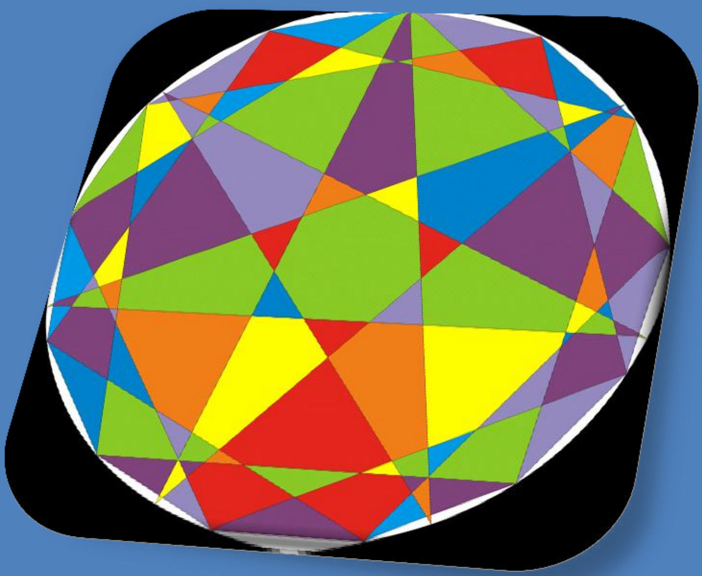
Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών, όπως και το παρόν τρίτο τεύχος των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών όσο και των καθηγητών, στην πορεία τους μέσα από τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τη φιλοσοφία των Νέων Αναλυτικών Προγραμμάτων και προσηλωμένο στην ανάπτυξη και ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών μας, που αποτελεί πρώτιστο μέλημα όλων μας.

Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές. Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης.

Δρ Ζήνα Πουλλή
Διευθύντρια Μέσης Εκπαίδευσης

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Γεωμετρία



Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γ΄ ΤΕΥΧΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	Σελίδες

Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι σήμερα, τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται.

Αρχικά, η μελέτη των ιδιοτήτων των διάφορων γεωμετρικών σχημάτων έγινε με τρόπο εμπειρικό, όπως τη συναντήσαμε στις προηγούμενες τάξεις. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε τότε ήταν η εύρεση ή επαλήθευση των ιδιοτήτων και σχέσεων ανάμεσα στα γεωμετρικά σχήματα με βάση τη μέτρηση, η οποία όμως δεν μπορεί να είναι ακριβής και τα αποτελέσματά της δεν γενικεύονται.

Η διαφοροποίηση της **Πρακτικής** Γεωμετρίας από τη **Θεωρητική Γεωμετρία** ή Ευκλείδεια Γεωμετρία, την οποία θα μελετήσουμε, συνίσταται στη συστηματική χρήση της λογικής για να θεμελιώσει τις γνώσεις μας για τον χώρο, ξεφεύγοντας από μετρήσεις και επιμέρους συμπεράσματα.

Οι γνώσεις αυτές υπάρχουν ήδη: όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο αφού οι αντίστοιχες λέξεις υπάρχουν σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Πρόκειται όμως για γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η Γεωμετρία τις θεμελιώνει, δηλαδή τις οργανώνει σε ένα σύστημα, και φυσικά προσθέτει και νέες γνώσεις σε αυτές που ήδη υπάρχουν. Κάθε καινούργιο αποτέλεσμα προκύπτει από τα προηγούμενα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που λέγεται **απόδειξη** και που στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.

Η Γεωμετρία προχωράει από το πιο απλό στο πιο σύνθετο. Θα πρέπει, ωστόσο, από κάπου να ξεκινήσουμε, από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο τις οποίες δεχόμαστε ως **πρωταρχικές** χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές:

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

Ισχυρισμούς όπως οι παραπάνω, που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη, τους ονομάζουμε **αξιώματα**. Επομένως, τα αξιώματα δεν αποδεικνύονται, επιλέγονται. Η δομή του βιβλίου, η σειρά των αποτελεσμάτων εξαρτώνται από την επιλογή των αξιωμάτων, τα οποία δίνονται εκεί που χρειάζονται. Γενικότερα, γίνεται προσπάθεια ώστε, μετά από μία νέα έννοια ή ένα νέο σημαντικό αποτέλεσμα, να εξετάζεται τι καινούργιο μπορεί να προκύψει σε συνδυασμό με τα προηγούμενα. Κάθε νέο αποτέλεσμα που προκύπτει από μία σειρά συλλογισμών θεμελιωμένη στα αξιώματα λέγεται **θεώρημα**, ενώ οι άμεσες συνέπειες ενός θεωρήματος λέγονται **πορίσματα**.

Όπως προαναφέραμε αντικείμενο της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των σχημάτων του επιπέδου και του χώρου. Η μελέτη αυτή συχνά υποβοηθείται από ένα σχέδιο του σχήματος.

Στην πορεία εξαγωγής των συμπερασμάτων σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία. Τα συμπεράσματα, για να είναι γενικά, δεν πρέπει να είναι συνέπειες μόνο της παρατήρησης του σχεδίου. Είναι αναγκαίο να προκύπτουν με ορθό συλλογισμό από τις ιδιότητες του σχήματος, οι οποίες άλλωστε είναι δυνατό να μην είναι όλες ορατές στο σχήμα. Για να καταλήξουμε σε μία απόδειξη ο δρόμος μπορεί να είναι μακρύς και να περνάει μέσα από εικασίες, λάθη, επανατοποθετήσεις, μέχρι να οδηγηθούμε στην τελική μορφή.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ερμηνεύει τις μορφές του περιβάλλοντος χώρου χρησιμοποιώντας λίγες πρώτες αρχές και αξιοποιώντας τη σκέψη και τον ορθό λόγο.

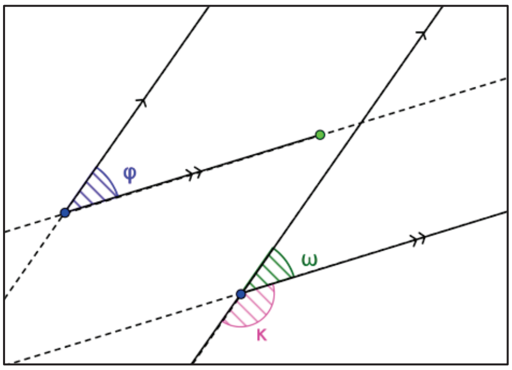
Οι συλλογισμοί μας, για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος, πρέπει να είναι θεωρητικοί, γενικοί και το σχέδιο του σχήματος να έρχεται αρωγός στην προσπάθεια λύσης του προβλήματος.

Παράλληλες Ευθείες

Συνέπειες των Ιδιοτήτων των παραλλήλων ευθειών

Διερεύνηση (1)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο «CEn8_GoniesMeParallPlevres.ggb»*

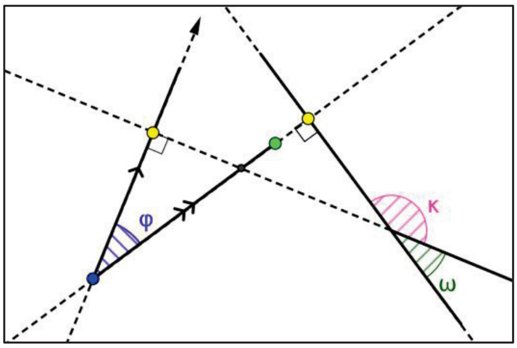


✓ Να μετακινήσετε τα σημεία που φαίνονται στο σχήμα και να βρείτε τη σχέση μεταξύ των μέτρων των γωνιών $\hat{\varphi}, \hat{\omega}$ και $\hat{\kappa}$.

✓ Ποια σχέση έχουν οι πλευρές των γωνιών $\hat{\varphi}, \hat{\omega}$ και $\hat{\kappa}$;

Διερεύνηση (2)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο «Cen8_GoniesMeKathetesPlevres.ggb»*

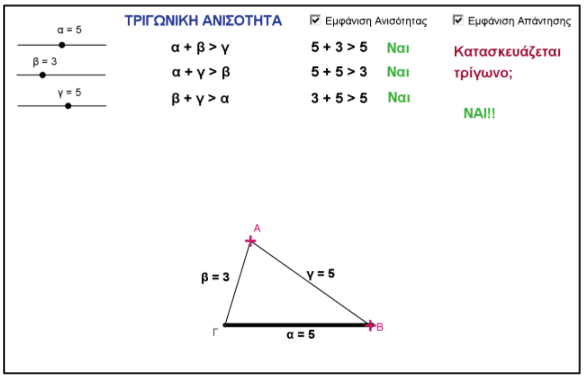


Να μετακινήσετε τα σημεία που φαίνονται στο σχήμα και να βρείτε τη σχέση των μέτρων των γωνιών $\hat{\varphi}, \hat{\omega}$ και $\hat{\kappa}$.

✓ Ποια σχέση έχουν οι πλευρές των γωνιών $\hat{\varphi}, \hat{\omega}$ και $\hat{\kappa}$;

Διερεύνηση (3)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο «Cen8_KataskeuasimoTrig.ggb»*



✓ Να μετακινήσετε τους δρομείς α, β και γ που μεταβάλλουν τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$

✓ Να παρατηρήσετε τις ανισώτικες σχέσεις των πλευρών του τριγώνου.

✓ Ακολούθως να περιστρέψετε την πλευρά AB από τα άκρα της (σημειώνονται με σταυρό) τα σημεία που φαίνονται στο σχήμα και να εξετάσετε αν σχηματίζεται τρίγωνο.

✓ Να επαναλάβετε τα πιο πάνω βήματα και για άλλα τρίγωνα.

Να διατυπώσετε μια συνθήκη που πρέπει να διέπει τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, η οποία να μας εξασφαλίζει πότε ένα τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί.

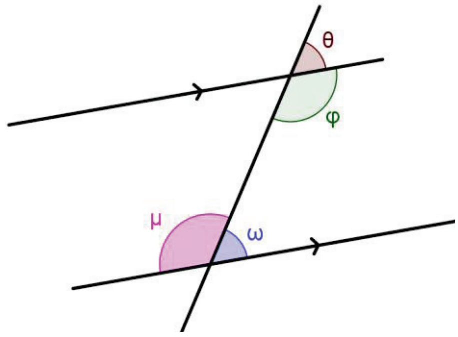
Μαθαίνω

Αξίωμα παραλληλίας

- Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη προς αυτή (σχέση παραλληλίας).

Παράλληλες ευθείες

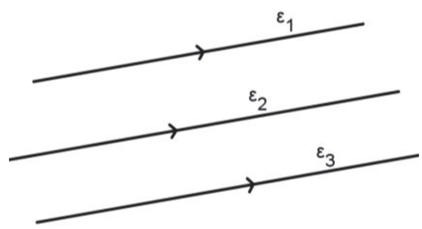
- Δύο ευθείες ε_1 και ε_2, που τέμνονται από μία τρίτη ευθεία δ είναι παράλληλες όταν σχηματίζουν:
  - τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες
    π.χ. $\hat{\varphi} = \hat{\mu}$
    ή
  - τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
    π.χ. $\hat{\theta} = \hat{\omega}$
    ή
  - τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές
    π.χ. $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180°$



- Αν δύο ευθείες ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες με μία τρίτη ευθεία ε_1, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

  Δηλαδή

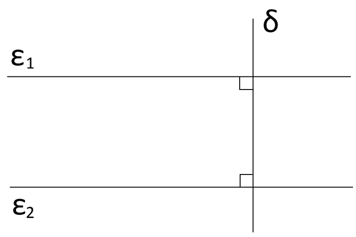
  αν $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_1$ και $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_1$ τότε $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$



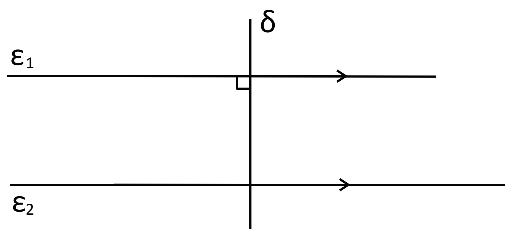
- Αν δύο ευθείες είναι κάθετες σε μία τρίτη ευθεία, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

  Δηλαδή

  αν $\varepsilon_1 \perp \delta$ και $\varepsilon_2 \perp \delta$ τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



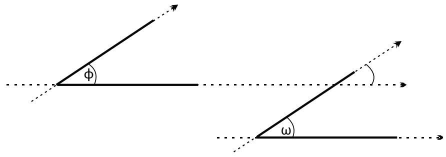
- Αν μια ευθεία είναι κάθετη στη μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα είναι κάθετη και στην άλλη.
  Δηλαδή
  αν $\delta \perp \varepsilon_1$ και $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ τότε $\delta \perp \varepsilon_2$

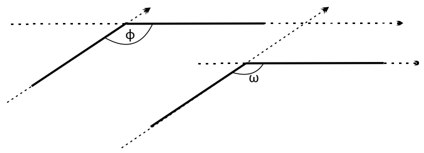


Γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες

- Αν δύο οξείες ή δύο αμβλείες γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία τότε οι γωνίες είναι ίσες.

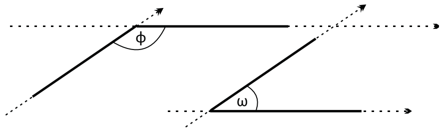
  Δηλαδή $\hat{\varphi}=\hat{\omega}$.



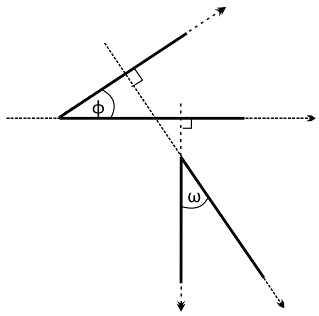


- Αν μία οξεία και μια αμβλεία γωνία έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία τότε οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

  Δηλαδή $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=180^o$.

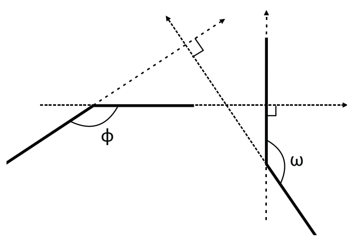


Γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες



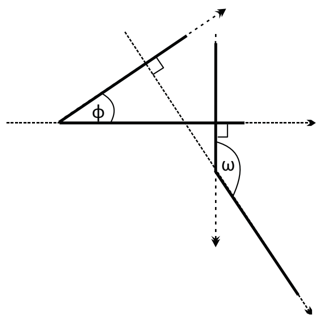
- Αν δύο οξείες ή δύο αμβλείες γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία τότε οι γωνίες είναι ίσες.

  Δηλαδή $\hat{\varphi}=\hat{\omega}$.



- Αν μία οξεία και μια αμβλεία γωνία έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία τότε οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

  Δηλαδή $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=180^o$.

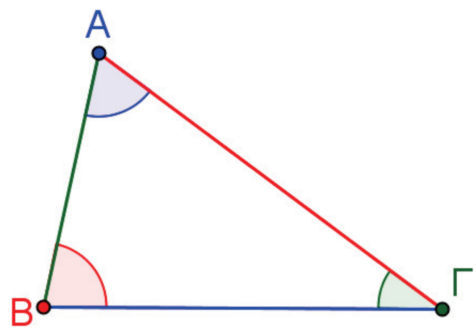


- Σε κάθε τρίγωνο $ΑΒΓ$ κάθε πλευρά του είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την απόλυτη διαφορά τους, δηλαδή

  $$|ΑΓ - ΑΒ| < ΒΓ < ΑΓ + ΑΒ$$
  $$|ΑΓ - ΒΓ| < ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$$
  $$|ΒΓ - ΑΒ| < ΑΓ < ΒΓ + ΑΒ$$

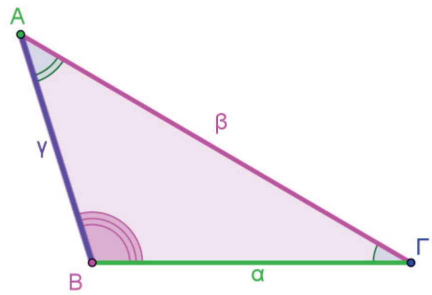
  <u>*Παρατήρηση:*</u>

  Ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι κατασκευάσιμο αν ισχύει μια από τις πιο πάνω ανισοτικές σχέσεις.



- Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου και αντίστροφα.

  Δηλαδή, από το σχήμα :
  $\hat{B} > \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \beta > \gamma$

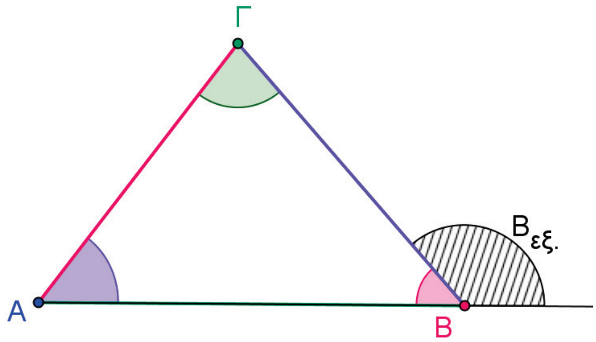


- Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180^o.

  Δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$

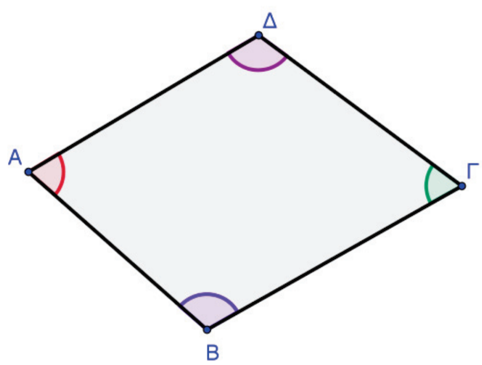
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

  Δηλαδή ,από το σχήμα :
  $\hat{B}_{εξ} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$.



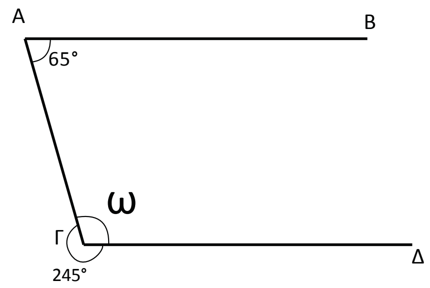
- Το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου είναι 360^o.

  Δηλαδή, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$



Παραδείγματα

1. Να εξηγήσετε γιατί η AB είναι παράλληλη με την $ΓΔ$ στο πιο κάτω σχήμα.



Λύση:

$\widehat{ω} = 360^o - 245^o = 115^o$

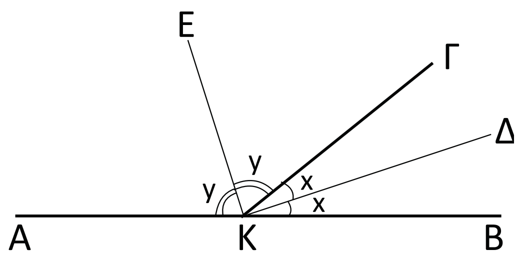
Αφού $\widehat{ω} + Γ\hat{A}B = 115^o + 65^o = 180^o$ και οι γωνίες $\widehat{ω}$ και $Γ\hat{A}B$ είναι εντός και επί τα αυτά τότε $AB \,||\, ΓΔ$.

2. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Λύση:

Οι γωνίες $A\widehat{K}Γ$ και $B\widehat{K}Γ$είναι εφεξής και παραπληρωματικές, δηλαδή,

$\boldsymbol{A\widehat{K}Γ + B\widehat{K}Γ = 180^o}$ (1).



Η KE είναι διχοτόμος της $A\widehat{K}Γ$ δηλαδή,

$A\widehat{K}E = Γ\widehat{K}E = y \Rightarrow \boldsymbol{A\widehat{K}Γ = 2y}$ (2)

Η $KΔ$ είναι διχοτόμος της $B\widehat{K}Γ \Rightarrow B\widehat{K}Δ = Δ\widehat{K}Γ = x \Rightarrow \boldsymbol{B\widehat{K}Γ = 2x}$ (3)

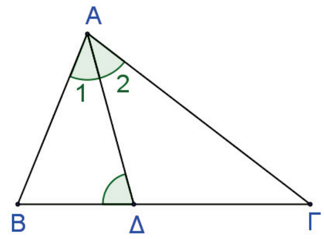
Αντικαθιστούμε στην (1) τις γωνίες από τις (2) και (3), άρα,

$A\widehat{K}Γ + B\widehat{K}Γ = 180^o \Rightarrow 2x + 2y = 180^o \Rightarrow 2(x+y) = 180^o \Rightarrow x + y = 90^o$

$E\widehat{K}Δ = E\widehat{K}Γ + Γ\widehat{K}Δ = x + y = 90^o$

Άρα οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

3. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 30^o$, φέρουμε τη διχοτόμο $ΑΔ$. Να δείξετε ότι $Α\hat{Δ}Β = 75^o$.



Λύση:

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$$

$$\hat{B} - \hat{\Gamma} = 30^o$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες.

$$\Rightarrow \hat{A} + 2\hat{B} = 210^o$$

$$\Rightarrow 2\widehat{A_1} + 2\hat{B} = 210^o$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \hat{B} = 105^o$$

$$\Rightarrow \widehat{AΔB} = 180° - 105^o$$

$$\Rightarrow \widehat{AΔB} = 75°$$

4. Να εξετάσετε αν μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με μήκη πλευρών που έχουν μετρηθεί σε εκατοστόμετρα:

(α) $1, 2, 4$ (β) $8, 7, 15$ (γ) $45, 55, 90$.

