ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου

Β΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά
Γ΄ Γυμνασίου, Τεύχος Β΄

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Έλληνα Αγγέλα
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Τιμοθέου Σάββας
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Γλωσσική επιμέλεια: Χριστόφια – Παλάτου Μαριάννα

Συντονισμός έκδοσης: Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2012
Εκτύπωση: Lithoweb Ltd

ISBN: 978-9963-0-4653-9

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

Πρόλογος

Με ιδιαίτερη χαρά προλογίζω το δεύτερο τεύχος των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου. Τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών βρίσκονται στον τρίτο χρόνο εφαρμογής τους και κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά επεκτάθηκαν και καλύπτουν από την Α΄ μέχρι και τη Γ΄ Γυμνασίου.

Όλες οι εκδόσεις των τελευταίων δύο χρόνων, για τα Μαθηματικά Α΄, Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου είναι δοκιμαστικές και βρίσκονται υπό συνεχή αξιολόγηση, διαμόρφωση και βελτίωση στη βάση ανατροφοδότησης και γενικά παρατηρήσεων που προέρχονται και από τη βάση, τους μάχιμους καθηγητές των Μαθηματικών.

Όλο το υλικό που παράγεται για το μάθημα των Μαθηματικών, όπως και το παρόν δεύτερο τεύχος των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, αποσκοπεί στη βοήθεια τόσο των μαθητών όσο και των καθηγητών, στην πορεία τους μέσα από τα Νέα Αναλυτικά Προγράμματα, με στόχο το καλύτερο αποτέλεσμα. Είναι εμποτισμένο με τη φιλοσοφία των Νέων Αναλυτικών Προγραμμάτων και προσηλωμένο στην προαγωγή και ανάδειξη των βασικών δεξιοτήτων των μαθητών μας, το οποίο αποτελεί πρώτιστο μέλημά μας.

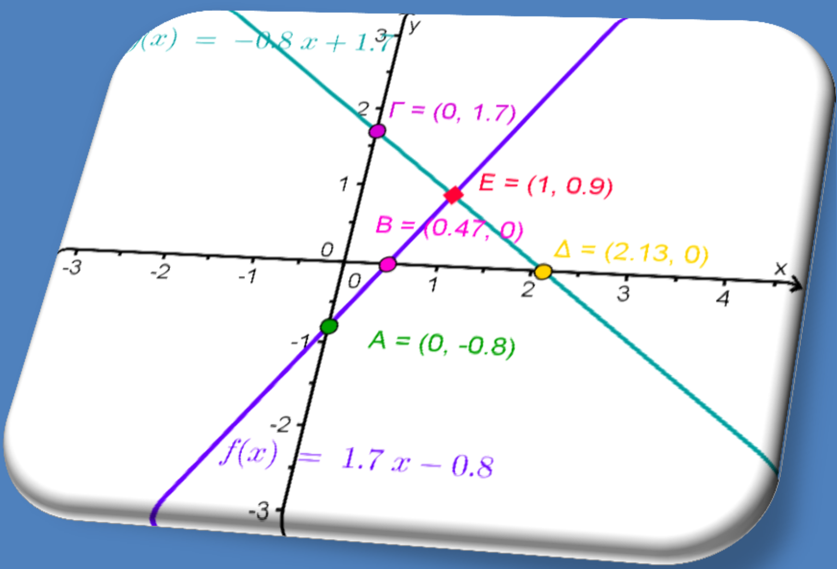
Η προσπάθεια συνεχίζεται και οι προοπτικές είναι λαμπρές. Ευχαριστώ θερμά όλους τους συντελεστές της παρούσας έκδοσης.

Δρ Ζήνα Πουλλή
Διευθύντρια Μέσης Εκπαίδευσης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	Σελίδες

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Ευθεία
Γραμμικά Συστήματα



Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γραμμικά Συστήματα
Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους

Διερεύνηση

- Ένας επιχειρηματίας χρειάζεται να ενοικιάσει μια εξειδικευμένη συσκευή και αποτάθηκε σε δύο εταιρείες, για να πάρει προσφορές.

  - *Εταιρεία Α*
    Ζητά πάγιο ποσό €600 την εβδομάδα και επιπλέον €20 για κάθε ώρα χρήσης της συσκευής.

    Με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες να συμπληρώσετε τον πίνακα:

ώρες χρήσης (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
εβδομαδιαίο κόστος (y)											