Λύση:

(α) $1, 2, 4$

Δεν σχηματίζουν τρίγωνο

διότι $1 + 2 = 3 < 4$,

δηλαδή το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών δεν είναι μεγαλύτερο από την τρίτη.

(β) $8, 7, 15$

Δεν σχηματίζουν τρίγωνο

διότι $8 + 7 = 15$,

δηλαδή το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών δεν είναι μεγαλύτερο από την τρίτη.

(γ) $45, 55, 90$.

Ναι μπορούμε να σχηματίσουμε τρίγωνο διότι $45 + 55 > 90$,

δηλαδή το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών είναι μεγαλύτερο από την τρίτη.

Για να εξετάσουμε αν ένα τρίγωνο είναι κατασκευάσιμο, αρκεί να συγκρίνουμε το άθροισμα των δύο μικρότερων πλευρών με τη μεγαλύτερη πλευρά

5. Τα μήκη των πλευρών AB και $AΓ$ ενός τριγώνου $ABΓ$ είναι $0{,}8\,m$ και $3{,}9\,m$ αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $BΓ$ αν είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση:

Αφού σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $|AΓ - AB| < BΓ < AΓ + AB$,

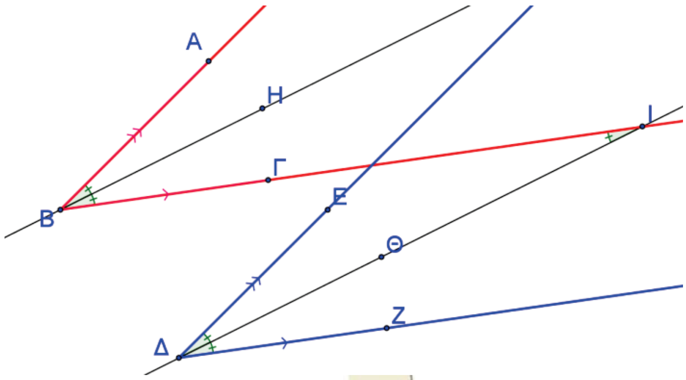
τότε $3{,}9 - 0{,}8 < BΓ < 3{,}9 + 0{,}8$

δηλαδή $3{,}1\ m < BΓ < 4{,}7\ m$.

Άρα $BΓ = 4$, διότι είναι ο μόνος ακέραιος που βρίσκεται μεταξύ του $3{,}1\ m$ και $4{,}7\ m$.

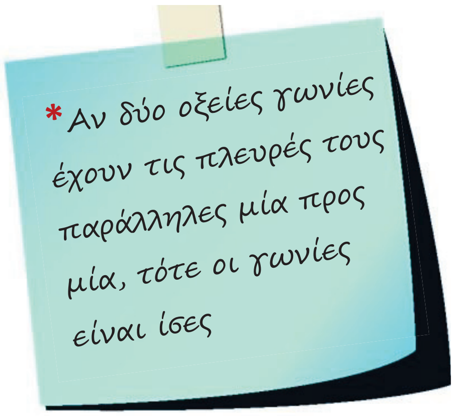
6. Δίνονται οι οξείες γωνίες $ABΓ$ και $EΔZ$ όπως φαίνεται στο σχήμα, οι οποίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία.

Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι τους BH και $ΔΘ$ είναι παράλληλες.



Λύση:

$A\hat{B}Γ \overset{*}{=} E\hat{Δ}Z$ γιατί έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία.



BH και $ΔΘ$ διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{B}Γ,\ E\hat{Δ}Z$
$\Rightarrow\ H\hat{B}Γ = Θ\hat{Δ}Z$ (μισές ίσων γωνιών) (1)

$Γ\hat{I}Δ = Θ\hat{Δ}Z$ (εντός εναλλάξ γωνίες) (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) $\Rightarrow H\hat{B}Γ = Γ\hat{I}Δ$

Οι γωνίες $H\hat{B}Γ, Γ\hat{I}Δ$ είναι εντός εναλλάξ ως προς τις ευθείες BH, $ΔΘ$ και την BI που τις τέμνει.

$\Rightarrow BH \parallel ΔΘ$.

Δραστηριότητες

1. Να αναφέρετε 5 τρόπους, για να αποδείξετε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

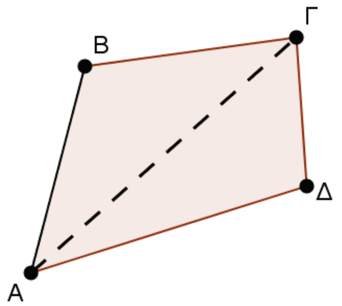
2. Να εξηγήσετε γιατί ένα ισοσκελές τρίγωνο με μία γωνία του ίση με $60°$ είναι ισόπλευρο.

3. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η γωνία $\widehat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\widehat{B}$. Αν $\widehat{Γ}_{εξ.} = 144^o$ να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\widehat{A} = 90^o$) και το ύψος του $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B} = Δ\widehat{A}Γ$ και $\widehat{Γ} = Δ\widehat{A}B$.

5. Να αποδείξετε ότι το μήκος οποιασδήποτε πλευράς ενός τριγώνου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρό του.

6. (α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, το άθροισμα τριών οποιωνδήποτε πλευρών του είναι μεγαλύτερο από την τέταρτη πλευρά του.



(β) Μια πόλη $Β$ απέχει 560 Km από την πόλη $Α$ και 300 Km από την πόλη $Γ$. Η πόλη $Γ$ απέχει 150 Km από την πόλη $Δ$ και η πόλη $Δ$ απέχει 110 Km από την πόλη $Α$. Πόσο απέχει η πόλη $Γ$ από την πόλη $Α$;

7. Δίνονται δύο γωνίες μία οξεία και μία αμβλεία, οι οποίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μία προς μία. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι τους είναι κάθετες.

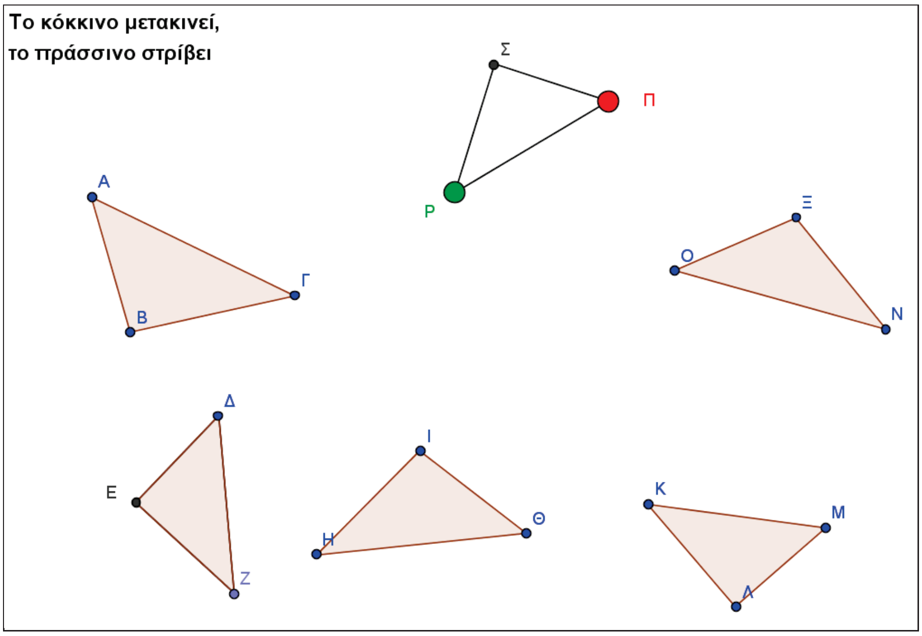
8. Να δείξετε ότι, αν η διχοτόμος εξωτερικής γωνίας τριγώνου είναι παράλληλη με την τρίτη πλευρά του, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

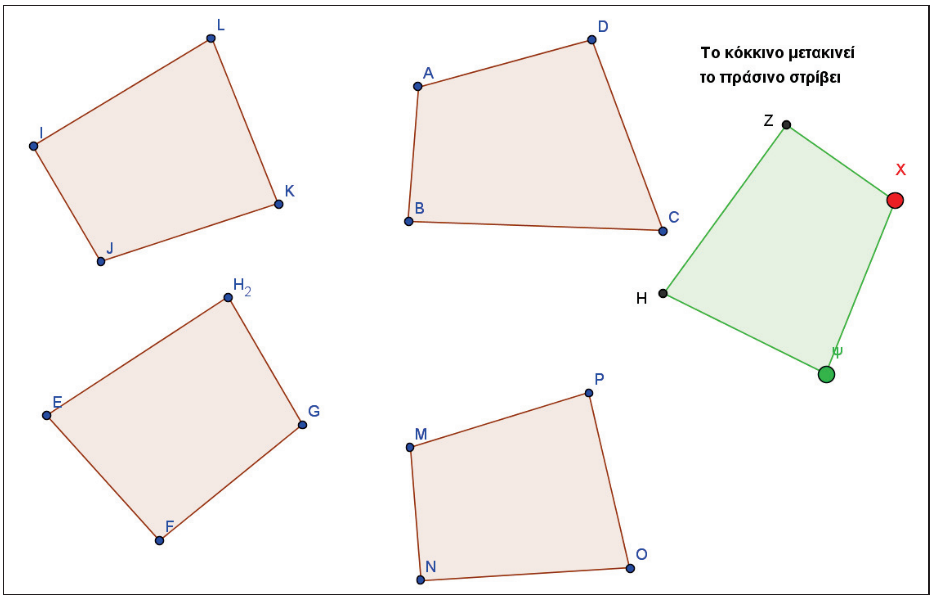
ΙΣΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε τα αρχεία* «En9_IsaSsxhmataTrig.ggb» και «En9_IsaSsximataTetrapleyra.ggb».





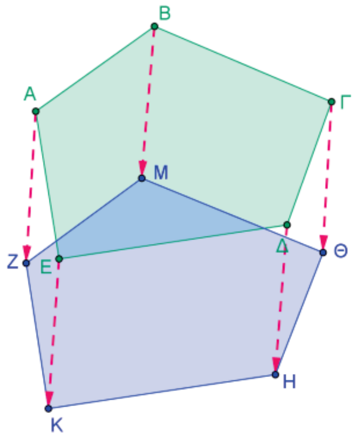
✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τρίγωνο $ΣΠΡ$ με κατάλληλη μετατόπιση είναι δυνατό να συμπίπτει με κάποια από τα υπόλοιπα τρίγωνα.

✓ Να εξετάσετε κατά πόσο το τετράπλευρο $ΖΧΨΗ$ είναι ίσο με κάποια από τα υπόλοιπα τετράπλευρα.

✓ Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

- Δύο επίπεδα σχήματα ονομάζονται ίσα σχήματα, αν μπορεί με κατάλληλη μετατόπιση το ένα από αυτά να ταυτιστεί (συμπέσει) με το άλλο.
- Αν δύο σχήματα είναι ίσα, τότε θα έχουν και τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή κάθε στοιχείο του ενός είναι ίσο με το αντίστοιχο στοιχείο του άλλου.

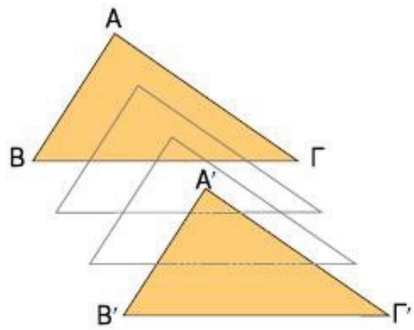


Π.χ. τα πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ και $ΜΘΗΚΖ$ είναι ίσα, τότε:

$$\hat{A} = \hat{Z}, \quad \hat{B} = \hat{M}, \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Theta}, \quad \hat{\Delta} = \hat{H}, \quad \hat{E} = \hat{K}$$

και $AB = ZM,\ B\Gamma = M\Theta,\ \Gamma\Delta = \Theta H,\ \Delta E = HK,\ EA = KZ.$

- Ίσα τρίγωνα λέγονται δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.



Π.χ. τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα, τότε:

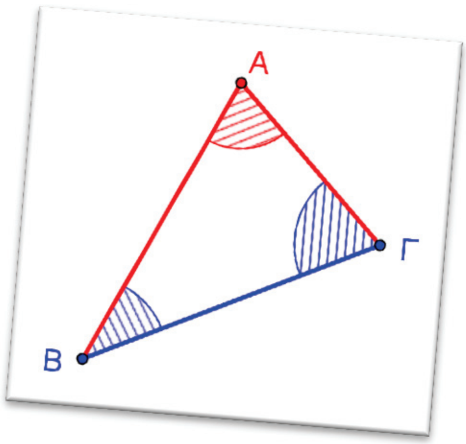
$$\hat{A} = \widehat{A'},\ \hat{B} = \widehat{B'},\ \hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$$

και $AB = A'B',\ B\Gamma = B'\Gamma' \quad A\Gamma = A'\Gamma'.$

Παρατήρηση:

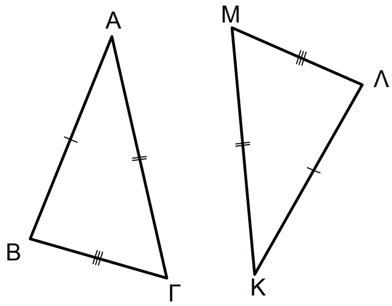
Σε τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$:

- ✓ η γωνία $Α$ ονομάζεται **περιεχόμενη γωνία** των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$.
- ✓ οι γωνίες $Β$ και $Γ$ ονομάζονται **προσκείμενες γωνίες** της πλευράς $ΒΓ$.



Παραδείγματα

1. Αν τα τρίγωνα $ΑΒΓ, ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει $ΑΒ = ΚΛ,\ ΒΓ = ΜΛ,\ ΓΑ = ΚΜ$, να βρείτε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.



Λύση:

Στα ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

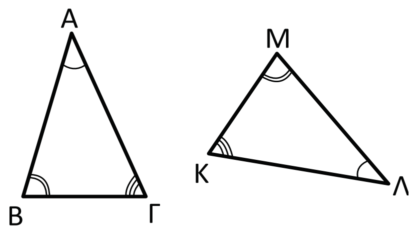
Δηλαδή

$ΒΓ = ΜΛ \Longrightarrow \hat{Α} = \widehat{Κ}$,

$ΓΑ = ΜΚ \Longrightarrow\ \widehat{Β} = \hat{Λ}$ και

$ΓΑ = ΚΜ \Longrightarrow \widehat{Β} = \widehat{Λ}$.

2. Αν τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει $\hat{Α} = \widehat{Λ},\ \widehat{Β} = \widehat{Μ},\ \widehat{Γ} = \widehat{Κ}$, να βρείτε τις αντίστοιχες ίσες πλευρές.



Λύση:

Στα ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνιές βρίσκονται ίσες πλευρές.

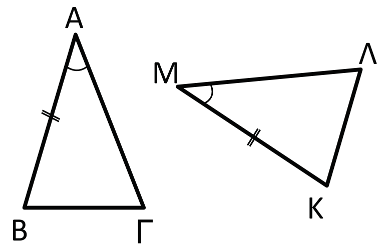
Δηλαδή

$\hat{Α} = \widehat{Λ} \Longrightarrow ΒΓ = ΚΜ$,

$\widehat{Β} = \widehat{Μ} \Longrightarrow ΑΓ = ΚΛ$ και

$\widehat{Γ} = \widehat{Κ} \Longrightarrow ΑΒ = ΜΛ$

3. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$ είναι ίσα και ισχύει $AB = MK$ και $\hat{A} = \widehat{M}$. Να βρείτε τα αντίστοιχα ίσα πρωτεύοντα στοιχεία τους.



Λύση:

Στα ίσα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και αντίστροφα.

Δηλαδή

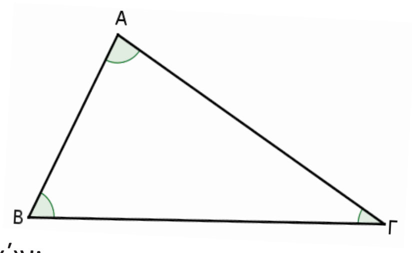
$$AB = MK \Longrightarrow \hat{\Gamma} = \widehat{\Lambda}, \quad \text{και} \quad \hat{A} = \widehat{M} \Longrightarrow B\Gamma = K\Lambda$$

$$\hat{\Gamma} = \widehat{\Lambda} \text{ και } \widehat{\mathrm{A}} = \widehat{M} \Longrightarrow \hat{B} = \widehat{\Lambda}$$

$$\hat{B} = \widehat{\Lambda} \Longrightarrow AB = M\Lambda$$

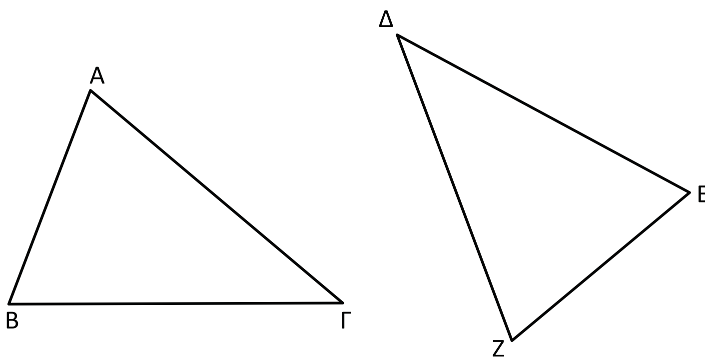
Δραστηριότητες

1. Δίνεται το τρίγωνο $ΑΒΓ$.



   (α) Να γράψετε τα κύρια στοιχεία του τριγώνου.
   (β) Να ονομάσετε με μικρά γράμματα τις πλευρές $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$ του διπλανού σχήματος.
   (γ) Ποιες είναι οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών:
      i. $ΑΒ$ και $ΒΓ$
      ii. $ΑΓ$ και $ΑΒ$
   (δ) Ποιες πλευρές έχουν περιεχόμενη γωνία τη γωνία $Γ$;
   (ε) Ποιες είναι οι προσκείμενες γωνίες της πλευράς $ΑΒ$;

2. Να συγκρίνετε τα δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$, του πιο κάτω σχήματος αφού τοποθετήσετε το ένα πάνω στο άλλο με τη χρήση ενός διαφανούς χαρτιού

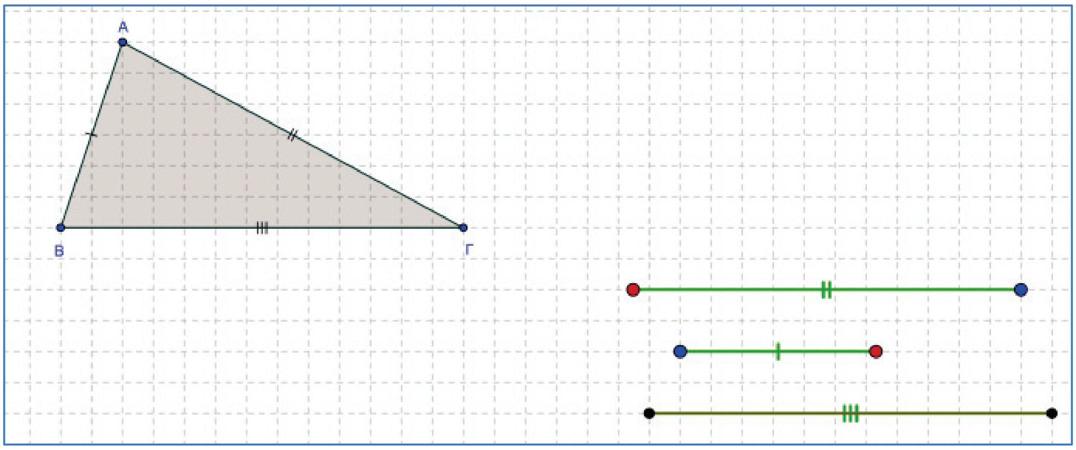


3. Να εξετάσετε κατά πόσο ένα σκαληνό τρίγωνο θα μπορούσε να είναι ίσο με ένα ισοσκελές (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
4. Να εξετάσετε κατά πόσο ένα ισόπλευρο τρίγωνο θα μπορούσε να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
5. Να εξετάσετε κατά πόσο ένα ισοσκελές τρίγωνο θα μπορούσε να είναι ίσο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο (να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Διερεύνηση

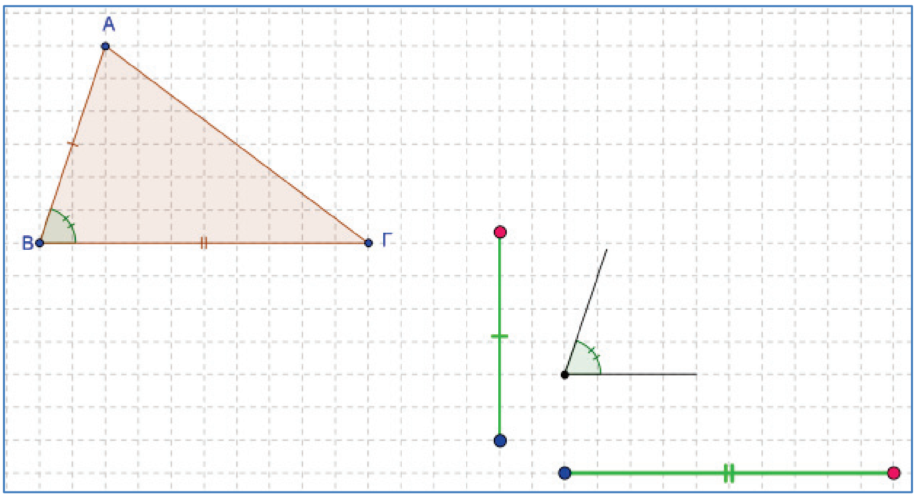
- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* «CEn8_1o kritirio_IsoTrig.ggb»



- ✓ Στο αρχείο υπάρχει ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τρία ευθύγραμμα τμήματα με μήκος ίσο με τις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου.
- ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα με μαύρα άκρα δεν μετακινείται.
- ✓ Τα άλλα δύο ευθύγραμμα τμήματα με μπλε και κόκκινα άκρα μεταφέρονται από το μπλε άκρο και περιστρέφονται από το κόκκινο άκρο. Να μετακινήσετε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο.
- ✓ Ακολούθως να μετατοπίσετε το τρίγωνο που δημιουργείται προς το τρίγωνο $AB\Gamma$

Τι παρατηρείτε;

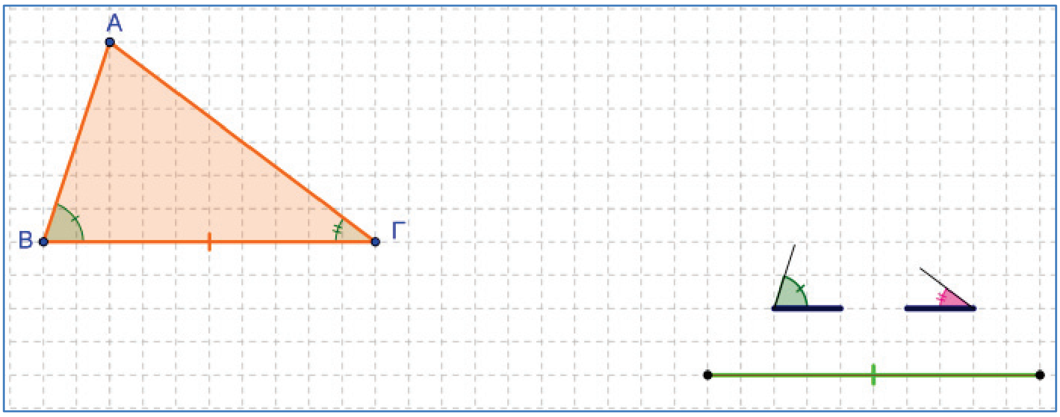
- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* «CEn8_2o kritirio_IsoTrig.ggb»



- ✓ Στο αρχείο υπάρχει ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$, μία γωνία ίση με τη γωνία $Β$ του τριγώνου, ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την πλευρά $ΑΒ$ του τριγώνου και ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την πλευρά $ΒΓ$ του τριγώνου.
- ✓ Η γωνία δεν μετακινείται.
- ✓ Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα με μπλε και κόκκινα άκρα μεταφέρονται από το μπλε άκρο και περιστρέφονται από το κόκκινο άκρο. Να μετακινήσετε αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα προς τη γωνία, ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο με πλευρές τα δύο τμήματα και περιεχόμενη τη γωνία που δίνεται.
- ✓ Ακολούθως να μετατοπίσετε το τρίγωνο που δημιουργείται προς το τρίγωνο $ΑΒΓ$

  Τι παρατηρείτε;

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* «**CEn8_3o kritirio_IsoTrig.ggb**»



- ✓ Στο αρχείο υπάρχει ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$, δύο γωνίες ίσες με τις γωνίες $Β$ και $Γ$ του τριγώνου, και ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την πλευρά $ΒΓ$ του τριγώνου.
- ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα δεν μετακινείται.
- ✓ Οι δύο γωνίες μεταφέρονται από την μπλε πλευρά. Να μετακινήσετε τις γωνίες προς τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ώστε να κατασκευάσετε ένα νέο τρίγωνο που να περιλαμβάνει το ευθύγραμμο τμήμα και τις δύο γωνίες.
- ✓ Ακολούθως να μετατοπίσετε το τρίγωνο που δημιουργείται προς το τρίγωνο $ΑΒΓ$.

  Τι παρατηρείτε;

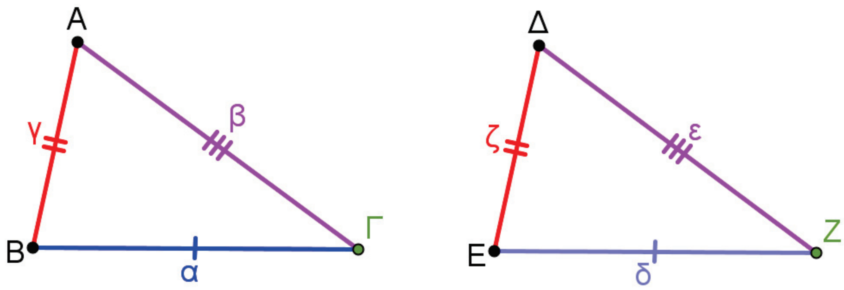
Μαθαίνω

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Οι προτάσεις οι οποίες εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων, από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους, αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

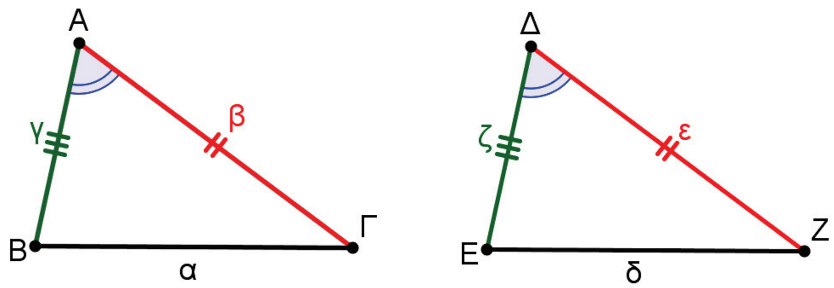
- **1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων. ($\Pi - \Pi - \Pi$)**

  Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε $\Pi - \Pi - \Pi$).



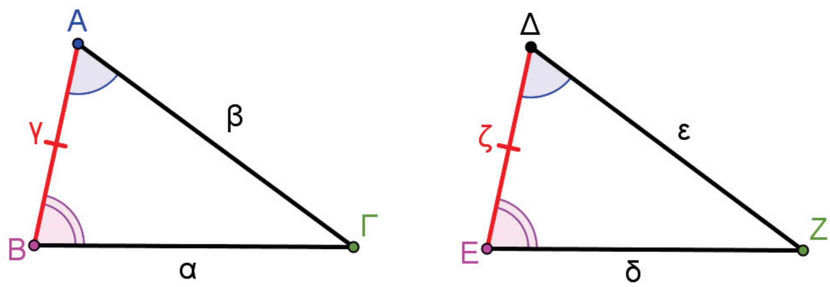
- **2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων. ($\Pi - \Gamma - \Pi$).**

  Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε $\Pi - \Gamma - \Pi$).



- **3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων. ($\Gamma - \Pi - \Gamma$).**

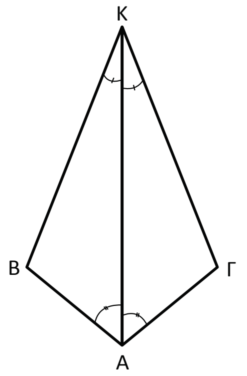
  Αν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα (συμβολικά γράφουμε $\Gamma - \Pi - \Gamma$).



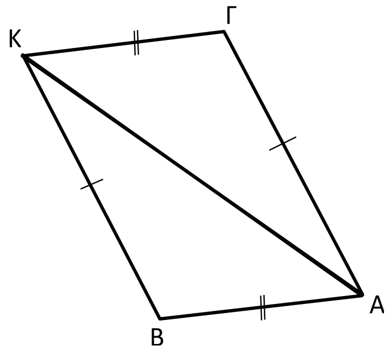
Παραδείγματα

1. Σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΑΓΚ$.

(α)



(β)



Λύση:

(α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΑΓΚ$, τα οποία έχουν:

$ΑΚ = ΑΚ$	Κοινή πλευρά	$(Π)$
$Β\widehat{Κ}Α = Γ\widehat{Κ}Α$	Δεδομένα από σχήμα	$(Γ)$
$Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Κ$	Δεδομένα από σχήμα	$(Γ)$

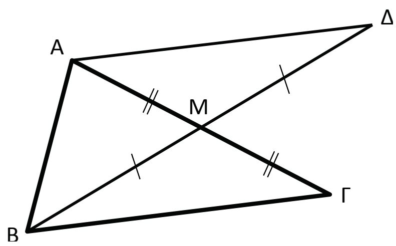
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια κοινή πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες σε κάθε τρίγωνο αντίστοιχα ίσες $(Γ - Π - Γ)$.

(β) Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΑΓΚ$, τα οποία έχουν:

$ΑΚ = ΑΚ$	Κοινή πλευρά	$(Π)$
$ΓΚ = ΑΒ$	Δεδομένα από σχήμα	$(Π)$
$ΒΑ = ΚΓ$	Δεδομένα από σχήμα	$(Π)$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες αντίστοιχα μία προς μία $(Π - Π - Π)$.

2. Στο σχήμα η διάμεσος $ΒΜ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ έχει προεκταθεί κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$. Να συγκρίνετε τα τμήματα $ΑΔ$ και $ΒΓ$.



Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AMΔ$, $BMΓ$ τα οποία έχουν:

$$\left.\begin{array}{lll} AM = MΓ & (M \text{ μέσο του } AΓ) & (Π) \\ MΔ = BM & (\text{Δεδομένο}) & (Π) \\ A\widehat{M}Δ = B\widehat{M}Γ & (\text{κατακορυφήν γωνίες}) & (Γ) \end{array}\right\}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα διότι έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες $(Π - Γ - Π)$.

Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε ότι $AΔ = BΓ$.

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει:

(α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

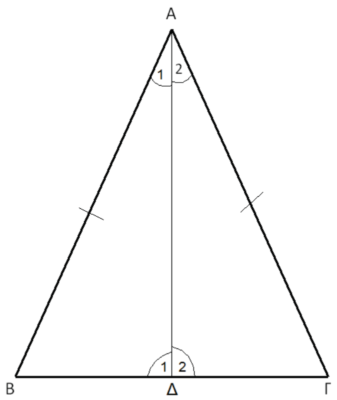
(β) Η διχοτόμος της απέναντι από τη βάση γωνίας, είναι διάμεσος και ύψος.

Λύση:

(α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$, $AB = AΓ$.

Κατασκευάζουμε τη διχοτόμο $AΔ$ της γωνίας A.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AΔB$ και $AΔΓ$ τα οποία έχουν:



$$\left.\begin{array}{ll} AB = AΓ & (Δ \text{ μέσο του } AΓ)\ \ (Π) \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & (AΔ \text{ διχοτόμος της γωνίας } \hat{A})\ \ (Γ) \\ AΔ = AΔ & (\text{Κοινή πλευρά}).\ \ (Π) \end{array}\right\}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, διότι έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές αντίστοιχα ίσες $(Π - Γ - Π)$.
Άρα $\hat{B} = \hat{Γ}$.

(β) Από την ισότητα των τριγώνων ($\overset{\triangle}{AΔB} = \overset{\triangle}{AΔΓ}$) έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων είναι ίσα , άρα: $BΔ = ΔΓ$ και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$.

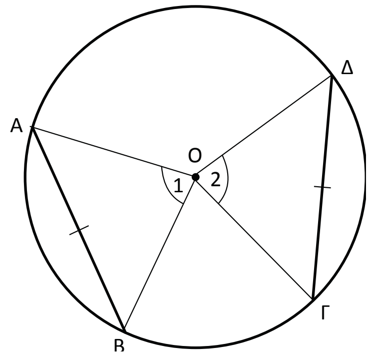
Αφού $BΔ = ΔΓ$ τότε $AΔ$ είναι διάμεσος.

Επειδή $\widehat{Δ}_1 + \widehat{Δ}_2 = 180^o$ και $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2$ τότε $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2 = 90^o$,

οπότε το τμήμα $AΔ$ είναι ύψος του τριγώνου.

4. Να αποδείξετε ότι σε ίσες χορδές ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Λύση:



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ τα οποία έχουν:

$AO = \Delta O \ (\Pi)$ (Ακτίνες κύκλου)
$BO = \Gamma O \ (\Pi)$ (Ακτίνες κύκλου)
$AB = \Gamma\Delta \ (\Pi)$ (Δεδομένο)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα διότι έχουν τρεις πλευρές αντίστοιχα ίσες μία προς μία ($\Pi - \Pi - \Pi$).

Από τα ίσα αντίστοιχα στοιχεία των τριγώνων AOB και $\Gamma O\Delta$ έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Οι γωνίες $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ είναι επίκεντρες γωνίες, άρα τα αντίστοιχα τόξα τους AB, $\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Παρατήρηση:

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι σε ίσες χορδές δύο ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσα τόξα.

Δραστηριότητες

1. Δίνονται τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$. Αφού σημειώσετε τα δεδομένα σε ξεχωριστό σχήμα κάθε φορά, να βρείτε σε ποιες από τις πιο κάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι ίσα.

   (α) $ΑΒ = ΔΕ,\ ΑΓ = ΔΖ,\ ΒΓ = ΕΖ$

   (β) $\hat{A} = \hat{Δ},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{Γ} = \hat{Z}$

   (γ) $ΑΒ = ΔΕ,\ \hat{A} = \hat{E}, \hat{Δ} = \hat{B}$

   (δ) $ΑΒ = ΑΓ,\ ΔΕ = ΕΖ,\ \hat{A} = \hat{E}$

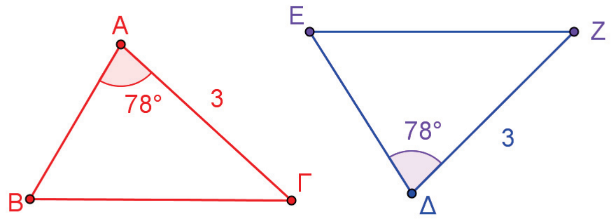
   (ε) $ΑΒ = ΔΕ,\ ΒΓ = ΕΖ$

2. Με βάση το σχήμα να αναφέρετε ποια άλλα στοιχεία πρέπει να έχουν ίσα, ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο ισότητας σε κάθε περίπτωση.

   (α) Οι πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του άλλου.

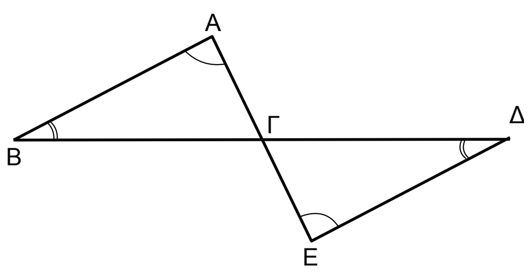
   (β) Οι δύο πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του άλλου και οι περιεχόμενες γωνίες τους είναι ίσες.

   (γ) Η μια πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με τη μια πλευρά του άλλου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι αντίστοιχα ίσες.

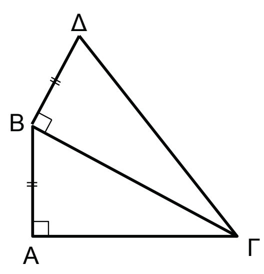


3. Από τα στοιχεία που δίνονται, να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τριγώνων είναι ίσα. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

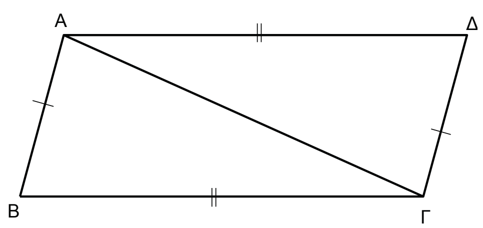
(α)



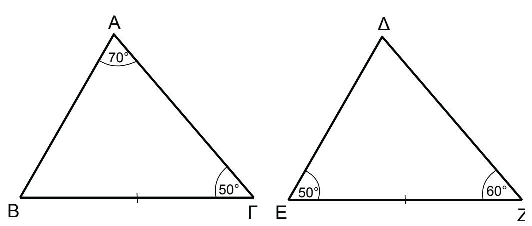
(β)



(γ)



(δ)



4. Σε τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το σημείο $Μ$ είναι μέσο της $ΑΓ$. Προεκτείνουμε το $ΒΜ$ έτσι ώστε $ΜΖ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΖ = ΒΓ$.

5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ, ΓΔ > ΑΒ)$. Φέρουμε τα ύψη $ΑΕ$ και $ΒΖ$. Να δείξετε ότι:

   (α) Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα. (β) $ΔΕ = ΖΓ$ (γ) $ΔΕ = \frac{ΓΔ-ΑΒ}{2}$

6. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ, Ε, Ζ$ στις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ$ αντίστοιχα ώστε $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

7. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι $ΒΜ$ και $ΓΝ$ ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ είναι ίσες.

8. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ το σημείο $Μ$ είναι μέσο της $ΒΓ$. Να δείξετε ότι το σημείο $Μ$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΒ, ΑΓ$.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι $ΒΔ, ΓΕ$ είναι ίσες.

10. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου που φέρεται από την κορυφή προς τη βάση του είναι ταυτόχρονα ύψος και διχοτόμος του.

11. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύει

    (α) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες

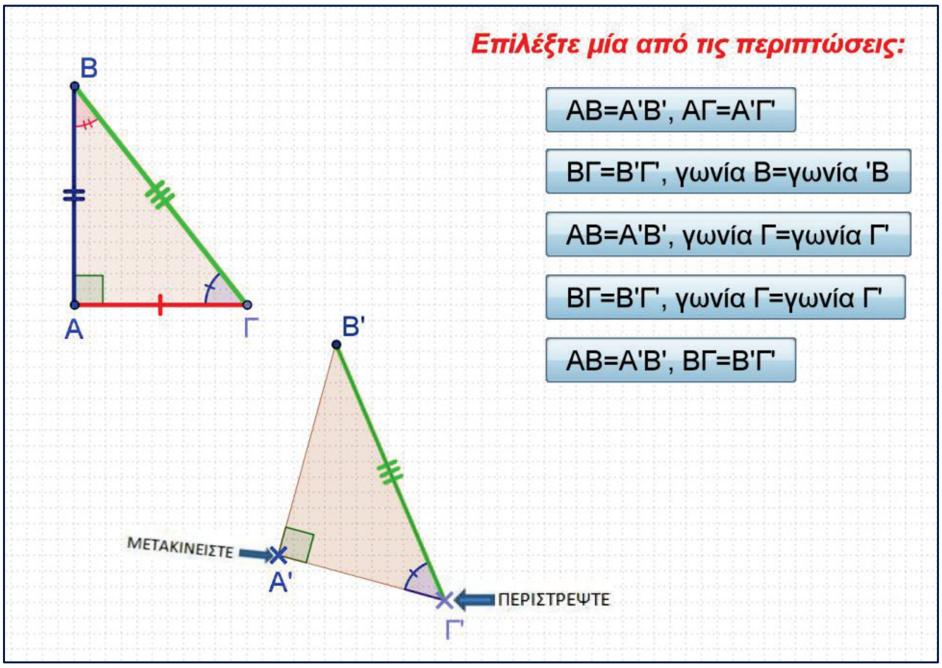
    (β) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες

12. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο "CEn8_KritirioOrthTrig.ggb".*
  - ✓ Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις που φαίνονται στα γαλάζια κουμπιά, κατασκευάζεται ορθογώνιο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ το οποίο έχει, επιπλέον της ορθής γωνίας, άλλα δύο κύρια στοιχεία ίσα με τα αντίστοιχα του $AB\Gamma$.
  - ✓ Μετακινώντας και περιστρέφοντας το ορθογώνιο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ να εξετάσετε αν μπορεί να συμπέσει με το $AB\Gamma$.
  - ✓ Να επαναλάβετε την πιο πάνω διαδικασία και για τις πέντε περιπτώσεις (πέντε κουμπιά επιλογής).
  - ✓ Να εξετάσετε ποια είναι τα ελάχιστα κύρια στοιχεία των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που πρέπει να ισούνται (εκτός από την ορθή γωνία), έτσι ώστε τα τρίγωνα να είναι ίσα.

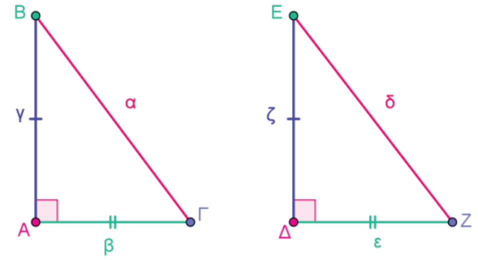


Μαθαίνω

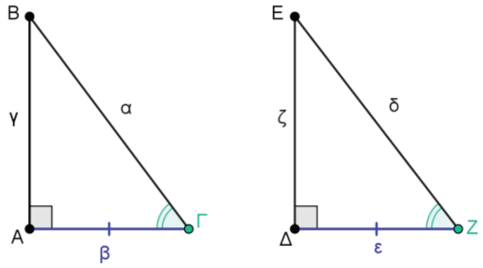
Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν ισχύει ένα από τα πιο κάτω:

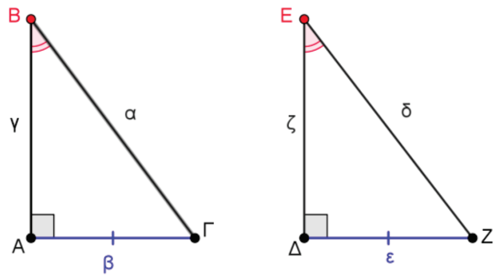
- Οι κάθετες πλευρές τους είναι αντίστοιχα ίσες μία προς μία $(\Pi - \Pi - O)$.



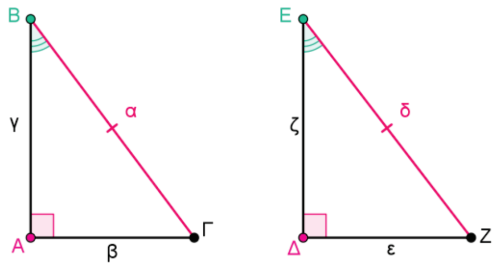
- Μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία είναι ίσες μία προς μία $(\Pi - \Gamma - O)$.