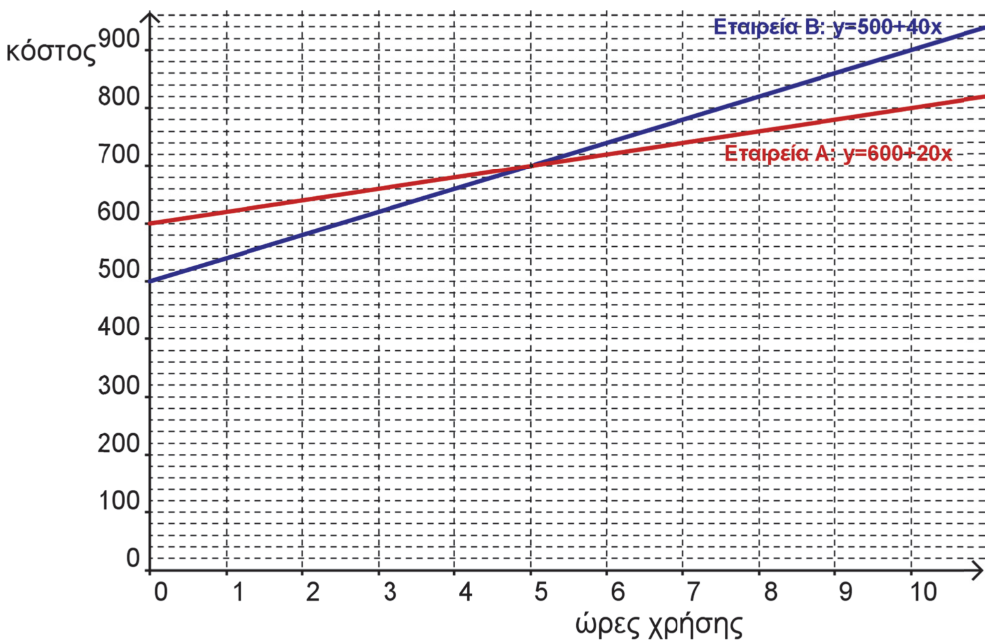
  - *Εταιρεία Β*
    Ζητά πάγιο ποσό €500 την εβδομάδα και επιπλέον €40 για κάθε ώρα χρήσης της συσκευής.

    Με βάση τις πιο πάνω πληροφορίες να συμπληρώσετε τον πίνακα:

ώρες χρήσης (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
εβδομαδιαίο κόστος (y)											

Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει το εβδομαδιαίο κόστος χρήσης της συσκευής σύμφωνα με τις προσφορές και από τις δύο εταιρείες.

Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση ή τους πιο πάνω πίνακες, να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν:



(α)Αν ο επιχειρηματίας χρησιμοποιεί τη συσκευή 2 ώρες την εβδομάδα πόσα θα πληρώνει την εταιρεία A και πόσα την εταιρεία B;

(β)Αν ο επιχειρηματίας χρησιμοποιεί τη συσκευή 9 ώρες την εβδομάδα, πόσα θα πληρώνει την εταιρεία A και πόσα την εταιρεία B;

(γ)Πόσες ώρες την εβδομάδα πρέπει να χρησιμοποιεί τη συσκευή ώστε το κόστος να είναι το ίδιο, σύμφωνα με τις προσφορές των δυο εταιρειών; Πόσο θα είναι το κόστος στην περίπτωση αυτή;

Μαθαίνω

- Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y (π.χ. $y = 20x + 600$ και $y = 40x + 500$) και βρίσκουμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι επιλύουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y**.

- **Λύση** γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος τιμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του.

  π.χ.

  Η λύση του γραμμικού συστήματος $\left.\begin{matrix} y = 20x + 600 \\ y = 40x + 500 \end{matrix}\right\}$ *είναι το ζεύγος* $(5, 700)$ *γιατί και οι δύο εξισώσεις του συστήματος επαληθεύονται, αφού*

  $700 = 20 \cdot 5 + 600$

  και $700 = 40 \cdot 5 + 500$.

- Για τη **γραφική λύση** ενός γραμμικού συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:

  ✓ Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που αντιστοιχούν στις δύο γραμμικές εξισώσεις.

  (α) Εάν οι ευθείες τέμνονται τότε προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους (x, y). Το ζεύγος (x, y) είναι η λύση του συστήματος.

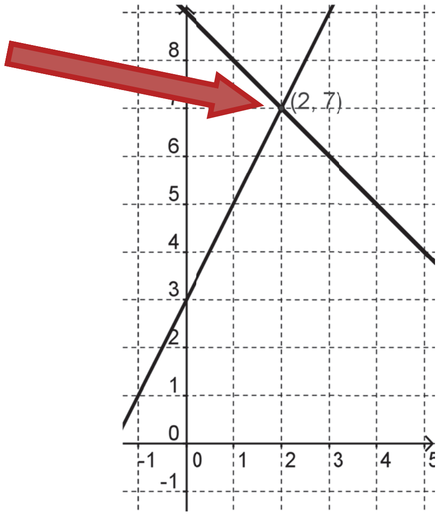
  (β) Εάν οι ευθείες είναι παράλληλες (δεν τέμνονται) τότε το σύστημα είναι αδύνατο (το σύστημα δεν έχει λύση).

  (γ) Εάν οι ευθείες ταυτίζονται τότε όλα τα σημεία τους είναι κοινά και οι συντεταγμένες των σημείων είναι λύσεις του συστήματος. Το σύστημα δηλαδή, έχει άπειρες λύσεις.

π.χ.

Για το σύστημα: $\left.\begin{matrix} y = 2x + 3 \\ x + y = 9 \end{matrix}\right\}$

κατασκευάζουμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x + 3$ *και* $\varepsilon_2 : y = 9 - x$.