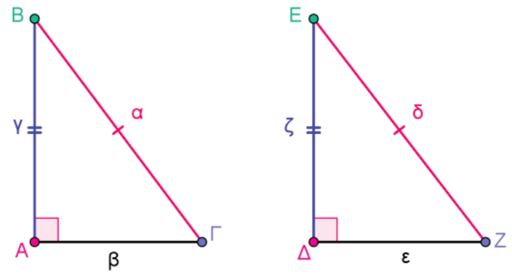
- Μία κάθετη πλευρά και η απέναντι σε αυτή οξεία γωνία είναι ίσες μία προς μία $(\Pi - \Gamma - O)$.



- Η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία είναι αντίστοιχα ίσες μία προς μία $(\Pi - \Gamma - O)$.



- Η υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία $(\Pi - \Pi - O)$.



Από τα πιο πάνω κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τρίγωνων διαπιστώνουμε ότι :

Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν

- *δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία* $(\boldsymbol{\Pi - \Pi - O})$

ή

- *μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.*

$(\boldsymbol{\Pi - \Gamma - O})$

Παράδειγμα

- Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη τρίγωνων είναι ίσα:

(α)

(β)

(γ)

Λύση:

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα διότι μια κάθετη πλευρά και η υποτείνουσα του ενός τριγώνου, είναι αντίστοιχα ίσες με μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα του άλλου τριγώνου ($\Pi - \Pi - O$).

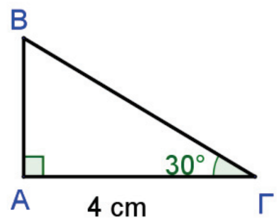
(β) Με βάση τα δεδομένα δεν έχουμε επαρκή στοιχεία για να αποδείξουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

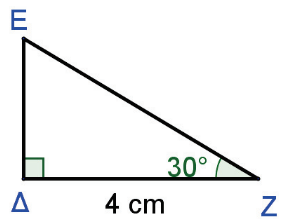
(γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα διότι οι κάθετες πλευρές του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες μία προς μία με τις κάθετες πλευρές του άλλου τριγώνου ($\Pi - \Pi - O$).

Δραστηριότητες

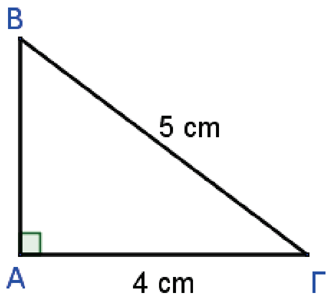
1. Να εξετάσετε καταπόσον τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ίσα.

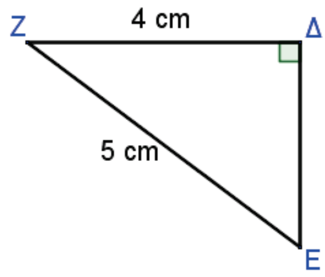
(α)





(β)





2. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ για τα οποία ισχύει:
   $\hat{A} = \hat{Δ} = 90^o$, $ΒΓ = 2y + 5$ και $ΕΖ = 3y + 1$
   Να υπολογίσετε την τιμή του y.

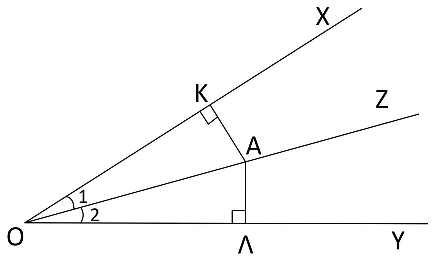
3. Να αποδείξετε ότι το ύψος, $ΑΔ$ κάθε ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ είναι και διχοτόμος και διάμεσος του.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Αν $Μ$ είναι τυχαίο σημείο του ύψους $ΑΔ$ να αποδείξετε ότι το $Μ$ ισαπέχει από τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$.

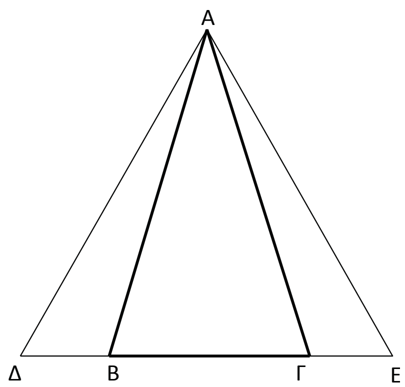
5. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Φέρουμε τη $ΒΕ$ κάθετη στη διχοτόμο $ΑΔ$ η οποία τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΖ$ είναι ισοσκελές.

6. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και πάνω στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε σημεία A και B αντίστοιχα έτσι ώστε $OA = OB$.
   (α) Αν M είναι σημείο της διχοτόμου της $x\hat{O}y$, να δείξετε ότι $MA = MB$.
   (β) Αν οι ευθείες AM και MB τέμνουν τις πλευρές Oy και Ox στα A' και B' αντίστοιχα να δείξετε ότι $AA' = BB'$.

7. Δίνεται η γωνία $X\hat{O}Y$. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της.



8. Το $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($ΑΒ = ΑΓ$) και $ΒΔ, ΓΕ$ είναι προεκτάσεις της πλευράς $ΒΓ$ τέτοιες ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές.



9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$). Τα ύψη του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ τέμνονται στο σημείο $Σ$. Να δείξετε:
   (α) Τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι ίσα.
   (β) Η $ΑΣ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΑΓ$.

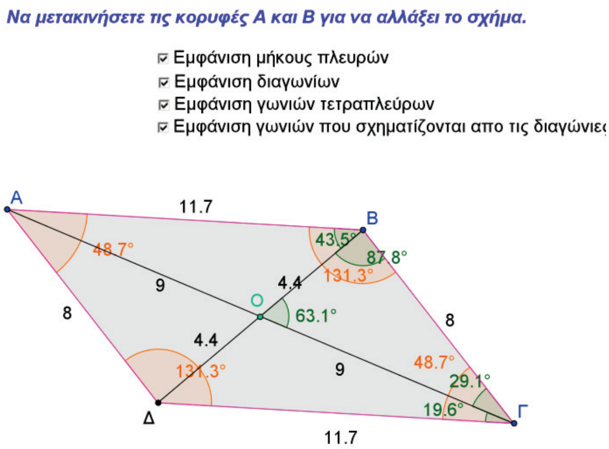
10. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

Παραλληλόγραμμο

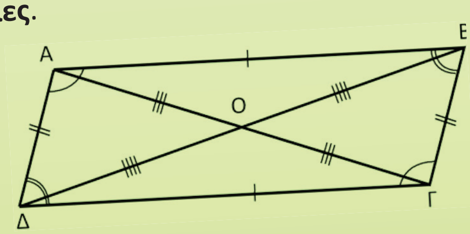
Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο "**Cen8_IdiotitesPRAL.ggb**". και να καταγράψετε όσες περισσότερες ιδιότητες μπορείτε για το παραλληλόγραμμο.*



Έχουμε Μάθει…

- Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο σχήμα που έχει τις **απέναντι πλευρές του παράλληλες**.



- Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι πιο κάτω **ιδιότητες**:

  (α) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ($AB = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$)

  (β) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

  ($\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$)

  (γ) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή το O είναι το μέσο των διαγωνίων του ($OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$).

Μαθαίνω

- **Κριτήρια Παραλληλογράμμου**

  Κριτήρια παραλληλογράμμου, είναι προτάσεις οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

  Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

  (α) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες (ορισμός).

  (β) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

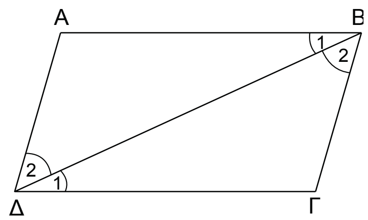
  (γ) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

  (δ) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

  (ε) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Απόδειξη Κριτηρίων παραλληλογράμμου (β), (γ), (δ) και (ε)

(β) Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύει ότι $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$ και σχηματίζουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ τα οποία συγκρίνουμε.



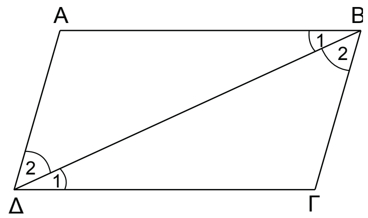
Ισχύει ότι $ΑΒ = ΓΔ$ (δεδομένο)

$ΑΔ = ΒΓ$ (δεδομένο)

$ΒΔ = ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα $(Π - Π - Π)$, επομένως οι $\hat{B}_1 = \widehat{Δ}_1$ και $\hat{B}_2 = \widehat{Δ}_2$. Άρα οι $ΑΒ||ΓΔ$ και $ΑΔ||ΒΓ$, δηλαδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(γ) Έστω ότι σε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ στο οποίο ισχύει ότι $ΑΒ|| = ΓΔ$. Φέρουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$ και σχηματίζουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ τα οποία συγκρίνουμε.



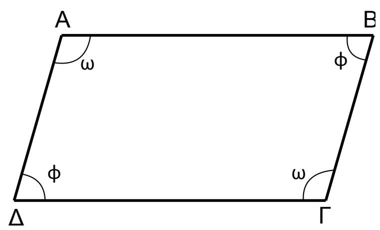
Ισχύει ότι $ΑΒ = ΓΔ$ (δεδομένο)

$\hat{B}_1 = \widehat{Δ}_1$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$ΒΔ = ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Επομένως τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα $(Π - Γ - Π)$, επομένως οι $\hat{B}_1 = \widehat{Δ}_1$ και $\hat{B}_2 = \widehat{Δ}_2$. Άρα οι $ΑΒ||ΓΔ$ και $ΑΔ||ΒΓ$, δηλαδή το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(δ) Σε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{Γ} = ω$ και $\hat{Δ} = \hat{B} = \phi$.



Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} + \hat{Δ} = 360^o$

$\Rightarrow \quad 2ω + 2\phi = 360^o \quad \Rightarrow \quad ω + \phi = 180^o$.

Επομένως, $\hat{A} + \widehat{Δ} = 180^0$.

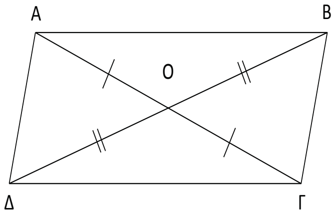
Αφού $\hat{A}$ και $\widehat{Δ}$ είναι εντός κι επί τα αυτά γωνίες, τότε $ΑΒ||ΓΔ$.

Με τον ίδιο τρόπο $\hat{A} + \hat{B} = 180^o$ και $\hat{A}$, $\widehat{B}$ είναι εντός κι επί τα αυτά γωνίες, άρα $ΑΔ||ΒΓ$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(ε) Σε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύει ότι $ΔΟ = ΒΟ$ και $ΑΟ = ΓΟ$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΟΓ$, τα οποία έχουν:



$ΑΟ = ΓΟ$ (δεδομένο)

$ΒΟ = ΔΟ$ (δεδομένο)

$Α\hat{Ο}Β = Δ\hat{Ο}Γ$ (κατακορυφήν γωνίες).

$\Rightarrow$ τα τρίγωνα $ΑΟΒ$ και $ΔΟΓ$ είναι ίσα $(Π - Γ - Π)$.

$\Rightarrow$ $ΑΒ = ΓΔ$ και $Β\hat{Α}Ο = Δ\hat{Γ}Ο$.

Οι γωνίες $Β\hat{Α}Ο, Δ\hat{Γ}Ο$ ισούνται είναι εντός εναλλάξ $\Rightarrow ΑΒ \parallel ΔΓ$

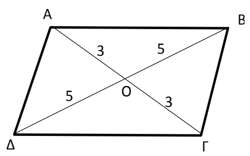
$\Rightarrow$ $ΑΒ \parallel = ΔΓ$.

Επομένως το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο με βάση το προηγούμενο κριτήριο.

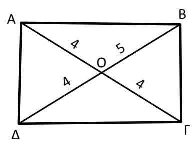
Παραδείγματα

1. Να βρείτε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα και ποια όχι;

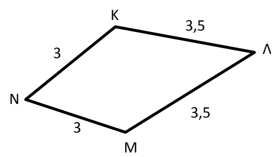
(α)



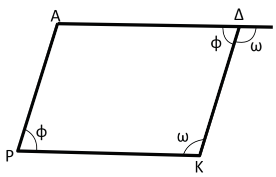
(β)



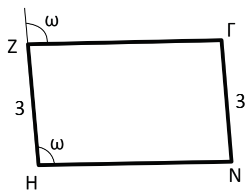
(γ)



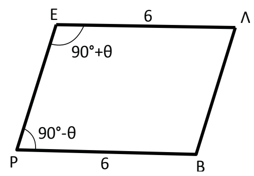
(δ)



(ε)



(στ)



Λύση:

(α) Είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

(β) Δεν είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του δεν διχοτομούνται.

(γ) Δεν είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του δεν είναι ίσες.

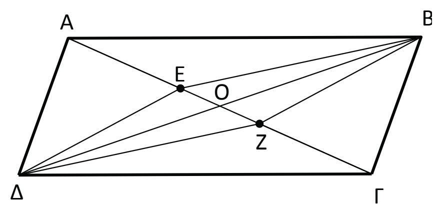
(δ) Είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες αφού $\hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^0$

(ε) Δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο, γιατί:

- οι απέναντι πλευρές $ΖΗ, ΓΝ$ είναι ίσες αλλά δεν ξέρουμε αν είναι παράλληλες
- οι απέναντι πλευρές $ΖΓ, ΗΝ$ είναι παράλληλες αλλά δεν ξέρουμε αν είναι ίσες (δεν ικανοποιείται κανένα κριτήριο).

(στ) Είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΕΛ και ΡΒ είναι ίσες και παράλληλες αφού $90^0 + \hat{\theta} + 90^0 - \hat{\theta} = 180^0$ (οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές).

2. Αν το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, $Ο$ σημείο το τομής των διαγωνίων του και $ΟΕ = ΟΖ$, να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΖ$.



Λύση:

Εξετάζω το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$.

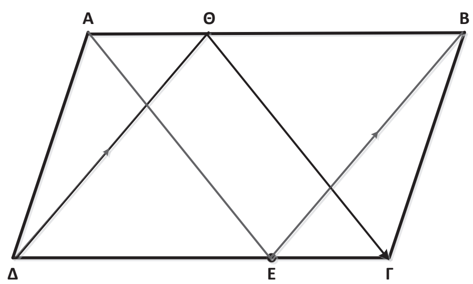
$ΔΟ = ΟΒ$ (οι διαγώνιες του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$ διχοτομούνται)

$ΟΕ = ΟΖ$ (δεδομένο)

Άρα το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Επομένως $ΔΕ = ΒΖ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ΔΕΒΖ$.

3. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$, παίρνουμε τυχαίο σημείο $Ε$ της πλευράς $ΔΓ$ και φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα $ΕΒ$. Ακολούθως φέρουμε ευθεία παράλληλη προς το $ΕΒ$ που περνά από το $Δ$ και τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο $Θ$. Να αποδείξετε ότι $ΓΘ \parallel ΑΕ$.



Λύση:

$ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο ⇒ $ΔΕ \parallel ΘΒ$ (1)

και $ΑΒ = ΔΓ$ (2)

$ΔΘ \parallel ΕΒ$ (δεδομένο) (3)

Από τις σχέσεις (1) και (3) ⇒ $ΔΘΒΕ$ παραλληλόγραμμο ⇒ $ΘΒ = ΔΕ$ (4)

Από τις ισότητες (2) και (4) και επειδή $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ$, $ΑΘ = ΑΒ - ΘΒ$

⇒ $ΕΓ = ΑΘ$ (διαφορές ίσων ευθυγράμμων τμημάτων).

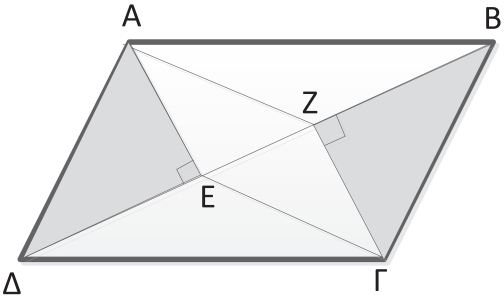
Δηλαδή το $ΕΓΘΑ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επομένως, $ΓΘ \parallel ΑΕ$.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και από τις απέναντι κορυφές του $Α$ και $Γ$ φέρνουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΕ$ και $ΓΖ$ στη διαγώνιο $ΒΔ$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση:

(α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΓΒΖ$ τα οποία έχουν:

$\hat{E} = \hat{Z} = 90^o$ (O)

$ΑΔ = ΒΓ$ $(Π)$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

$Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Β}Ζ$ $(Γ)$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ΑΔΕ} = \overset{\triangle}{ΓΒΖ}$ διότι τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και δύο οξείες γωνίες αντίστοιχα ίσες ($Π - Γ - Ο$).

(β) $ΑΕ = ΓΖ$ (από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΓΒΖ$.

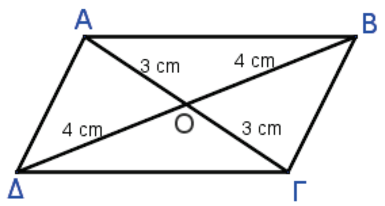
$ΑΕ \parallel ΓΖ$ (ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία $ΒΔ$)

Επομένως το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει τις δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες και ίσες.

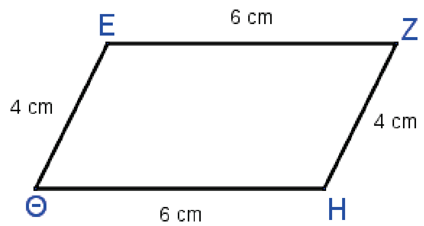
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα και ποια όχι. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

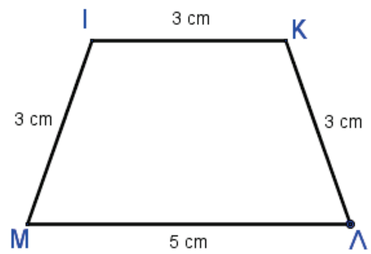
(α)



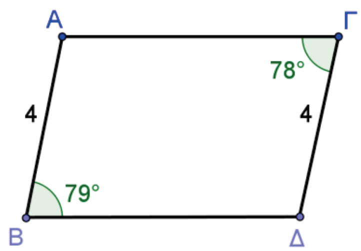
(β)



(γ)



(δ)



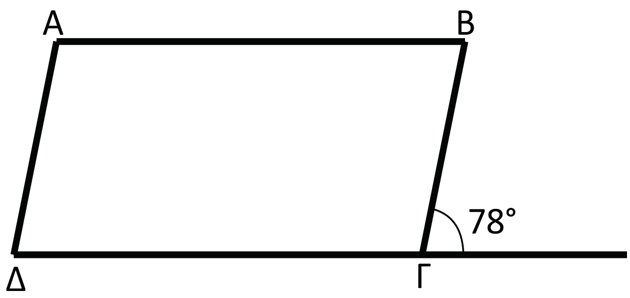
2. Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι ορθές. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

   (α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

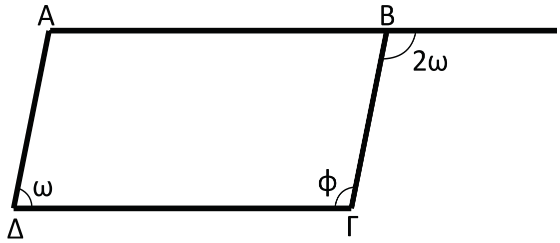
   (β) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν δύο πλευρές του είναι ίσες.

   (γ) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του πιο κάτω παραλληλογράμμου .



4. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του πιο κάτω παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.



5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$ τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΓ$.

6. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών παραλληλογράμμου είναι παράλληλες.

7. Να αποδείξετε ότι κάθε ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.

8. Να αποδείξετε ότι κάθε ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο.

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ρόμβο ισχύει:
   (α) Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
   (β) Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες τους.

10. Σε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις υπάρχει κάποιο λάθος. Να βρείτε το λάθος και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
    (α) Αν δύο γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
    (β) Δύο διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι οξείες.
    (γ) Η μεγαλύτερη διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου μπορεί να είναι ίση με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου.

11. Τα σημεία $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$. Να αποδείξετε ότι
    (α) το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο
    (β) οι $ΑΓ,\ ΒΔ,\ ΕΖ$ περνούν από το ίδιο σημείο.

12. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και η διχοτόμος του $ΑΔ$. Η παράλληλη από το $Δ$ προς την $ΑΒ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Αν η παράλληλη από το $Ε$ προς τη $ΒΓ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΒΖ$.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{ΑΒΓ}$ $(\mathrm{ΑΒ} = \mathrm{ΑΓ})$ και σημείο $\mathrm{Μ}$ της βάσης του $\mathrm{ΒΓ}$. Φέρουμε $ΜΕ \parallel ΑΒ$ (Ε σημείο του ΑΓ) και $ΜΔ \parallel ΑΓ$ ($Δ$ σημείο του $ΑΒ$). Να αποδείξετε ότι $ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ$.

14. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Στις προεκτάσεις των διαμέσων $ΒΔ$ και $ΓΕ$ παίρνουμε σημεία $Η$ και $Ζ$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΔΗ = ΒΔ$ και $ΖΕ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι

    (α) $ΑΗ = ΑΖ$

    (β) τα σημεία $Ζ, Α$ και $Η$ είναι συνευθειακά.

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε, Ζ, Η$ και $Κ$ των πλευρών του $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ και $ΔΑ$ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = ΓΗ$ και $ΒΖ = ΔΚ$.