Ακολούθως βρίσκουμε το σημείο τομής τους που είναι το $(2{,}7)$.

Η λύση του συστήματος είναι η $x = 2,\ y = 7$.

Για την **αλγεβρική επίλυση** ενός γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους (x, y) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο της αντικατάστασης**.

π.χ.

Για να λύσουμε το σύστημα $\begin{matrix} y - 2x = 1 \\ x + y = 7 \end{matrix}$ *, εργαζόμαστε ως εξής:*

Βήματα	
Λύνουμε τη μια από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς τον ένα άγνωστο.	*Λύνουμε την* $y - 2x = 1$ *ως προς* y *και έχουμε την* $y = 2x + 1$.
Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.	*Αντικαθιστούμε το* $2x + 1$ *στη θέση του* y *στην εξίσωση* $x + y = 7$ *και έχουμε:* $x + (2x + 1) = 7$ $x + 2x + 1 = 7$ $\Rightarrow 3x + 1 = 7$ $\Rightarrow 3x = 7 - 1$ $\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$
Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε σε μια από τις δύο αρχικές ή σε μια ισοδύναμή τους και βρίσκουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.	*Αντικαθιστούμε το* $x = 2$ *στην εξίσωση* $y = 2x + 1$ *και έχουμε:* $y = 2 \cdot 2 + 1$ $\Rightarrow y = 5$
Η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (x, y) *που βρήκαμε.*	*Άρα η λύση του συστήματος είναι* $x = 2$ *και* $y = 5$ *δηλαδή το ζεύγος* $(x, y) = (2{,}5)$.

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι εξισώσεις $\varepsilon_1: y = x + 1$ και $\varepsilon_2: y = -x + 3$.

(α) Ποια από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών είναι λύσεις της εξίσωσης ε_1 και ποια είναι λύσεις της εξίσωσης ε_2;

Α) $x = 0, \ \ y = 1$	Β) $x = 1, \ \ y = 2$
Γ) $x = 2, \ \ y = 1$	Δ) $x = -1, \ \ y = 4$

(β) Ποιο ζεύγος είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων ε_1 και ε_2;

Λύση:

(α) Τα ζεύγη Α και Β είναι λύσεις της ε_1, γιατί την επαληθεύουν, δηλ. $1 = 0 + 1$ και $2 = 1 + 1$.
Τα ζεύγη Β, Γ και Δ είναι λύσεις της ε_2, γιατί την επαληθεύουν, δηλ. $2 = -1 + 3$, $1 = -2 + 3$ και $4 = -(-1) + 3$.

(β) Το ζεύγος Β είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων ε_1 και ε_2, γιατί επαληθεύει και τις δύο.

2. Ο Χριστόφορος και ο Άρης έχουν μαζί €30. Αν ο Χριστόφορος έχει τα διπλάσια χρήματα από τον Άρη, να βρείτε πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Λύση:

Συμβολίζουμε με x τα χρήματα που έχει ο Χριστόφορος και y τα χρήματα που έχει ο Άρης.
Τότε:

$x + y = 30$

και $x = 2y$

Επειδή η δεύτερη εξίσωση είναι λυμένη ως προς x, αντικαθιστούμε το $2y$ στη θέση του x στην εξίσωση $x + y = 30$ και έχουμε:

$$2y + y = 30$$
$$\Rightarrow 3y = 30$$
$$\Rightarrow y = 10$$

Αντικαθιστούμε το $y = 10$ στην εξίσωση $x = 2y$ και έχουμε:

$$x = 2 \cdot 10$$
$$\Rightarrow x = 20$$

Άρα, ο Χριστόφορος έχει €20 και ο Άρης €10.

3. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

(α) $2x - 3y = 3$
$x + 3y = 6$

(β) $3x + 2y = 5$
$x - 3y = 9$

Λύση:

Εκτός από τη μέθοδο της αντικατάστασης για την επίλυση των πιο πάνω συστημάτων μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

(α)

$$\begin{array}{r} 2x - \cancel{3y} = 3 \\ x + \cancel{3y} = 6 \quad + \\ \hline 3x = 9 \\ \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του y στις δύο εξισώσεις του συστήματος είναι αντίθετοι. Άρα προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, προκύπτει μια νέα εξίσωση με άγνωστο μόνο το x. Έτσι βρίσκουμε εύκολα την τιμή του x. (*)

Αντικαθιστούμε το $x = 3$ στην εξίσωση $x + 3y = 6$ και έχουμε:

$3 + 3y = 6 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $x = 3$ και $y = 1$ δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3,1)$.

(β)

$$\begin{array}{r|r} 3x + 2y = 5 & 1 \\ x - 3y = 9 & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \cancel{3x} + 2y = 5 \\ -\cancel{3x} + 9y = -27 \quad + \\ \hline 11y = -22 \\ \Rightarrow y = -2 \end{array}$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση επί 1 (δηλ. παραμένει ως έχει) και τη δεύτερη επί -3, για να προκύψει ισοδύναμο σύστημα με τους συντελεστές του x στις δύο εξισώσεις να είναι αντίθετοι. Στη συνέχεια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με το σύστημα (α). (*)

Αντικαθιστούμε το $y = -2$ στην εξίσωση $x - 3y = 9$ και έχουμε:

$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 3$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι $x = 3$ και $y = -2$ δηλαδή το ζεύγος $(x, y) = (3, -2)$.

(*) Η τεχνική που εφαρμόστηκε για την επίλυση των πιο πάνω συστημάτων ονομάζεται ***μέθοδος των αντίθετων συντελεστών***.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο το ζεύγος αριθμών $x = 3,\ y = 2$ είναι η λύση του συστήματος:

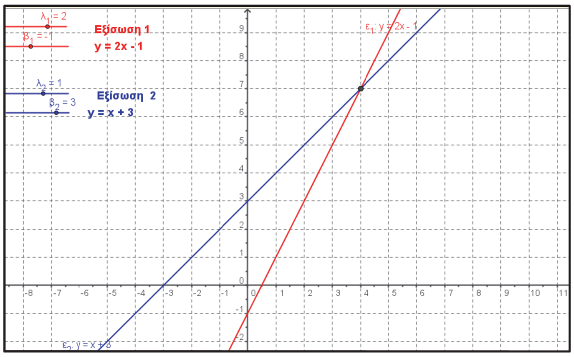
$$\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x-2y=0 \end{array}\right\}$$

2. Ποια από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών είναι η λύση του συστήματος: $\left.\begin{array}{r} y=-3x+6 \\ x-2y=-5 \end{array}\right\}$

   Α) $x = 3, y = 1$ Β) $x = 3, y = 4$ Γ) $x = 1, y = 3$ Δ) $x = -1, y = 9$

3. **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* **“CEn6_Sistimata.ggb”**.

   (α) Να βρείτε γραφικά τη λύση των πιο κάτω συστημάτων με τη βοήθεια του υπολογιστή μετακινώντας τους δρομείς ώστε να δημιουργήσετε τις πιο κάτω εξισώσεις.



   Α) $\left.\begin{array}{r} y=2x-1 \\ y=x+3 \end{array}\right\}$ Β) $\left.\begin{array}{r} y=3x-1 \\ y=x+1 \end{array}\right\}$ Γ) $\left.\begin{array}{r} y=3x-1 \\ y=3x+3 \end{array}\right\}$ Δ) $\left.\begin{array}{r} y=3x+3 \\ y=3x+3 \end{array}\right\}$

   (β) Να γράψετε το πλήθος των λύσεων του καθενός από τα πιο πάνω συστήματα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα αυτά.

4. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

   (α) $\begin{array}{l} y = 3 + x \\ x + 2y = 6 \end{array}$ (β) $\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{array}$ (γ) $\begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}$

5. Ο Στέφανος και η Μαρίλια έχουν συνολικά €120. Αν ο Στέφανος δώσει στη Μαρίλια €10, τότε θα έχουν τα ίδια χρήματα. Να βρείτε πόσα χρήματα είχε αρχικά ο καθένας.

6. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά, τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 και 6 ατόμων. Αν οι σκηνές είναι όλες γεμάτες, να υπολογίσετε πόσες είναι οι σκηνές των 4 και πόσες των 6 ατόμων.

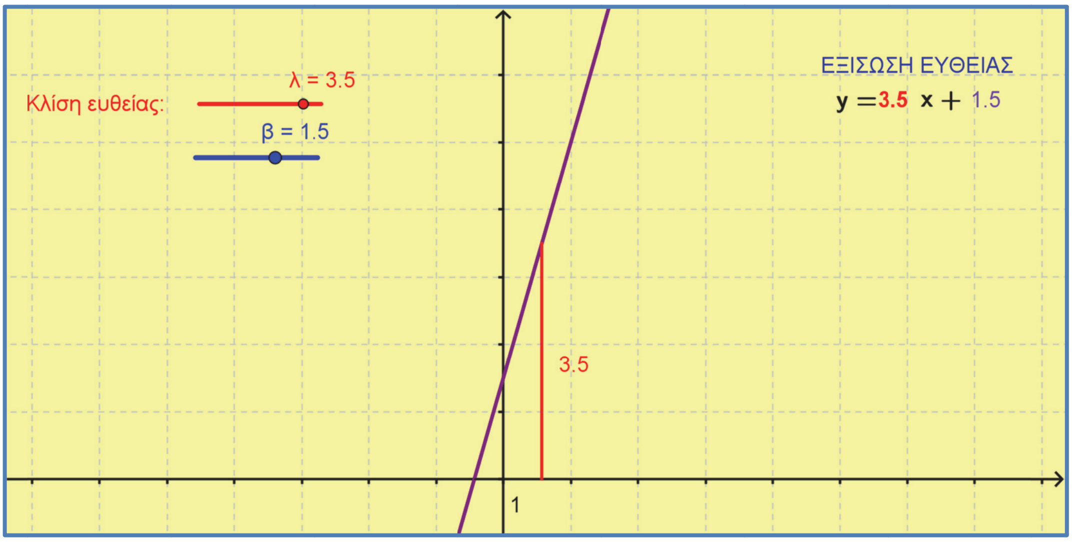
7. Σε μια εκδρομή πήγαν συνολικά 60 παιδιά, αγόρια και κορίτσια. Τα αγόρια ήταν τριπλάσια από τα κορίτσια. Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια.