    Να αποδείξετε ότι

    (α) το τετράπλευρο $ΕΖΗΚ$ είναι παραλληλόγραμμο

    (β) οι $ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ$ και $ΚΖ$ περνούν από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

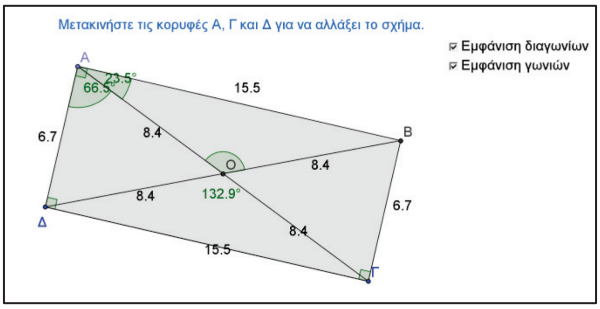
<u>Παρατήρηση:</u>

✓ Τρεις ή περισσότερες ευθείες λέμε ότι **συντρέχουν** αν περνούν από το ίδιο σημείο

Ορθογώνιο

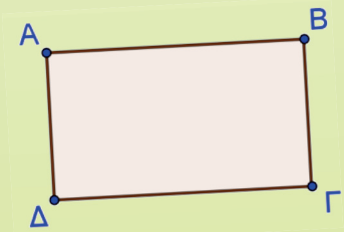
Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο "CEn8_IdiotitesORTHOG.ggb" και να καταγράψετε τον ορισμό και όσες περισσότερες ιδιότητες μπορείτε να συμπεράνετε ότι ισχύουν για το ορθογώνιο:*



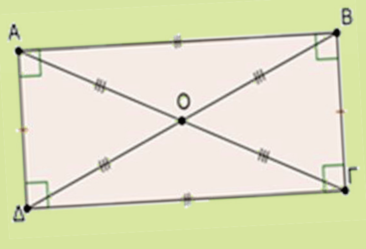
Έχουμε Μάθει…

- Ορθογώνιο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις γωνίες του ορθές.**



- Το ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο. Ονομάζεται και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

- **Ιδιότητες ορθογωνίου:**
  (α) Όλες τις ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.
  (β) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες ($ΑΓ = ΒΔ$).



Μαθαίνω

- **Κριτήρια Ορθογωνίου**

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Έχει τρεις γωνίες ορθές.

(β) Όλες του οι γωνίες είναι ίσες.

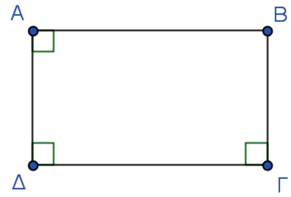
(γ) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.

(δ) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη κριτηρίων

Σε κάθε περίπτωση θα θεωρούμε ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$.

(α) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες τότε και η τέταρτη θα είναι ορθή διότι το άθροισμα όλων των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 360^o. Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.



(β) Αν όλες του οι γωνίες είναι ίσες, είναι όλες ορθές διότι το άθροισμα των γωνιών του είναι 360^o. Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

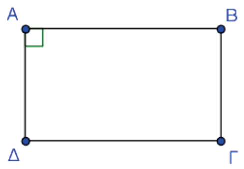
(γ) Έστω ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία $\hat{Α}$.

Τότε και η απέναντι της είναι ίση ($\hat{Γ} = 90^o$).

Η $\hat{Β}$ είναι παραπληρωματική της $\hat{Α}$, άρα $\hat{Β} = 90^o$.

Η $\hat{Δ} = \hat{Β}$ άρα όλες του οι γωνίες είναι ορθές.

Άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.



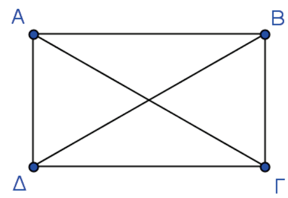
(δ) Έστω ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και $ΑΓ = ΒΔ$.

Τα τρίγωνα $ΔΑΒ$ και $ΑΒΓ$ είναι ίσα [$Π - Π - Π$: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΒ$ κοινή, $ΒΔ = ΑΓ$]. Άρα $\hat{Α} = \hat{Β}$.

Επιπλέον $\hat{Α} + \hat{Β} = 180^o$ (εντός και επί τα αυτά γωνίες). Άρα $\hat{Α} = \hat{Β} = 90^o$.

Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $\hat{Δ} = \hat{Β} = 90^o$ και $\hat{Γ} = \hat{Α} = 90^o$.

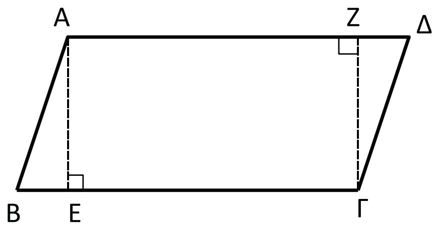
Άρα είναι όλες ορθές και το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο



Παραδείγματα

1. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ φέρουμε $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΓΖ \perp ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι το $ΑΖΓΕ$ είναι ορθογώνιο.

Λύση:



$ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο

$ΑΕ \perp ΒΓ \Rightarrow \hat{Ε} = 90°$

$Ε\hat{Α}Ζ = 90°$ (εντός και επί τα αυτά με την $\hat{Ε}$)

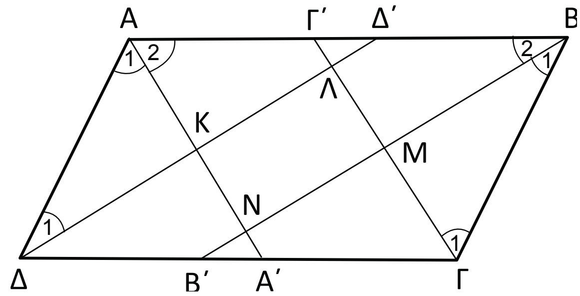
$ΓΖ \perp ΑΔ \Rightarrow \hat{Ζ} = 90°$

Άρα το τετράπλευρο $ΑΖΓΕ$ έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα είναι ορθογώνιο.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ > ΒΓ)$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των διχοτόμων των γωνιών του είναι κορυφές ορθογώνιου.

Λύση:

Φέρουμε τις διχοτόμους $ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ'$ των γωνιών $\hat{Α}$, $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$ του παραλληλογράμμου αντίστοιχα .



Είναι,

$\hat{Α}_1 = \frac{\hat{Α}}{2}$, $(ΑΑ'$ διχοτόμος της $\hat{Α})$.

$\hat{Δ}_1 = \frac{\hat{Δ}}{2}$, $(ΔΔ'$ διχοτόμος της $\hat{Α})$.

Άρα $\hat{Α}_1 + \hat{Δ}_1 = \frac{\hat{Α}}{2} + \frac{\hat{Δ}}{2} = \frac{\hat{Α}+\hat{Δ}}{2} = \frac{180^0}{2} = 90^0$ $(\hat{Α} + \hat{Δ} = 180°$, εντός και επί τα αυτά)

Άρα, στο τρίγωνο $ΚΑΔ$, έχουμε $\hat{Κ} = 90^o$ $\left(\hat{Α}_1 + \hat{Δ}_1 + \hat{Κ} = 180°\right)$

Με τον ίδιο τρόπο στο τρίγωνο $ΑΝΒ$ αποδεικνύεται ότι $\hat{Ν} = 90^0$ και στο τρίγωνο $ΒΜΓ$ αποδεικνύεται ότι $\hat{Μ} = 90°$.

Το τετράπλευρο $ΚΛΜΝ$ έχει τρεις γωνιές ορθές άρα είναι ορθογώνιο.

Δραστηριότητες

1. Ποιες από τις ακόλουθες δηλώσεις ισχύουν πάντα για ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;

    (α) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

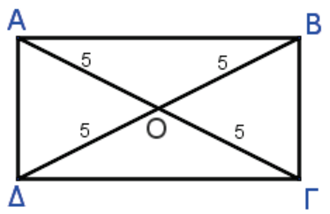
    (β) Οι διαγώνιοι είναι ίσες.

    (γ) Οι γωνίες του είναι ίσες.

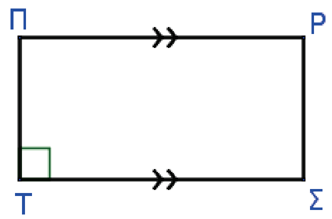
    (δ) Οι διαγώνιοι του σχηματίζουν τέσσερα ίσα τρίγωνα.

2. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι ορθογώνια.

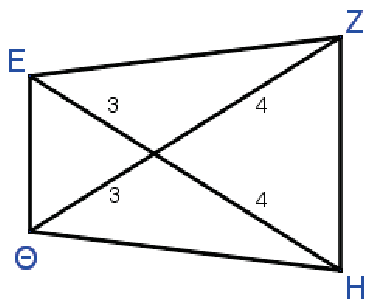
(α)



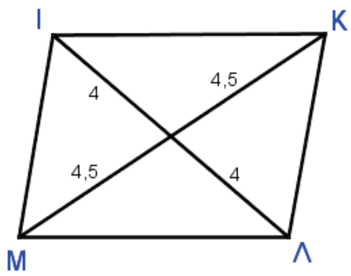
(β)



(γ)



(δ)



3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΒΔ = 2ΑΓ$. Αν οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ τέμνονται στο $Ο$ και τα σημεία $Ε, Ζ$ είναι τα μέσα των $ΟΒ$ και $ΟΔ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΑΕΓΖ$ είναι ορθογώνιο.

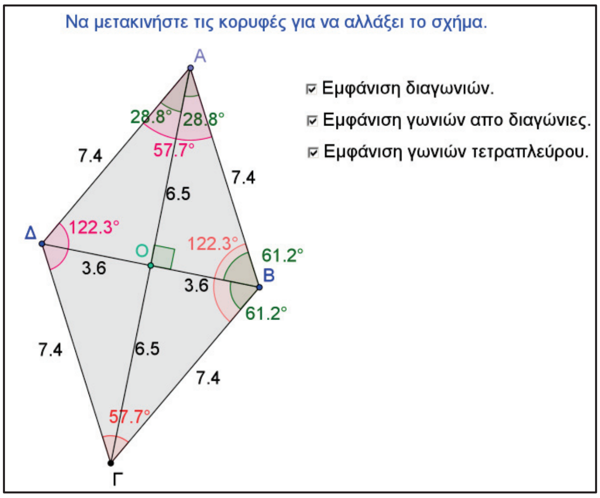
4. Να εξετάσετε αν ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
(α) έχει δύο γωνίες ορθές
(β) έχει τις διαγώνιούς του κάθετες
(γ) είναι παραλληλόγραμμο και έχει τις διαγώνιούς του ίσες.
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$, $Δ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$ και $Ε$ το μέσο της $ΑΓ$. Προεκτείνουμε τη $ΔΕ$ κατά τμήμα $ΕΖ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΖΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

Ρόμβος

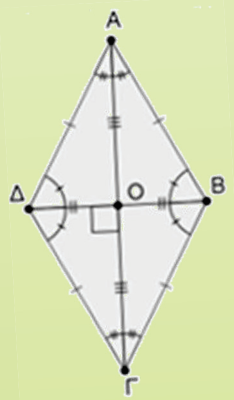
Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το πιο κάτω αρχείο και να καταγράψετε όσες περισσότερες ιδιότητες μπορείτε να συμπεράνετε ότι ισχύουν για τον ρόμβο: "**CEn8_IdiotitesROMVOS.ggb**".¨*



Έχουμε Μάθει…

- Ρόμβος ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει και τις **τέσσερις πλευρές του ίσες**.
- Κάθε ρόμβος είναι και **παραλληλόγραμμο.**
- **Ιδιότητες ρόμβου:**
  - α) Όλες οι ιδιότητες που ισχύουν στο παραλληλόγραμμο.
  - β) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες. ($ΑΓ \perp ΒΔ$)
  - γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του (η $ΑΓ$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{Γ}$, και η $ΒΔ$ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Δ}$)



Μαθαίνω

- **Κριτήρια Ρόμβου**

  Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν ισχύει μια από τις πιο κάτω προτάσεις:

  (α) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

  (β) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

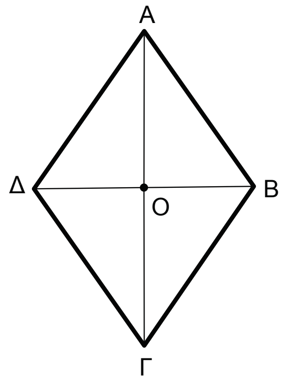
  (γ) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

  (δ) Είναι παραλληλόγραμμο και η μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνιά του.

Απόδειξη κριτηρίων

(α) Ικανοποιεί τον ορισμό του ρόμβου.

(β) Το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, τότε από τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου προκύπτει ότι έχει και τις απέναντι τους πλευρές ίσες. Άρα έχει και τις τέσσερις πλευρές ίσες και είναι ρόμβος.



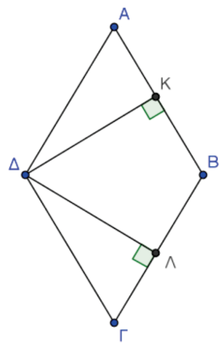
(γ) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και $ΑΓ \perp ΒΔ$. Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ το $ΑΟ$ είναι ύψος ($ΑΓ \perp ΒΔ$), αλλά είναι και διάμεσος αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επομένως $ΑΒ = ΑΔ$. Άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος, σύμφωνα με το κριτήριο (β).

(δ) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και η $ΑΓ$ διχοτομεί την $\hat{Α}$.
Στο τρίγωνο $ΑΒΔ$ η $ΑΟ$ είναι διχοτόμος ($ΑΓ$ διχοτομεί την $\hat{Α}$) αλλά είναι και διάμεσος αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
Άρα, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και επομένως $ΑΒ = ΑΔ$. Άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος, σύμφωνα με το κριτήριο (β).

Παράδειγμα

- Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι είναι ρόμβος.

Λύση:



Έστω το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και $ΔΚ$, $ΔΛ$ είναι οι ίσες αποστάσεις των απέναντι πλευρών ($ΔΚ = ΔΛ$).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΚΑ$ και $ΔΛΓ$ τα οποία έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{K} = \hat{Λ} = 90^o \\ ΔΚ = ΔΛ \text{ (δεδομένο)} \\ \hat{Α} = \hat{Γ} \text{ (απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{τα τρίγωνα} \\ ΔΚΑ, ΔΛΓ \text{ είναι ίσα} \\ \Rightarrow ΔΑ = ΔΓ. \\ \text{(υποτείνουσες σε} \\ \text{ίσα τρίγωνα)} \end{array}$$

Οπότε το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και άρα είναι ρόμβος.

Δραστηριότητες

1. Ποια από τις πιο κάτω δηλώσεις είναι ΛΑΘΟΣ;

    (α) Ένας ρόμβος έχει τέσσερις πλευρές ίσες.

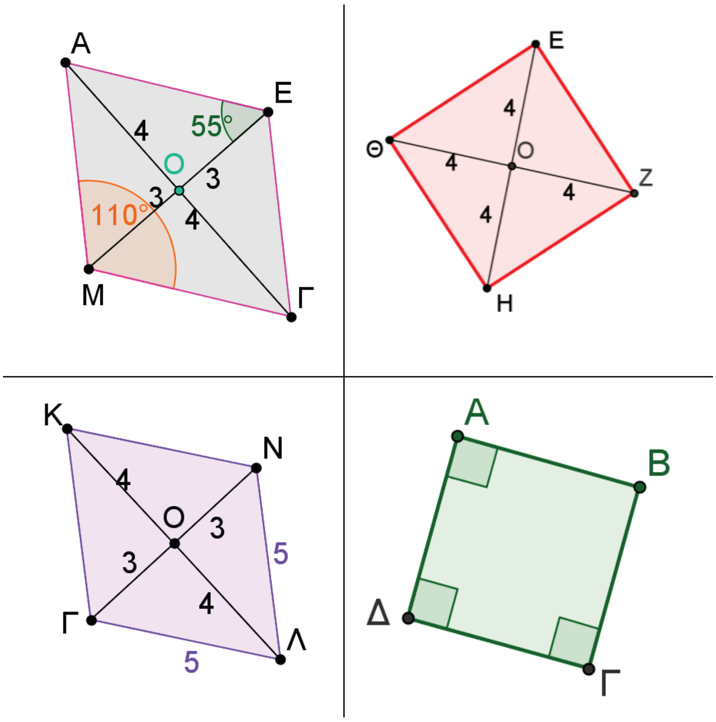
    (β) Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο.

    (γ) Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου διχοτομούν η μία την άλλη.

    (δ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες μεταξύ τους.

    (ε) Όλοι οι ρόμβοι έχουν γωνίες 90°.

2. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι ρόμβος και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



3. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ το σημείο $Μ$ είναι το μέσο της διχοτόμου του $ΒΔ$. Από το $Δ$ φέρουμε παράλληλη προς τη $ΒΓ$, που τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ε$. Αν η $ΕΜ$ τέμνει τη $ΒΓ$ στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι το $ΔΕΒΖ$ είναι ρόμβος.

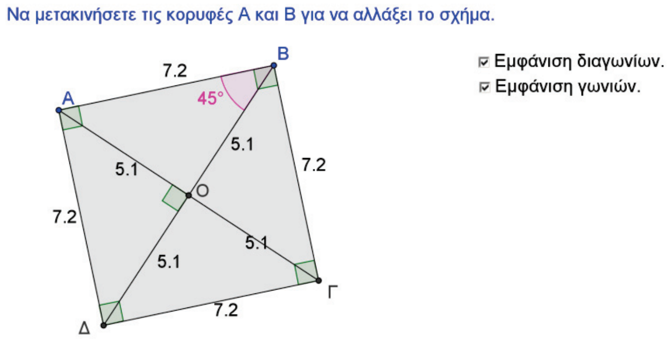
4. Σε ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$, $Ε$ και $Ζ$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Αν $Η$ είναι το σημείο τομής των $ΑΖ$ και $ΒΕ$ και $Θ$ το σημείο τομής των $ΔΖ$ και $ΓΕ$, να αποδείξετε ότι το $ΕΘΖΗ$ είναι ρόμβος.

Τετράγωνο

Διερεύνηση

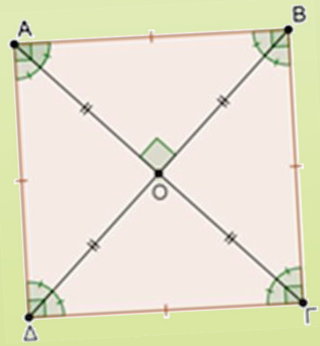
- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το πιο κάτω αρχείο και να διατυπώσετε τον ορισμό και όσες περισσότερες ιδιότητες μπορείτε για το τετράγωνο:*

"CEn8_IdiotitesTETRAGONO.ggb".



Έχουμε Μάθει…

- Τετράγωνο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει **τις τέσσερις γωνιές του ορθές και τις τέσσερις πλευρές του ίσες.**
- Κάθε τετράγωνο είναι **παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ρόμβος.**



- Σε κάθε τετράγωνο ισχύουν οι **ιδιότητες** που ισχύουν στο <u>παραλληλόγραμμο</u> στο <u>ορθογώνιο</u> και στον <u>ρόμβο</u>.

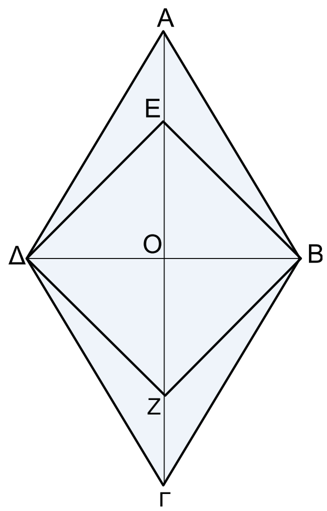
Μαθαίνω

- **Κριτήρια Τετραγώνου**

  Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα κριτήρια.

Παραδείγματα

1. Δίνεται ρόμβος $ΑΒΓΔ$ με κέντρο $Ο$. Παίρνουμε δύο σημεία $Ε$ και $Ζ$ της $ΑΓ$, τέτοια ώστε $ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ$. Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΒΖ$ είναι τετράγωνο.



Λύση:

Στο τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ ισχύουν τα εξής:

Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται κάθετα, τότε και οι διαγώνιοι του $ΔΕΒΖ$ τέμνονται κάθετα.
Αφού είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, τότε είναι ρόμβος.
Αφού είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες ($ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ$), τότε είναι και ορθογώνιο.

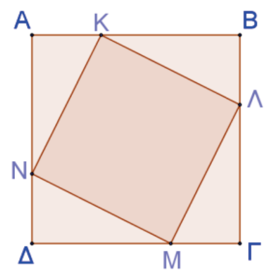
Επομένως, αφού το $ΔΕΒΖ$ είναι ορθογώνιο και ρόμβος, τότε είναι τετράγωνο.

2. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Στις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΔΑ$ παίρνουμε σημεία $Κ$, $Λ$, $Μ$ και $Ν$ αντίστοιχα, ώστε $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ$. Να αποδείξετε ότι το $ΚΛΜΝ$ είναι τετράγωνο.

Λύση:

Συγκρίνουμε τα τέσσερα τρίγωνα $ΑΚΝ$, $ΒΛΚ$, $ΓΛΜ$ και $ΔΜΝ$ τα οποία έχουν:

$ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ$ (Δεδομένο) $(Π)$
$\hat{Α} = \hat{Β} = \hat{Γ} = \hat{Δ} = 90^o$ ($ΑΒΓΔ$ τετράγωνο) $(Ο)$
$ΑΝ = ΒΚ = ΓΛ = ΔΜ$ (διαφορές ίσων τμημάτων) $(Π)$
αφού $ΑΝ = ΑΔ - ΝΔ$
$ΒΚ = ΑΒ - ΑΚ$
$ΓΛ = ΒΓ - ΒΛ$
$ΔΜ = ΔΓ - ΓΜ$



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($Π - Π - Ο$). Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε ότι $ΚΝ = ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ$.
Άρα το $ΚΛΜΝ$ είναι τετράγωνο.