ΕΥΘΕΙΑ

Συντελεστής Διεύθυνσης (Κλίση) Ευθείας

Διερεύνηση

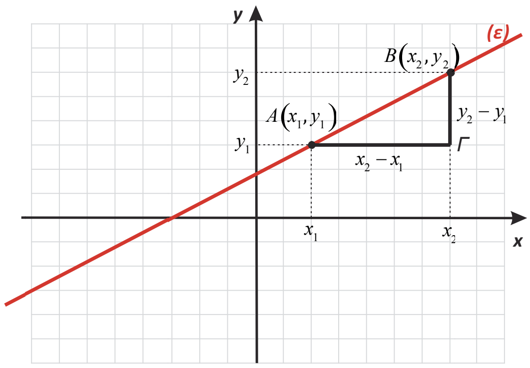
- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* [**“CEn6_Klisi_Eftheias.ggb”.**]



  - Να μετακινήσετε τους δρομείς λ και β και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Μαθαίνω

- Αν (ε) είναι μια ευθεία και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της, τότε η κλίση της ευθείας ορίζεται ως **ο λόγος της κατακόρυφης μεταβολής $\boldsymbol{\Delta y}$ προς την οριζόντια μεταβολή $\boldsymbol{\Delta x}$** από το σημείο A στο σημείο B της ευθείας.
  Η κλίση ονομάζεται και συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) και συμβολίζεται με λ.



Δηλαδή η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι ίση με $\boldsymbol{\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.

- Κάθε ευθεία (ε) με εξίσωση $y = ax + \beta$ έχει κλίση λ ίση με a, δηλαδή $\boldsymbol{\lambda = a}$.

   <u>Απόδειξη:</u>
   Παίρνουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ πάνω στην ευθεία $y = ax + \beta$. Οι συντεταγμένες των δύο σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
   Άρα έχουμε:

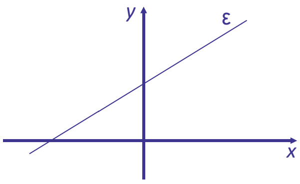
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + \beta \\ y_2 &= ax_2 + \beta \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} {\color{red}\beta} &= y_1 - ax_1 \\ y_2 &= ax_2 + {\color{red}\beta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$y_2 = ax_2 + {\color{red}y_1 - ax_1} \Rightarrow y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda$$

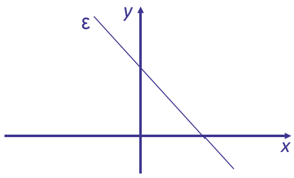
- Αν η εξίσωση ευθείας είναι σε κανονική μορφή $Ax + By + \Gamma = 0,\ \ B \neq 0$ τότε η κλίση λ της ευθείας είναι ίση με $-\frac{A}{B}$, δηλαδή $\lambda = -\frac{A}{B}$.
   Απόδειξη: Αν $Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \Rightarrow \lambda = -\frac{A}{B},\ \ B \neq 0.$

Παρατήρηση

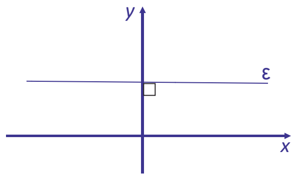
- Η γραφική παράσταση της $x = a$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των x στο σημείο $(a, 0)$. Η κλίση της ευθείας με εξίσωση $x = a$ δεν ορίζεται.
- Γενικά έχουμε:



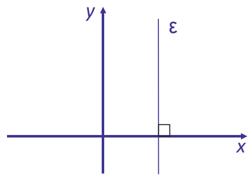
$\lambda > 0$



$\lambda < 0$

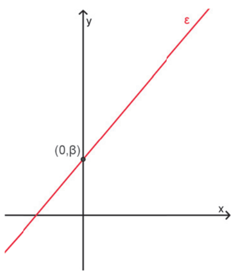


$\lambda = 0$

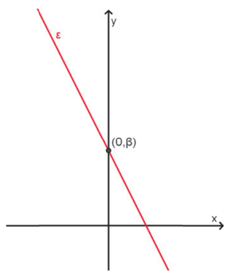


Η κλίση της ευθείας (ε) δεν ορίζεται.

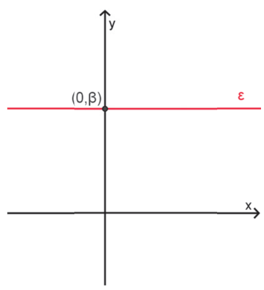
- Κάθε ευθεία $y = \lambda x + \beta$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, \beta)$.



$y = \lambda x + \beta$
$\lambda > 0$



$y = \lambda x + \beta$
$\lambda < 0$



$y = \beta$
$\lambda = 0$

- Αν $\beta = 0$, τότε η εξίσωση της ευθείας παίρνει τη μορφή $y = \lambda x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(-2,-7)$.