Δραστηριότητες

1. Να σημειώσετε ✓ στα τετράπλευρα, που οι διαγώνιοί τους έχουν τις ιδιότητες που αναφέρονται στην πρώτη στήλη του πίνακα.

Ιδιότητα Διαγωνίου	**Παραλληλόγραμμο**	**Ορθογώνιο**	**Ρόμβος**	**Τετράγωνο**
Οι διαγώνιοι διχοτομούνται				
Οι διαγώνιοι ισούνται.				
Οι διαγώνιοι είναι κάθετοι.				
Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνιές του.				
Οι διαγώνιοι σχηματίζουν δύο ζεύγη ίσων τριγώνων.				
Οι διαγώνιοι σχηματίζουν τέσσερα ίσα τρίγωνα.				

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα με δύο ομοιότητες που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγώνιους [στήλη (Β)] και δύο διαφορές [στήλη (Γ)] μεταξύ των ζευγών των σχημάτων που αναγράφονται στη στήλη (Α).

στήλη (Α) σχήματα	**στήλη (Β)** ομοιότητες	**στήλη (Γ)** διαφορές
Τετράγωνο – ρόμβος	i) ii)	i) ii)
Τετράγωνο-ορθογώνιο	i) ii)	i) ii)
Ορθογώνιο – ρόμβος	i) ii)	i) ii)

3. Ποια από τις πιο κάτω προτάσεις είναι ψευδής;
   (α) Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι.
   (β) Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.
   (γ) Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα.
   (δ) Όλα τα ορθογώνια είναι ρόμβοι.

4. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές άλλου τετραγώνου.

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $\widehat{B} = 45^o$. Από το μέσο M της $ΓΔ$ φέρουμε κάθετη πάνω στη $ΓΔ$ και έστω E και Z τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΖ$ είναι τετράγωνο.

6. Σε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ προεκτείνουμε τη $ΔΓ$ κατά τμήμα $ΓΕ$ και τη $ΓΒ$ κατά τμήμα $ΒΗ$ ίσο με το $ΔΕ$.

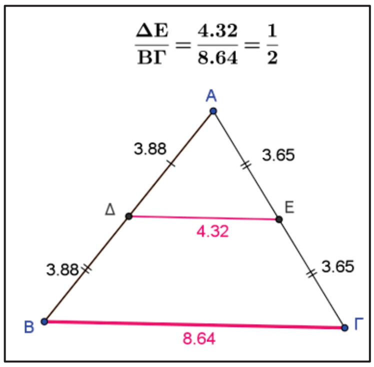
   (α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΑΗ$.

   (β) Να φέρετε παράλληλες προς τα τμήματα $ΑΕ$ και $ΑΗ$ και να κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο $ΑΕΖΗ$. Να αποδείξετε ότι το $ΑΕΖΗ$ είναι τετράγωνο.

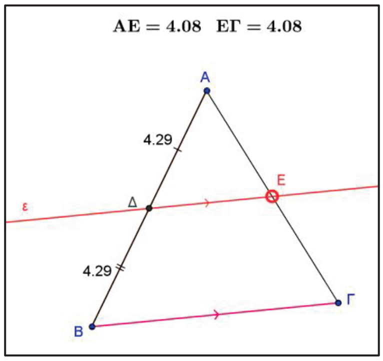
Διερεύνηση (1)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το πιο κάτω αρχεία:*

(α) **«CEn9_MesaPlevronTrig1.ggb»**
Να μετακινήσετε τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ σε σχέση με τη ΒΓ.

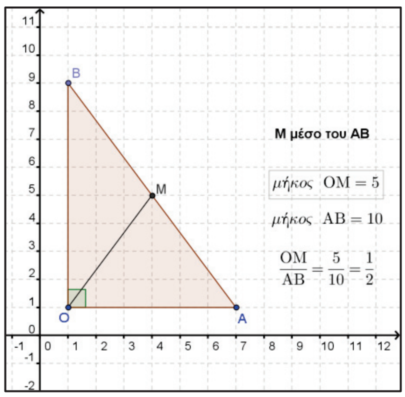


(β) **«CEn9_MesaPlevronTrig2.ggb»**
Να μετακινήσετε τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔE σε σχέση με τη $B\Gamma$.



Διερεύνηση (2)

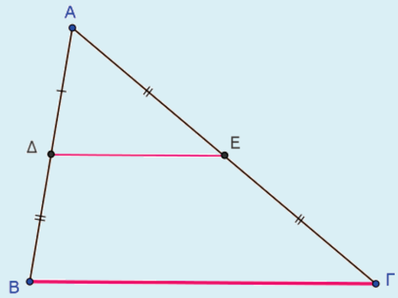
- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* **«CEn8_DiamesosOrthogoniou.ggb»**
  - Να μετακινήσετε τις κορυφές O, A, B του τριγώνου OAB και να παρατηρήσετε πώς μεταβάλλεται το μήκος της υποτείνουσας ΑΒ και της διαμέσου ΟΜ.
  - Τι παρατηρείτε για τον λόγο της διαμέσου OM προς την υποτείνουσα AB του ορθογώνιου τριγώνου;



Μαθαίνω

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\Delta \text{ μέσο της πλευρά } AB}\\ \boldsymbol{E \text{ μέσο της πλευράς } A\Gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta E \parallel = \frac{B\Gamma}{2}}$$



Απόδειξη

Προεκτείνουμε το ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

Ισχύει ότι $AE = E\Gamma$ (E μέσο του $A\Gamma$),

$\Delta E = EZ$ (από την κατασκευή)

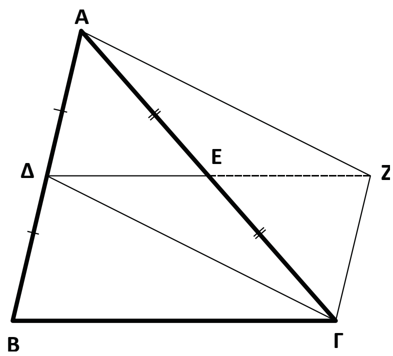
Άρα το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Επομένως } A\Delta =\parallel \Gamma Z,\\ A\Delta = \Delta B \ (\Delta \text{ μέσο } AB)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta B =\parallel \Gamma Z$$

Έτσι το τετράπλευρο $\Delta Z\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

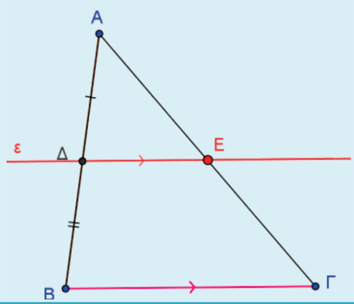
(i) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$.

(ii) $\Delta Z = B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.



- Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\Delta \text{ μέσο της πλευρά } AB}\\ \boldsymbol{\Delta E \parallel B\Gamma}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{E \text{ μέσο της πλευράς } A\Gamma}$$



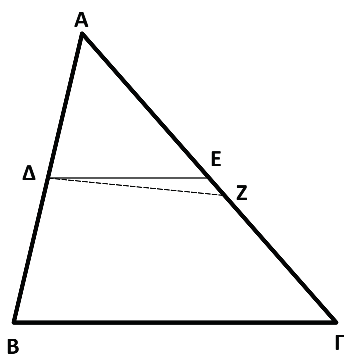
Απόδειξη

Κατασκευάζουμε από το μέσο Δ της AB την παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο E. Θα αποδείξουμε ότι το E είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

Έστω ότι το E δεν είναι το μέσο της $A\Gamma$.

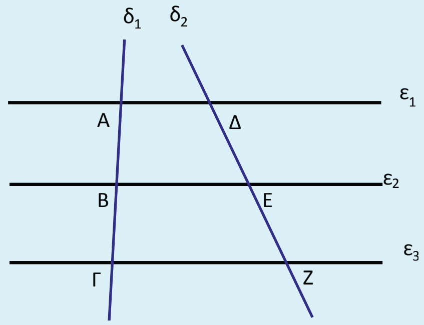
Έστω ότι ένα άλλο σημείο Z είναι το μέσο της $A\Gamma$. Το τμήμα ΔZ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $\Delta Z \parallel B\Gamma$. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη $B\Gamma$, που είναι άτοπο.

Άρα το E είναι μέσο της $A\Gamma$.



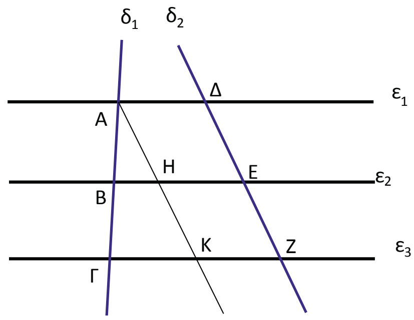
- Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3} \\ \boldsymbol{AB = B\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta E = EZ}$$



Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι οποίες τέμνουν τη δ_1 στα σημεία A, B, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $\Delta E = EZ$.



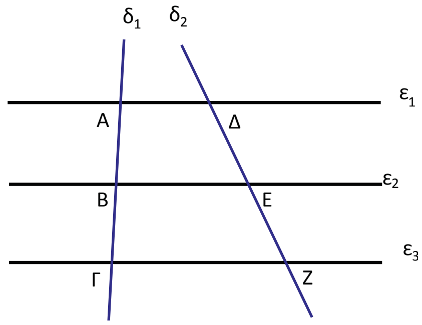
Φέρουμε $AK \parallel \Delta Z$. Τότε τα τετράπλευρα $A\Delta EH$ και $EZKH$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $AH = \Delta E$ (1) και $HK = EZ$ (2).

Στο τρίγωνο $AK\Gamma$ το B είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $BH \parallel \Gamma K$. Άρα το H είναι μέσο της AK, δηλαδή $AH = HK$ (3). Από τις $(1), (2)$ και (3) προκύπτει ότι $\Delta E = EZ$.

Παρατήρηση

Ισχύει και το αντίστροφο του πιο πάνω. Δηλαδή, αν τρεις (τουλάχιστον) ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα σε καθεμιά από αυτές, τότε αυτές είναι μεταξύ τους παράλληλες.

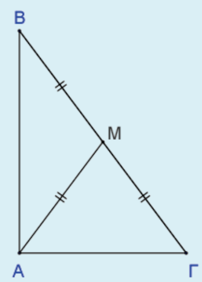
$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{AB = B\Gamma} \\ \boldsymbol{\Delta E = EZ} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3}$$



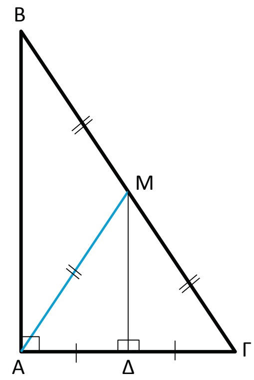
(Η απόδειξη μπορεί να γίνει από τους μαθητές)

- Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{AB\Gamma} \textbf{ τρίγωνο } (\boldsymbol{\widehat{A} = 90^\circ}) \\ \boldsymbol{AM} \textbf{ διάμεσος τότε} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{AM = \frac{B\Gamma}{2}}$$



Απόδειξη



Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο, με διάμεσο την $ΑΜ$. Θα αποδείξουμε ότι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

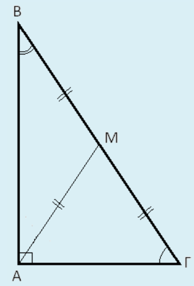
Κατασκευάζουμε τη διάμεσο $ΜΔ$ του τριγώνου $ΑΜΓ$.

Το $ΜΔ$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε $ΜΔ \parallel ΑΒ$.

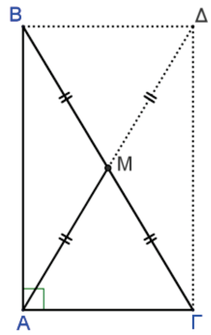
Εφόσον $ΑΒ \perp ΑΓ$, επομένως και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Άρα, το $ΜΔ$ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $ΑΜΓ$, οπότε $ΑΜ = ΜΓ$, δηλαδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

- Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{ΑΒΓ τρίγωνο} \\ \textbf{ΑΜ διάμεσος} \\ \boldsymbol{ΑΜ = ΒΜ = ΜΓ} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\hat{Α} = 90°}$$



Απόδειξη



Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει διάμεσο την $ΑΜ$.

Προεκτείνουμε την $ΑΜ$ κατά τμήμα $ΜΔ$ έτσι ώστε $ΑΜ = ΜΔ$.

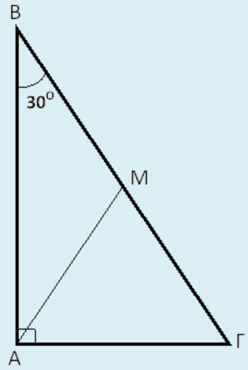
Σχηματίζουμε το τετράπλευρο $ΑΒΔΓ$. Οι διαγώνιες του $ΑΒΔΓ$ διχοτομούνται, αφού $ΑΜ = ΜΔ = ΒΜ = ΜΓ$.

Άρα το $ΑΒΔΓ$ είναι ορθογώνιο. Επομένως $\hat{Α} = 90^ο$.

- Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του, είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο } \boldsymbol{(\hat{Α} = 90°)} \\ \boldsymbol{\hat{Β} = 30°} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο } \boldsymbol{(\hat{Α} = 90°)} \\ \boldsymbol{ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\hat{Β} = 30}$$



Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$.

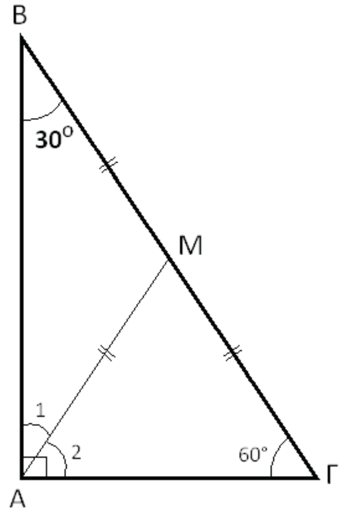
Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^o$, είναι $\hat{Γ} = 90^o - 30^o = 60^o$. Φέρουμε τη διάμεσο $ΑΜ$ και είναι

$ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$.

Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{Γ} = 60^o$, οπότε το τρίγωνο $ΑΜΓ$ είναι ισόπλευρο.

Επομένως, $ΑΓ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$

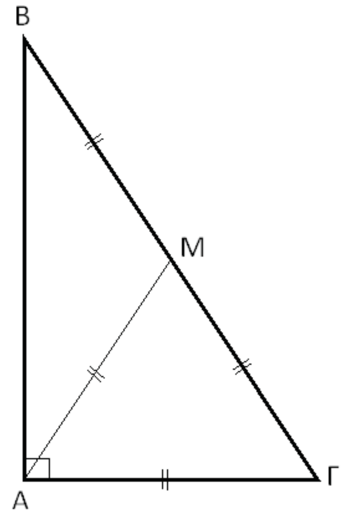


Αντίστροφα

Φέρουμε τη διάμεσο $ΑΜ$, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΑΓ$ (αφού $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$).

Άρα το τρίγωνο $ΑΜΓ$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{Γ} = 60^o$.

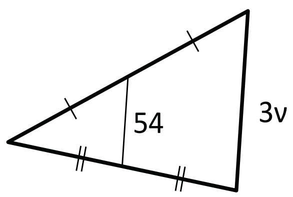
Επομένως $\hat{B} = 90^o - 60^o = 30^o$.



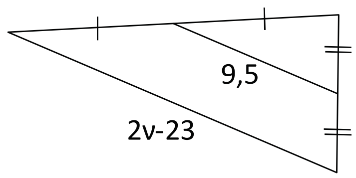
Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την τιμή του ν σε καθένα από τα πιο κάτω τρίγωνα.

α)



β)



Λύση:

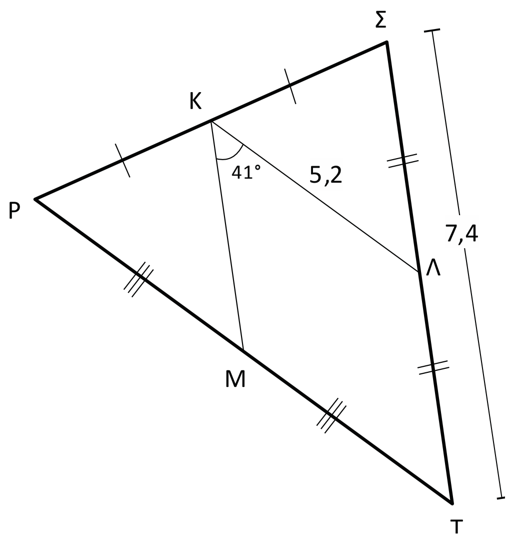
α) Από το σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα με μέτρο 54 ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου. Άρα είναι το μισό της τρίτης πλευράς.

$\Rightarrow 3\nu = 2 \cdot 54 \Rightarrow 3\nu = 108 \Rightarrow \nu = 36$

β) Με παρόμοιο τρόπο, το ευθύγραμμο τμήμα με μέτρο 9,5 ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου. Άρα είναι το μισό της τρίτης πλευράς.

$\Rightarrow 2\nu - 23 = 2 \cdot 9{,}5 \Rightarrow 2\nu - 23 = 19 \Rightarrow 2\nu = 42 \Rightarrow \nu = 21$

2. Στο σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος KM και το μέτρο της γωνίας $\Sigma\Lambda K$.



Λύση:

- Το K είναι το μέσο της πλευράς $P\Sigma$ του τριγώνου $P\Sigma T$.
- Το Μ είναι το μέσο της πλευράς PT του τριγώνου $P\Sigma T$.

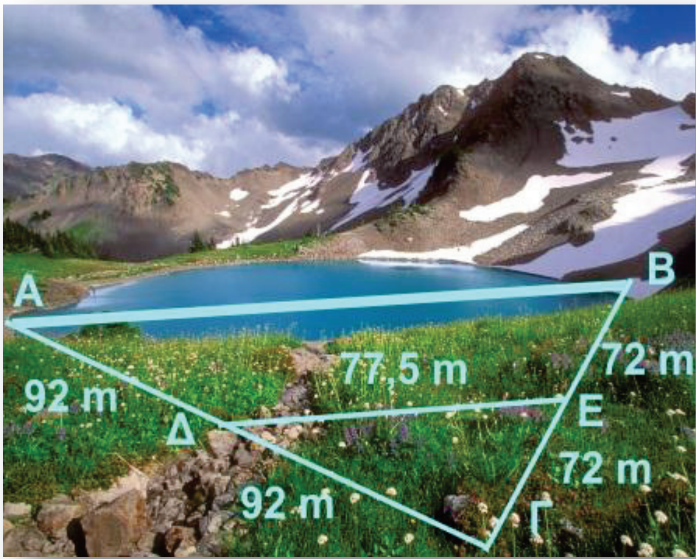
$\Rightarrow KM \parallel= \dfrac{\Sigma T}{2}$

Δηλαδή, $KM = \frac{\Sigma T}{2} \Rightarrow KM = \frac{7{,}4}{2} = 3{,}7$

και $KM \parallel \Sigma T \quad \Rightarrow \Sigma\hat{\Lambda}K = \Lambda\hat{K}M$ (εντός και εναλλάξ γωνίες)

$\Rightarrow \Sigma\hat{\Lambda}K = 41^o$

3. Η Άννα θέλει να μετρήσει πόσο απέχουν οι απέναντι όχθες της λίμνης (A και B), όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Πόση είναι η απόσταση AB;



Λύση:

Από το σχήμα φαίνεται ότι,

$A\Delta = \Delta\Gamma = 92\ m, \quad BE = E\Gamma = 72\ m$

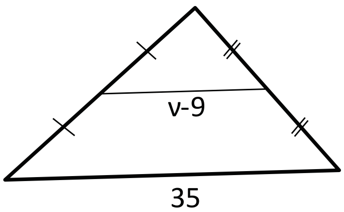
Άρα τα σημεία Δ, E είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Επομένως ισχύει ότι: $\Delta E \parallel = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2\Delta E \Rightarrow AB = 2 \cdot 77{,}5m \Rightarrow AB = 155m.$

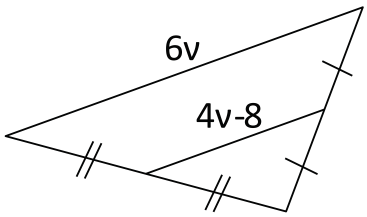
Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε την τιμή του ν σε καθένα από τα πιο κάτω τρίγωνα.

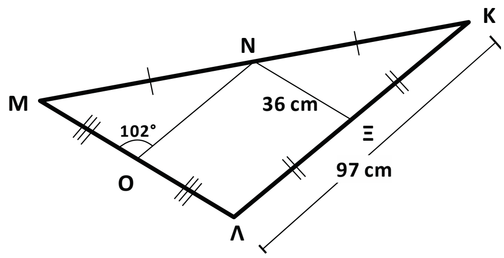
α)



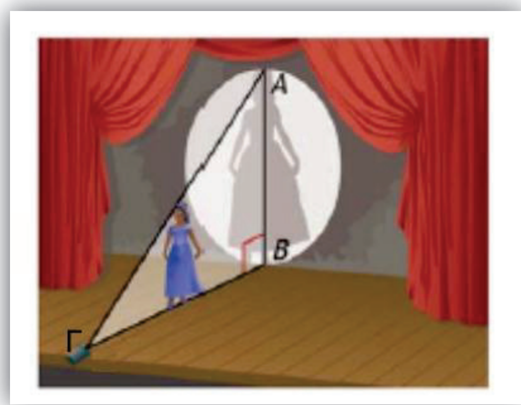
β)



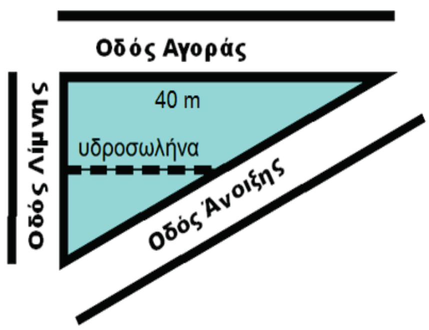
2. Με βάση το διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων $ΜΛ$, $ΝΟ$ και το μέτρο της γωνίας $Ο\hat{Λ}Κ$.



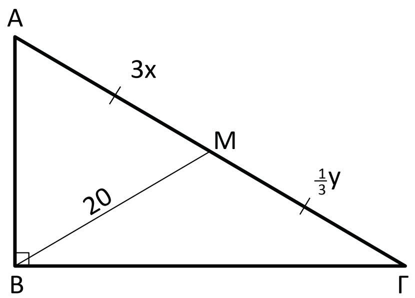
3. Ένας προβολέας στην άκρη της σκηνής φωτίζει τη σκηνή, όπως φαίνεται στη φωτογραφία. Η Κωνσταντία, που βρίσκεται πάνω στη σκηνή, έχει ύψος $152\ cm$. Στέκεται στη μέση της σκηνής. Να υπολογίσετε το ύψος που έχει η σκιά της Κωνσταντίας;



4. Το διάγραμμα δείχνει έναν τριγωνικό χώρο πρασίνου ανάμεσα στις οδούς Αγοράς, Λίμνης και Άνοιξης. Στον χώρο θα φυτευτεί γρασίδι και για να ποτίζεται, πρέπει να περάσει μια υδροσωλήνα πάνω στην οποία θα τοποθετηθούν τα ποτιστικά. Η υδροσωλήνα θα περάσει από το μέσο της πλευράς του τριγωνικού χώρου που βρίσκεται στην οδό Λίμνης και θα καταλήξει στο μέσο της πλευράς που βρίσκεται στην οδό Άνοιξης. Να βρείτε το μήκος του υδροσωλήνα που θα χρειαστεί.



5. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y στο πιο κάτω σχήμα.

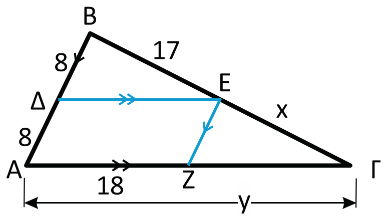


6. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $\hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = 35°$. Αν $ΑΜ$ διάμεσος του $ΑΒΓ$, τότε η γωνία $ΑΜΒ$ ισούται με:

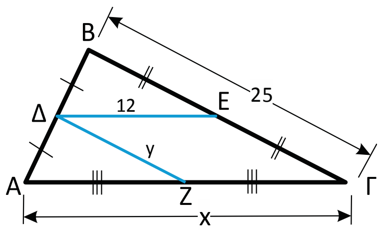
(α) $55°$ (β) $70°$ (γ) $110°$ (δ) $100°$ (ε) $125°$

7. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

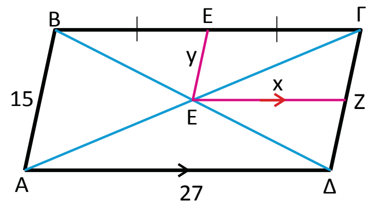
(α).



(β).



(γ).

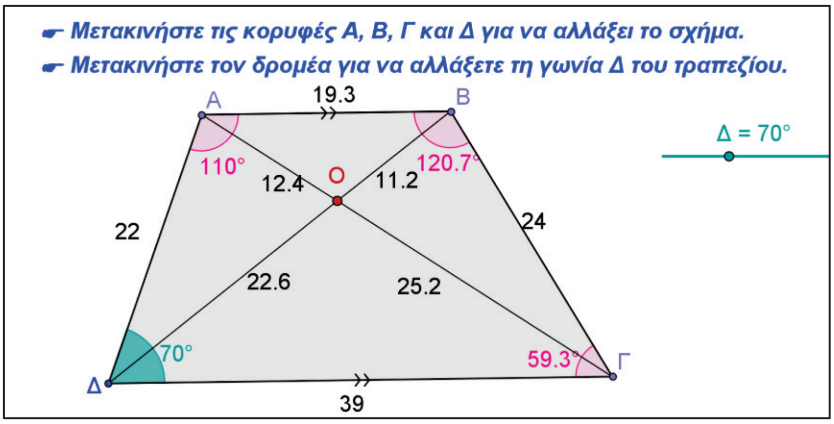


ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο

ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Διερεύνηση (1)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο “**CEn8_IdiotitesTRAPEZIO.ggb**”.*



✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τραπεζίου και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

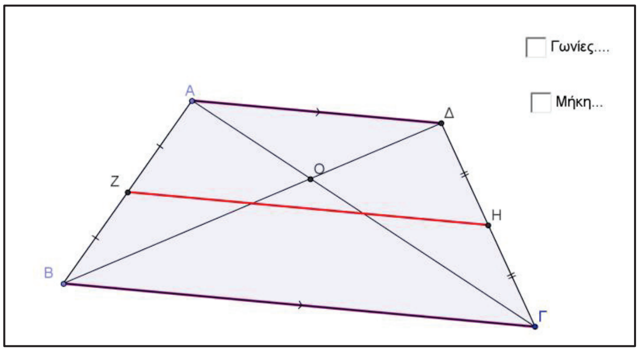
✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα, ώστε η γωνία $\varDelta$ να γίνει ορθή και να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

✓ Να μετακινήσετε τον δρομέα ή και τις κορυφές του τραπεζίου, ώστε οι γωνίες $\varDelta$ και $\varGamma$ να γίνουν ίσες. Να παρατηρήσετε το μέτρο των γωνιών του, τα μήκη των πλευρών και των διαγωνίων του.

✓ Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Διερεύνηση (2)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο “**CEn8_IdiotitesIsoskelesTrapezio.ggb**”.*



✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές (A,B και $\varGamma$) του ισοσκελούς τραπεζίου και να εξετάσετε τη σχέση του μέτρου και της θέσης του ΖΗ συγκριτικά με τις δύο βάσεις του ισοσκελούς τραπεζίου.

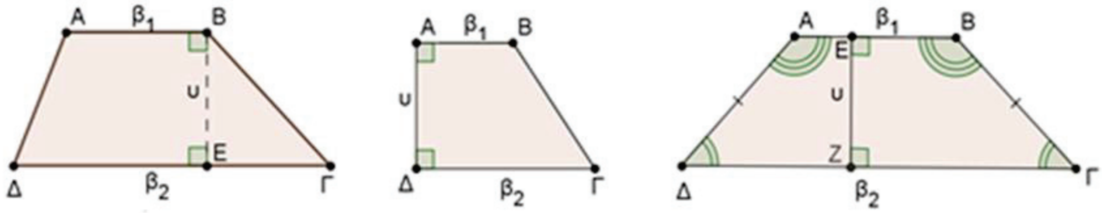
✓ Τι σχέση έχουν οι διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου;

✓ Να διατυπώσετε ένα κριτήριο για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές τραπέζιο.

✓ Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μαθαίνω

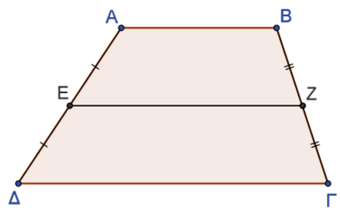
- **Τραπέζιο** ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει **μόνο τις δύο πλευρές του παράλληλες**.
- Οι παράλληλες πλευρές του τραπεζίου ονομάζονται **βάσεις** του τραπεζίου.
- Η απόσταση των δύο παράλληλων πλευρών του τραπεζίου ονομάζεται **ύψος** του τραπεζίου.



Τραπέζιο ***Ορθογώνιο τραπέζιο*** ***Ισοσκελές τραπέζιο***

- Το τραπέζιο που έχει **ορθή γωνία** ονομάζεται **ορθογώνιο τραπέζιο**.
- Το τραπέζιο που έχει τις **μη παράλληλες πλευρές του ίσες** ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο.**

- **Η διάμεσος του τραπεζίου** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του.



- <u>Ιδιότητες</u>
  - **Η διάμεσος του τραπεζίου** είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους. Δηλαδή, αν η $ΕΖ$ είναι διάμεσος του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$, τότε:

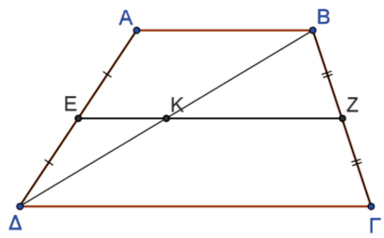
    α) $\boldsymbol{ΕΖ \parallel ΑΒ}$ ***και*** $\boldsymbol{ΕΖ \parallel ΓΔ}$

    β) $\boldsymbol{ΕΖ = \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}}$

Απόδειξη

Το $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) και $ΕΖ$ είναι η διάμεσός του.

Οι ευθείες $ΑΒ$, $ΕΖ$ και $ΔΓ$ τέμνουν τις ευθείες $ΑΔ$ και $ΒΓ$ και ορίζουν ίσα τμήματα σε καθεμιά από αυτές ($ΑΕ = ΕΔ, ΒΖ = ΖΓ$).



Άρα $\boldsymbol{ΑΒ \parallel ΕΖ \parallel ΓΔ}$**.**

Κατασκευάζουμε τη διαγώνιο $ΒΔ$ που τέμνει την $ΕΖ$ στο $Κ$.

Τότε:

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το E είναι μέσο της $A\Delta$ και $EK \parallel AB$, οπότε το K είναι μέσο της $B\Delta$ και $EK = \frac{AB}{2}$. (1)

Όμοια στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ το Κ είναι μέσο της $B\Delta$ και $KZ \parallel \Gamma\Delta$,οπότε το Z είναι μέσο της $B\Gamma$ και $KZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$EZ = EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{EZ} = \boldsymbol{\frac{AB+\Gamma\Delta}{2}}$$

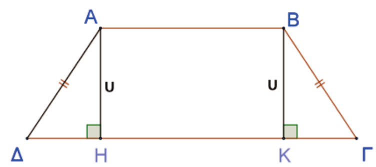
- Σε κάθε **ισοσκελές τραπέζιο** ισχύει:

(α)Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες ($\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$).

(β)Οι διαγώνιες του είναι ίσες ($A\Gamma = B\Delta$).

Απόδειξη

(α) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$. Κατασκευάζουμε τα ύψη AH και ΒΚ



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AH\Delta$ και $BK\Gamma$ τα οποία έχουν:

$A\Delta = B\Gamma$ (Π) (δεδομένο)

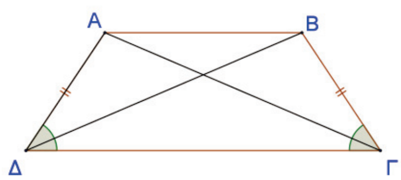
$\hat{H} = \hat{K} = 90^o$ (O) (AH, BK είναι ύψη του τραπεζίου)

$AH = BK = \upsilon$ (Π)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180°$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

(β) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$. Κατασκευάζουμε τις διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ τα οποία έχουν:

$A\Delta = B\Gamma$ (Π) (δεδομένο)

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (Γ) (γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τραπεζίου)

$\Gamma\Delta$ κοινή πλευρα (Π)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες.

- Ένα τραπέζιο είναι **ισοσκελές,** αν ισχύει μία από τις πιο κάτω προτάσεις:
(α)Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες ($\hat{A} = \hat{B}$ ή $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$).

(β)Οι διαγώνιες του είναι ίσες ($A\Gamma = B\Delta$).

Απόδειξη

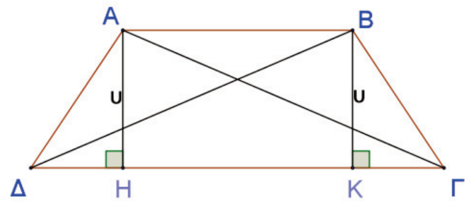
(α) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $AB \parallel \Delta\Gamma$.
Κατασκευάζουμε τα ύψη AH και BK.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AH\Delta$ και $BK\Gamma$ τα οποία έχουν:

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (Γ) (δεδομένο)
$\hat{H} = \hat{K} = 90^o$ (O) (AH, BK είναι ύψη του τραπεζίου)
$AH = BK = \upsilon$ (Π)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και οι πλευρές τους $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσες και το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

(β) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Gamma = B\Delta$. Κατασκευάζουμε τα ύψη AH και BK.



Απόδειξη

Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $BK\Delta$ είναι ίσα διότι έχουν
$\hat{H} = \hat{K} = 90^o$, $AH = BK = \upsilon$ και $A\Gamma = B\Delta$ (δεδομένο).

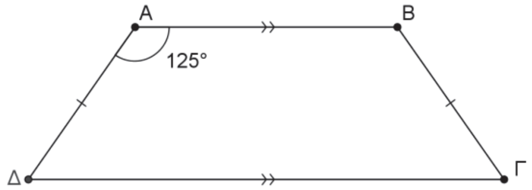
Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ (1)

Τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι επίσης ίσα διότι έχουν
$\Gamma\Delta$ κοινή πλευρά, $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ (1) και $A\Gamma = B\Delta$ (δεδομένο).

Άρα οι πλευρές τους $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσες και το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

Παραδείγματα

1. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΑΔ = ΒΓ$ και $\widehat{Α} = 125°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου $\hat{B}, \hat{Γ}$ $και$ $\hat{Δ}$.



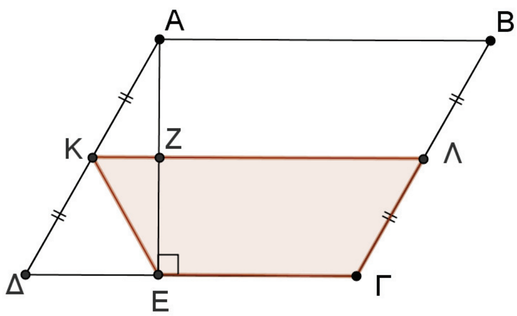
Λύση:

$\widehat{Α} + \widehat{Δ} = 180°$ (οι εντός επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές)

$\Rightarrow \widehat{Δ} = 180° - \widehat{Α} = 180° - 125° \Rightarrow \widehat{Δ} = 55°$

$\widehat{Γ} = \widehat{Δ} = 55°$ και $\widehat{Α} = \widehat{Β} = 125°$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο).

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και το ύψος του $ΑΕ$. Αν $Κ, Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΕΓΛΚ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση:

Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο $\Rightarrow ΒΓ =\parallel ΑΔ$.

Τα $Κ, Λ$ είναι μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα $\Rightarrow ΚΔ =\parallel ΛΓ$. (1)

$\Rightarrow$ ΚΛΓΔ παραλληλόγραμμο (αφού έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)

$\Rightarrow$ ΚΛΓΕ τραπέζιο

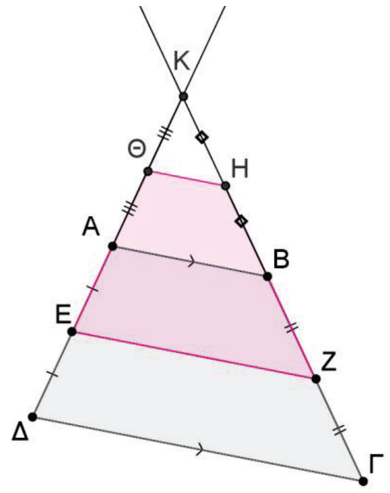
Απομένει να δείξουμε ότι $ΚΕ = ΛΓ$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΔΕ ορθογώνιο τρίγωνο} \\ \text{και Κ μέσο της ΑΔ} \end{array}\right\} \Rightarrow ΚΕ = \frac{ΑΔ}{2} = ΚΔ. \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $ΚΕ = ΛΓ$

Άρα, το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) και η διάμεσός του $ΕΖ$. Οι μη παράλληλες πλευρές του $ΑΔ$, $ΒΓ$ τέμνονται στο $Κ$. Τα $Η, Θ$ είναι τα μέσα των $ΚΑ$ και $ΚΒ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΕΖΗΘ$ είναι τραπέζιο.



Λύση:

Το $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο και η $ΕΖ$ είναι διάμεσος.

Άρα, $ΕΖ \parallel ΑΒ$ (1)

Το $ΘΗ$ ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου $ΑΚΒ$ και άρα $ΘΗ \parallel ΑΒ$ (2)

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $ΕΖ \parallel ΘΗ$.

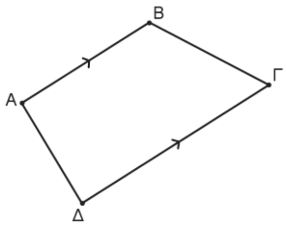
Επιπλέον, $ΘΕ \nparallel ΗΖ$ διότι οι προεκτάσεις τους τέμνονται στο $Κ$.

Άρα, το $ΘΕΖΗ$ είναι τραπέζιο.

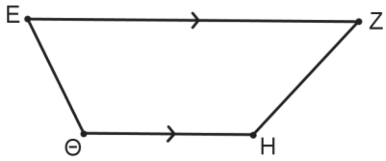
Δραστηριότητες

1. Για καθένα από τα ακόλουθα τραπέζια, να ονομάσετε τις βάσεις και τις προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες.

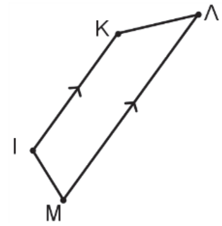
α)



β)

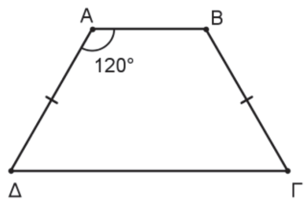


γ)

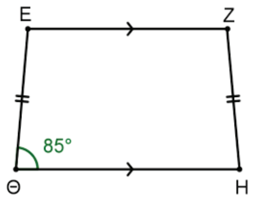


2. Για καθένα από τα ακόλουθα ισοσκελή τραπέζια, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών τους.

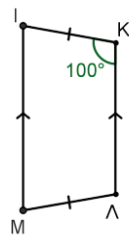
α)



β)



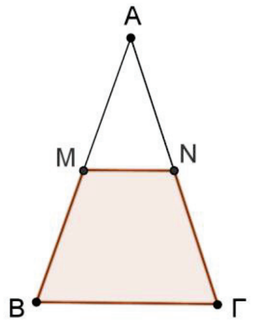
γ)



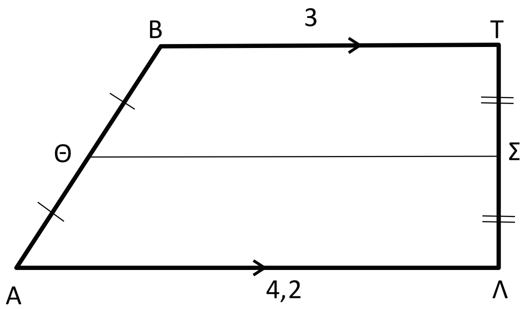
3. Αν σε ένα ισοσκελές τραπέζιο η μία γωνία είναι $45°$, να υπολογίσετε τις υπόλοιπες.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει τραπέζιο στο οποίο είναι δυνατό να ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις.
   (α) Τρεις πλευρές ίσες.
   (β) Μια πλευρά εκτός από τις βάσεις να είναι μεγαλύτερη από τις βάσεις.
   (γ) Τρεις γωνίες ορθές.
   (δ) Ίσες βάσεις.
   (ε) Δύο πλευρές ίσες χωρίς να είναι το τραπέζιο ισοσκελές.

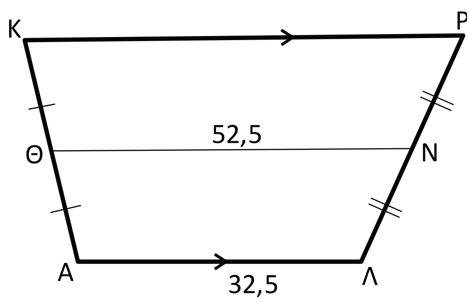
5. Στο σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) και $Μ, Ν$ μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΒΜΝΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



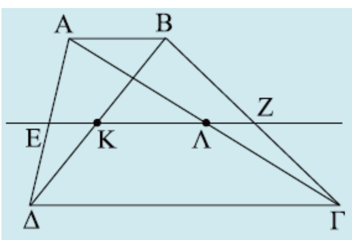
6. Να υπολογίσετε το μήκος του $ΘΣ$ στο πιο κάτω σχήμα.



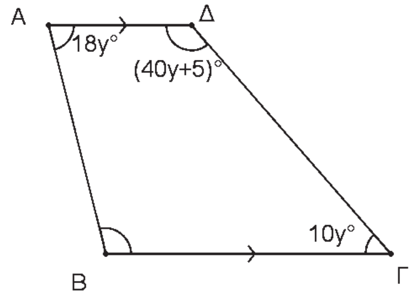
7. Να υπολογίσετε το μήκος του $ΚΡ$ στο πιο κάτω σχήμα.



8. Να δείξετε ότι η διάμεσος $ΕΖ$ τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ διέρχεται από τα μέσα $Κ$ και $Λ$ των διαγωνίων του και το τμήμα $ΚΛ$ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του (δηλαδή ότι $ΚΛ =\parallel \frac{ΔΓ-ΑΒ}{2}$).

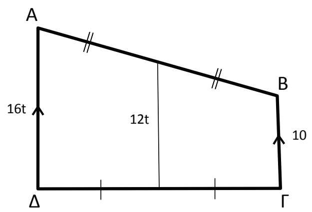


9. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ στο πιο κάτω σχήμα.