Λύση:

Α΄ τρόπος

Τα δύο σημεία πρέπει να επαληθεύουν το γενικό τύπο $y = \alpha x + \beta$ της ευθείας, δηλαδή:

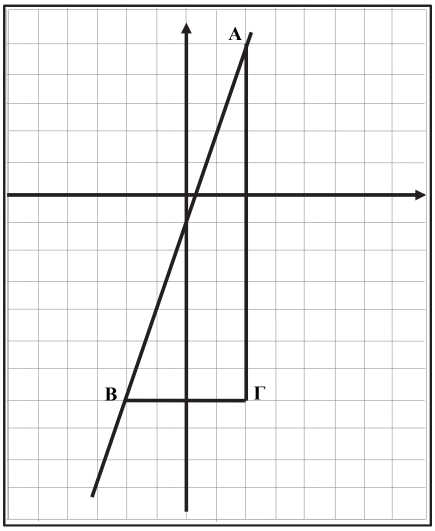
Για $A(2,5) \Rightarrow\ 5 = 2\alpha + \beta$ (1)

Για $B(-2,-7) \Rightarrow\ -7 = -2\alpha + \beta$ (2)

Λύουμε το σύστημα των (1) και (2) $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5 & (1) \\ -2\alpha + \beta = -7 & (2) \end{cases}$ και βρίσκουμε $\alpha = 3$ και $\beta = -1$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι $y = 3x - 1$.

Β΄ τρόπος



Τα δύο σημεία πρέπει να επαληθεύουν το γενικό τύπο $y = \alpha x + \beta$ της ευθείας.

Γνωρίζουμε ότι η παράμετρος α ισούται με την κλίση λ. Άρα υπολογίζουμε αρχικά την τιμή της κλίσης λ.

$$\lambda = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-(-7)}{2-(-2)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\Rightarrow \lambda = 3$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση παίρνει τη μορφή: $y = 3x + \beta$.

Το σημείο $\mathrm{A}(2,5)$ ανήκει στην ευθεία, οπότε: $5 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -1$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι $y = 3x - 1$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0,-3)$ και έχει κλίση 2.

Λύση

Η εξίσωση έχει τη μορφή $y = \lambda x + \beta$ και $\lambda = 2$.

Άρα η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = 2x + \beta$.

Η ευθεία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0,-3)$, οπότε το $\beta = -3$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x - 3$.

Δραστηριότητες

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε μια εξίσωση ευθείας από τη στήλη A με την κλίση της στη στήλη B:

	A
(α)	$y = 3x + 1$
(β)	$y = \frac{1}{3}x - 1$
(γ)	$y = -3x + 1$
(δ)	$y = -\frac{1}{3}x - 1$
(ε)	$y = 2x - 1$
(στ)	$y = 3x$
(ζ)	$x + y = 5$
(η)	$y = -4$
(θ)	$x = 5$

	B
(i)	$\lambda = 2$
(ii)	$\lambda = 0$
(iii)	$\lambda = -1$
(iv)	$\lambda = 4$
(v)	$\lambda = -3$
(vi)	$\lambda = \frac{1}{3}$
(vii)	$\lambda = -\frac{1}{3}$
(viii)	$\lambda = 5$
(ix)	$\lambda = 3$
(x)	$\Delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota$
(xi)	$\lambda = 1$

2. **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* **“CEn6_ShmeiaEftheias_b.ggb”**

- Να σύρετε τα δύο σημεία έτσι ώστε να ανήκουν στη ευθεία που σας δίνεται.
- Να πατήσετε το κουμπί « ***Νέα Ευθεία***» για να εμφανιστεί άλλη εξίσωση ευθείας.

3. **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο* **“CEn6_EvreshEftheias_b.ggb”**

- Να γράψετε στο πεδίο εισόδου την εξίσωση της συνάρτησης που περνά από τα σημεία A και B.
- Να επιλέξετε ***«Βοήθεια για εύρεση κλίσης»*** αν θέλετε βοήθεια.
- Να επιλέξετε ***«Εμφάνιση ευθείας»*** για επαλήθευση.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A και B:

(α) $A(3,2)$ και $B(1,-1)$ (β) $A(3,2)$ και $B(\mathbf{1},2)$

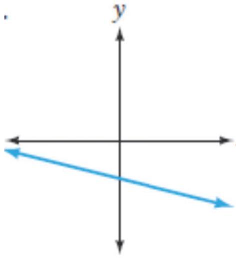
(γ) $A(3,2)$ και $B(3,-1)$ (δ) $A(3,2)$ και $B(0,0)$

5. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση με τη γραφική της παράσταση.