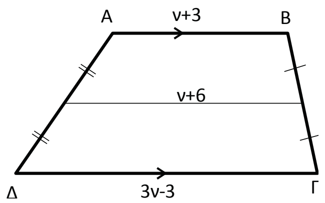


10. Να υπολογίσετε το μήκος των διαμέσων των τραπεζίων στα πιο κάτω σχήματα.

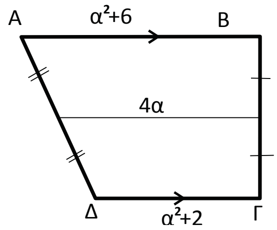
(α).



(β).



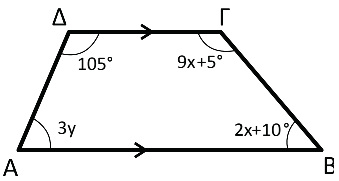
(γ).



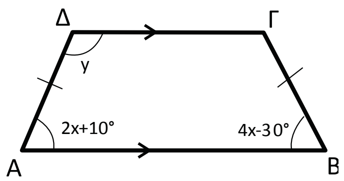
11. Δίνεται το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Τα $Ε, Ζ, Θ$ και $Η$ είναι τα μέσα των $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ$ και $ΓΔ$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.

12. Να υπολογίσετε τα x, y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

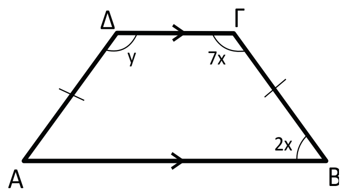
(α).



(β).

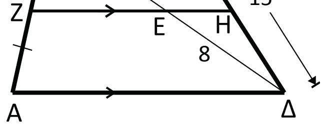


(γ).

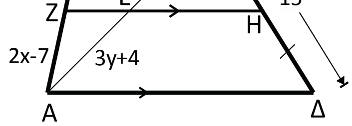


13. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ, y στα πιο κάτω σχήματα.

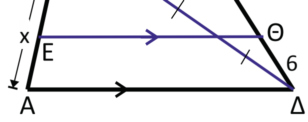
(α)



(β)



(γ)



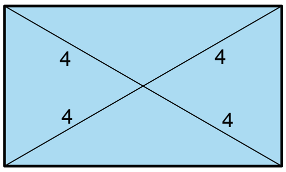
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι

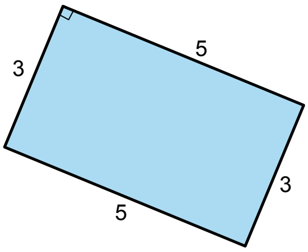
   i) Ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα,

   Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

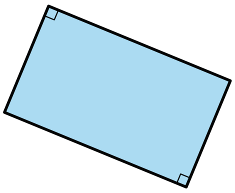
(α)



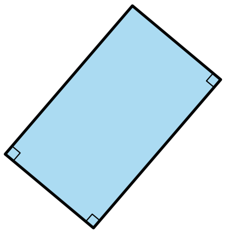
(β)



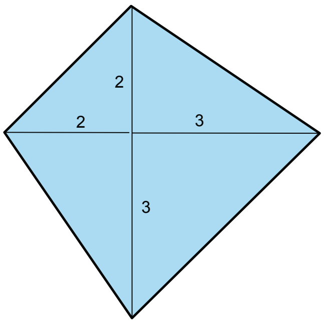
(γ)



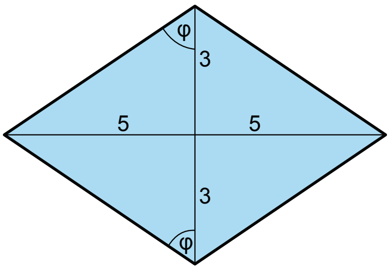
(δ)



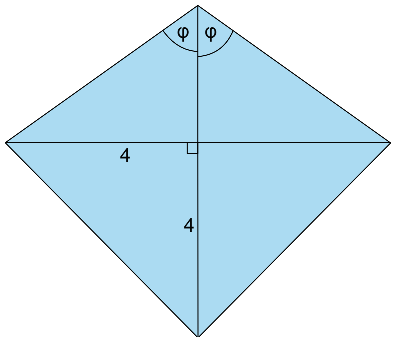
(ε)



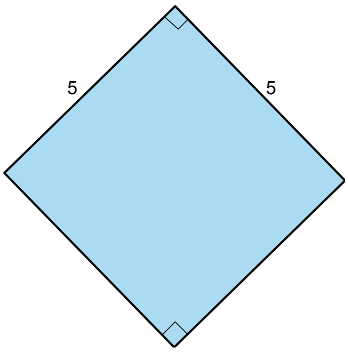
(στ)



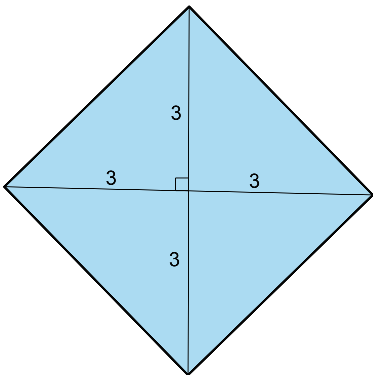
(ζ)



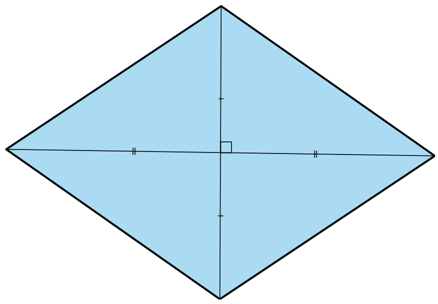
(η)



(θ)



(ι)



2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β):

στήλη (Α) τετράπλευρα	**στήλη (Β)** ιδιότητες
· ορθογώνιο παραλληλόγραμμο · τραπέζιο · ρόμβος	· Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες · Οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται κάθετα · Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες · Το άθροισμα των γωνιών του είναι 400° · Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

3. Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα πιο κάτω σχήματα από τις διαγώνιές τους ;

   i) Ορθογώνιο, ii) Ρόμβος, iii) Τετράγωνο.

4. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι

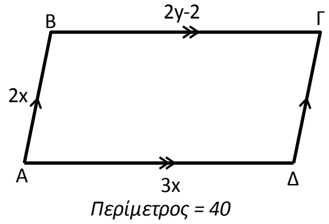
   i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος

5. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση.

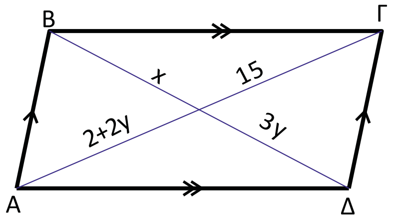
6. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στις προεκτάσεις της $ΒΓ$ παίρνουμε τα σημεία $Ε, Ζ$ έτσι ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές.

7. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Να υπολογίσετε το x και y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

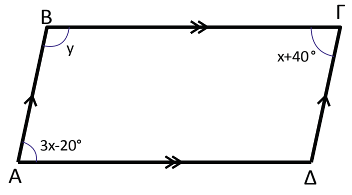
(α).



(β).

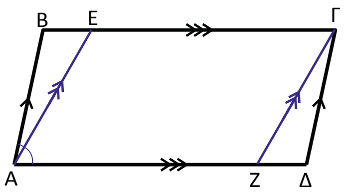


(γ).

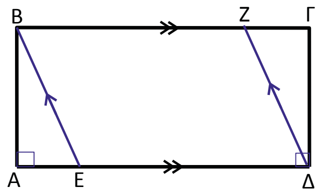


8. Να ονομάσετε τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται στα πιο κάτω σχήματα.

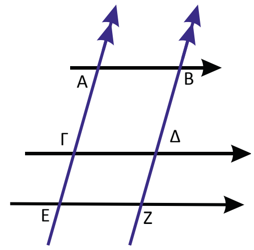
(α).



(β).

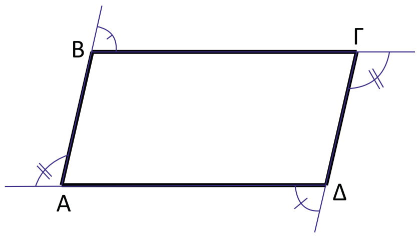


(γ).

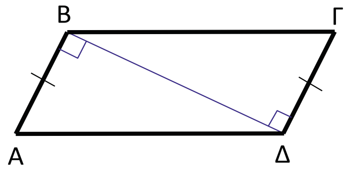


9. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

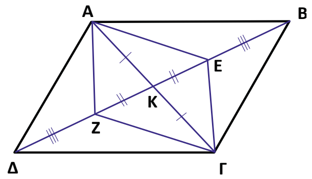
(α)



(β)



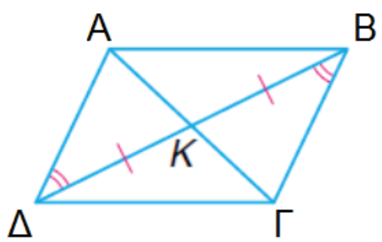
(γ)



10. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.

11. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

12. Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, $ΔΚ = ΚΒ$ και $Κ\hat{Δ}Α = Κ\hat{Β}Γ$. Να δώσετε επαρκή επεξήγηση γιατί ισχύει το καθένα από τα πιο κάτω.



(α) $Α\hat{Κ}Δ = Β\hat{Κ}Γ$

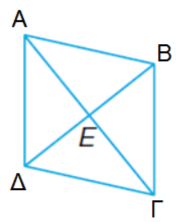
(β) Τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΚΓ$ είναι ίσα

(γ) $ΑΔ = ΒΓ$

(δ) $ΑΔ \parallel ΒΓ$

(ε) Το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο

13. Στον διπλανό ρόμβο $ΑΒΓΔ$:

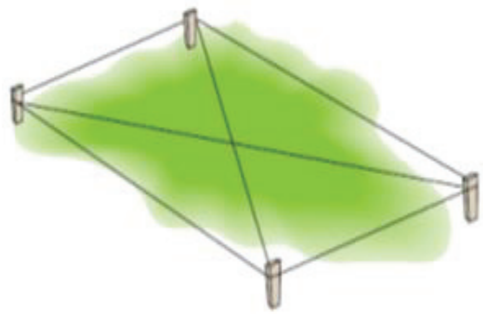


(α) Να αναφέρετε το είδος του τριγώνου $ΑΒΓ$ ως προς τις πλευρές.

(β) Να αναφέρετε το είδος του τριγώνου $ΑΕΔ$ ως προς τις γωνίες.

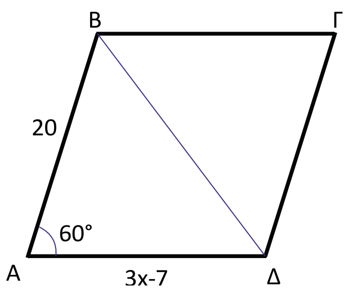
(γ) Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΒΕΓ$ είναι ίσα.

14. Σε ένα Γυμνάσιο ο εργολάβος θέλει να χαράξει τις γραμμές του γηπέδου ποδοσφαίρου σε σχήμα ορθογωνίου. Χρησιμοποίησε σχοινί και τέσσερις σφήνες, όπως στο διπλανό σχήμα. Φρόντισε οι δύο απέναντι μεγάλες πλευρές του τετραπλεύρου που σχημάτισε να είναι ίσες, το ίδιο και οι δύο μικρές απέναντι πλευρές να είναι ίσες, καθώς και οι διαγώνιοί του να είναι ίσες. Να εξηγήσετε, γιατί είναι σίγουρος ότι σχημάτισε ορθογώνιο.

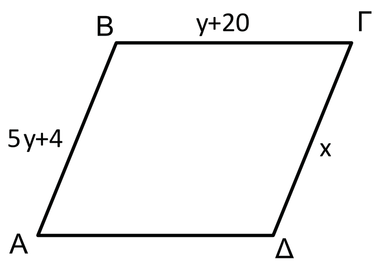


15. Θεωρούμε ρόμβο $ΑΒΓΔ$. Να υπολογίσετε τα x και y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

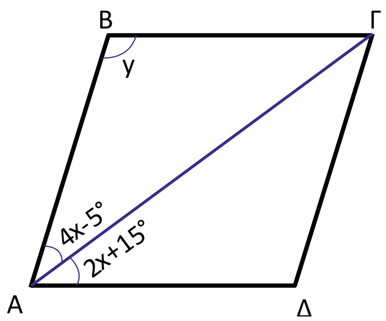
(α).



(β).



(γ).



16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90°$, $\hat{Β} = 30°$ και $ΒΓ = 10cm$. Να φέρετε τη διάμεσο $ΑΜ$ και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΔΓ$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε την περίμετρό του.

17. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και $Ε$ είναι το μέσο του $ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΔΕΓ$ είναι ίσα.

(β) $ΑΕ = ΕΔ$

18. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΔ$ // $ΒΓ$).

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

(β) Αν οι μη παράλληλες πλευρές του $ΑΒ$ και $ΓΔ$ προεκταθούν τέμνονται σε σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

19. Το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο με κέντρο O και το E είναι σημείο του τμήματος $ΔO$. Από το B να φέρετε κάθετη στην AE που τέμνει την AO στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) $BZ = AE$.

(β) $ΓZ = BE$

(γ) $EZ \parallel AΔ$.

20. Αν σε τρίγωνο $ABΓ$ είναι $\hat{B} = 60^o$ και $AB = \frac{BΓ}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ορθογώνιο.

21. Προεκτείνουμε την πλευρά AB παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ κατά τμήμα $BE = BΓ$ και θεωρούμε σημείο Z πάνω στην ημιευθεία $ΔA$ ώστε $ΔZ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{Γ}E = 90^o$.

22. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου $ABΓΔ$ $(AB \parallel ΓΔ)$ τέμνονται στο Ο . Αν E , Z , H , $Θ$ είναι τα μέσα των OA , OB , $OΓ$, $OΔ$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $EZHΘ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

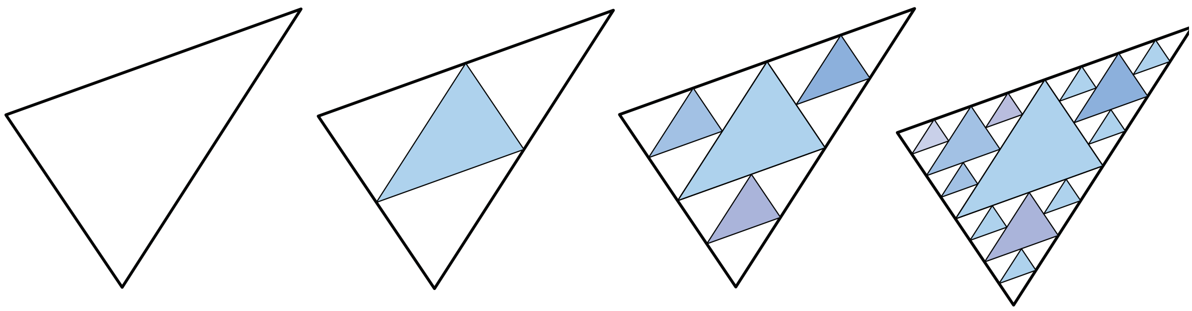
1. Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι $x+5,\ 15-x,\ 2x+10,\ x+15$. Να βρεθεί το x.

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ παίρνουμε σημεία $Δ$, Ε στις προεκτάσεις των πλευρών $ΒΑ, ΓΑ$ αντίστοιχα έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΕ$. Να δείξετε ότι:

(α) $ΒΕ = ΓΔ$

(β) Αν $Μ$ είναι το μέσο της $ΒΓ$ να δείξετε ότι $ΜΔ = Μ$Ε.

3. Για να δημιουργήσετε τη σχεδίαση πιο κάτω, να σκιάσετε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα τρία μέσα των πλευρών ενός τριγώνου. Στη συνέχεια, να επαναλαμβάνετε τη διαδικασία για καθένα από τα ασκίαστα τρίγωνα. Η περίμετρος του αρχικού τριγώνου είναι 1.



Αρχή *1η Φάση* *2η Φάση* *3η Φάση*

(α) Πόση είναι η περίμετρος του σκιασμένου τριγώνου στη φάση 1;

(β) Πόση είναι η συνολική περίμετρος όλων των σκιασμένων τριγώνων στη φάση 2;

(γ) Ποια είναι η συνολική περίμετρος όλων των σκιασμένων τριγώνων στη φάση 3;

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $\left(\hat{Α} = 90^o\right)$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$, τη $ΔΕ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και τη $ΔΖ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Αν η διάμεσος $ΑΜ$ τέμνει τη $ΔΖ$ στο $Η$, να δείξετε οτι:

(α) $Β\widehat{Δ}Ε = \hat{Γ}$.

(β) τα τρίγωνα $ΑΗΖ$ και $ΒΔΕ$ είναι ίσα .

(γ) το τετράπλευρο $ΒΕΖΗ$ είναι παραλληλόγραμμο .

(δ) $ΑΔ = ΒΗ$

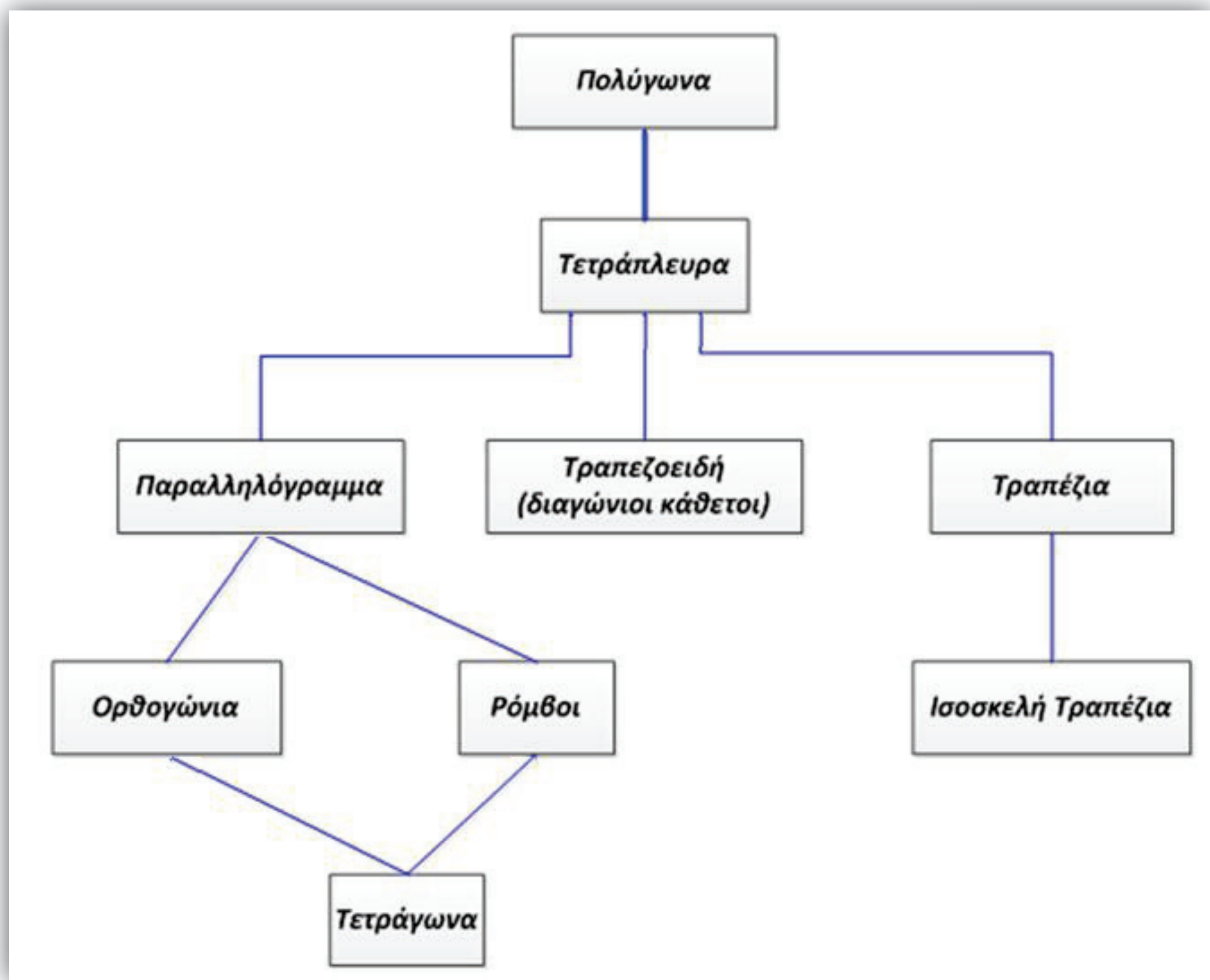
5. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο ($Α = 90^o$) με $\hat{Γ} = 30^o$.Φέρουμε το ύψος $ΑΔ$ και τη διάμεσο $ΑΜ$. Φέρουμε το κάθετο τμήμα $ΓΕ$ προς την ευθεία $ΑΜ$. Να δείξετε ότι:

(α) $ΓΕ = ΕΔ = ΔΑ$

(β) η $ΔΕ$ είναι παράλληλη προς $ΑΓ$.

6. Αν Ο κέντρο του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$ και $ε$ ευθεία που διέρχεται από το σημείο $Ο$ και τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ε$ και τη $ΓΔ$ στο $Ζ$. Να δείξετε ότι το $Ο$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $ΕΖ$.

7. Μια ταξινόμηση των τετραπλεύρων είναι αυτή που φαίνεται διαγραμματικά πιο κάτω. Να εκφράσετε την πιο κάτω ταξινόμηση με Βέννειο Διάγραμμα.



Προτεινόμενη βιβλιογραφία:

«ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ,Ο.Ε.Δ.Β.-ΑΘΗΝΑ. Σελ.118-120