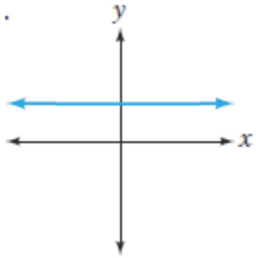
(α) $y = -2x + 4$ (β) $y = 2x - 4$ (γ) $y = 2$

(δ) $y = \frac{1}{2}x + 4$ (ε) $2x + 3y = 0$ (στ) $y = -\frac{1}{4}x - 2$

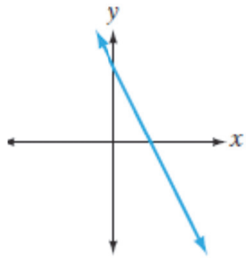
Α)



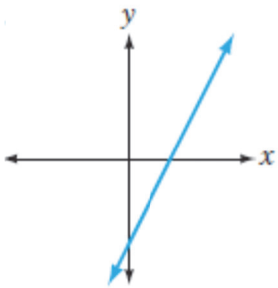
Β)



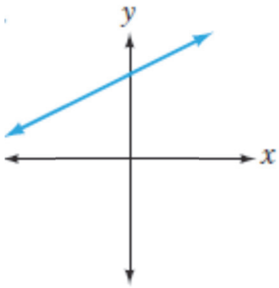
Γ)



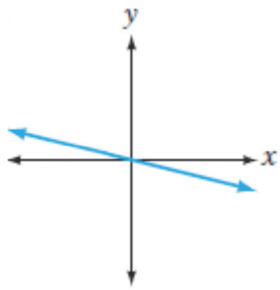
Δ)



Ε)



ΣΤ)



6. Ο μισθός ενός εργάτη είναι €150, όταν εργάζεται 40 ώρες τη βδομάδα. Να κατασκευάσετε γραφική παράσταση που να δείχνει τη σχέση που συνδέει τις ώρες εργασίας με τα χρήματα που κερδίζει ο εργάτης. Από τη γραφική παράσταση να υπολογίσετε:
   (α) το μισθό του για 18 ώρες δουλειάς.
   (β) τις ώρες που εργάστηκε, για να κερδίσει €190.

7. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

	Εξίσωση $y = ax + \beta$	Τιμή του α	Τιμή του β	Κλίση	Τομή ευθείας με άξονα των τεταγμένων y
(α)	$y = 4x$				
(β)	$y = \frac{3}{4}x - 8$				
(γ)	$y = -5x + 2$				
(δ)	$y = -2$				

8. Ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει από αεροπλάνο που βρίσκεται σε ύψος $3000\ m$ από τη γη. Η ταχύτητα με την οποία πέφτει είναι $30\ m/sec$.

   (α) Να εκφράσετε το ύψος που βρίσκεται ο αλεξιπτωτιστής συναρτήσει του χρόνου.
   (β) Να υπολογίσετε σε ποιο ύψος βρίσκεται 1 λεπτό μετά από την πτώση του.

9. Μια άδεια δεξαμενή έχει όγκο $3\ m^3$. Μια αντλία αρχίζει να τη γεμίζει με ρυθμό $15\ λίτρα$ ανά λεπτό. Να εκφράσετε τον όγκο V του νερού στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου t και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή. $(1\ m^3 = 1000\ lt)$

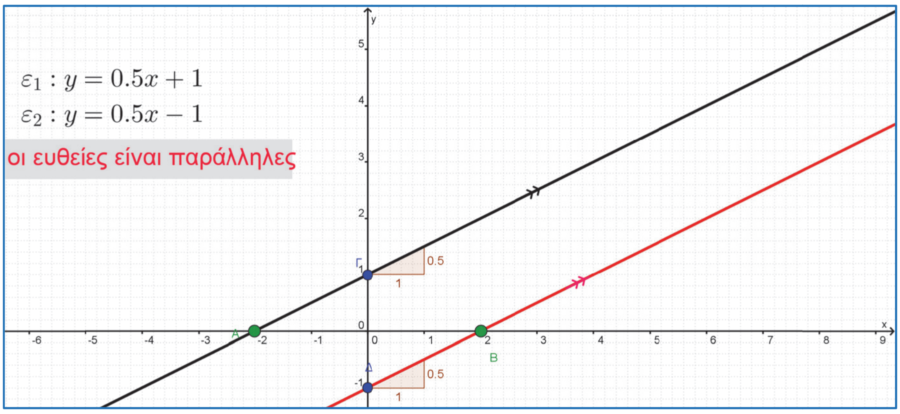
10. Σε μια δεξαμενή, χωρητικότητας $4000\ λίτρων$, υπάρχουν $600\ λίτρα$ βενζίνης. Ένα βυτιοφόρο, που περιέχει $2000\ λίτρα$, αρχίζει να τη γεμίζει. Αν το βυτιοφόρο γεμίζει τη δεξαμενή με ρυθμό $100\ λίτρα\ ανά\ λεπτό$, να βρείτε:

    (α) Την ποσότητα της βενζίνης που μένει στο βυτιοφόρο μετά από χρόνο t.
    (β) Την ποσότητα της βενζίνης που περιέχει η δεξαμενή μετά από χρόνο t.
    (γ) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών και να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν ίσες ποσότητες βενζίνης.

Συνθήκη Παραλληλίας Δύο Ευθειών

Εξερεύνηση

- **Τεχνολογία:** Να ανοίξετε το αρχείο «CEn6_SynthikhParall_b.ggb»
  - Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο και να μετακινήσετε τα σημεία $A, B, Γ$ και $Δ$ ώστε οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ να είναι παράλληλες.
  - Τι παρατηρείτε για τη σχέση των κλίσεών τους.



Μαθαίνω

- Για τις ευθείες $ε_1: y = λ_1\, x + β_1$ και $ε_2: y = λ_2\, x + β_2$ ισχύει:

  - Αν οι ευθείες έχουν ίσες κλίσεις ($λ_1 = λ_2$) και διαφορετικές σταθερές $β_1$ και $β_2$ τότε οι ευθείες είναι **παράλληλες**. Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση.

$$λ_1 = λ_2,\ β_1 \neq β_2 \Leftrightarrow ε_1 \parallel ε_2$$

  - Αν οι ευθείες έχουν ίσες κλίσεις ($λ_1 = λ_2$) και ίσες σταθερές $β_1$ και $β_2$ τότε οι ευθείες **ταυτίζονται**. Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση.

$$λ_1 = λ_2,\ β_1 = β_2 \Leftrightarrow ε_1 \equiv ε_2$$

Ο συμβολισμός $ε_1 \equiv ε_2$ σημαίνει ότι οι δύο ευθείες ταυτίζονται.

<u>Παρατήρηση</u>:

Έστω το σύστημα που δημιουργείται από τις εξισώσεις των ευθειών

$$ε_1: y = λ_1\, x + β_1$$
$$ε_2: y = λ_2\, x + β_2$$

i) Αν $ε_1 \parallel ε_2$, τότε οι ευθείες δεν τέμνονται, άρα το σύστημα των εξισώσεων δεν έχει λύση και ονομάζεται **αδύνατο**.

ii) Αν $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$, τότε οι ευθείες συμπίπτουν. Το σύστημα των εξισώσεων έχει **άπειρες λύσεις**.

- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$ με $\alpha \neq \beta$ είναι παράλληλες διότι είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (τον άξονα των τετμημένων).

Απόδειξη

Έστω οι ευθείες ε_1 και ε_2, με εξισώσεις:

ε_1: $y = \lambda_1 x + \beta_1$

ε_2: $y = \lambda_2 x + \beta_2$

Εξετάζουμε το ενδεχόμενο να υπάρχει κατάλληλη τιμή του x τέτοια ώστε οι αντίστοιχες τιμές του y των σημείων που ανήκουν στις δύο ευθείες να είναι ίσες.

Άρα πρέπει,

$$\lambda_1 x + \beta_1 = \lambda_2 x + \beta_2 \quad \text{ή} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)x = \beta_2 - \beta_1 \qquad (1)$$

- Η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς x και να έχει μόνον μια λύση αν $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται αν και μόνο αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- Οι ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, διότι η εξίσωση (1) γίνεται $0 \cdot x = \beta_2 - \beta_1$ που είναι αδύνατη.

- Οι ευθείες ταυτίζονται αν και μόνον αν ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, διότι η εξίσωση (1) γίνεται $0 \cdot x = 0$ που είναι αόριστη.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = 2x + 4$ και $\varepsilon_2: 6x + 3y = 2$ είναι παράλληλες.

Λύση:

Η ε_1 έχει κλίση $\lambda_1 = 2$.
Η ε_2 έχει κλίση $\lambda_2 = -\frac{6}{3} = -2$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Άρα οι ευθείες δεν είναι παράλληλες.

2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\alpha - 3)x + 3$ και $\varepsilon_2: y = 2x - 1$. Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

Λύση:

Η ε_1 έχει κλίση $\lambda_1 = \alpha - 3$.
Η ε_2 έχει κλίση $\lambda_2 = 2$.
Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \alpha - 3 = 2 \Rightarrow \alpha = 5$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο $A(-1,1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_1: $2x - 3y - 5 = 0$.

Λύση:

Η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ με κλίση $\lambda = \alpha$.

Η ευθεία ε_1: $2x - 3y - 5 = 0$ έχει κλίση $\lambda_1 = \frac{2}{3}$.

Οι ευθείες ε και ε_1 είναι παράλληλες άρα $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$, επομένως $\varepsilon: y = \frac{2}{3}x + \beta$.

Το σημείο $A(-1,1)$ ανήκει στην ευθεία ε, επομένως οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

Αντικαθιστούμε: $x = -1$, $y = 1$ στην $y = \frac{2}{3}x + \beta$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{3}(-1) + \beta \Rightarrow \beta = \frac{5}{3}$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3y = 2x + 5 \Leftrightarrow 2x - 3y + 5 = 0$.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες στις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (α) $\varepsilon_1: 2x - 4y = 4$, $\varepsilon_2: -2x + 4y = 2$

   (β) $\varepsilon_1: y = -2x + \frac{1}{3}$, $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 3$

   (γ) $\varepsilon_1: y = 4$, $\varepsilon_2: y = -2$

   (δ) $\varepsilon_1: 3x + y = 5$, $\varepsilon_2: 6x + 2y = 10$

   (ε) $\varepsilon_1: x = 6$, $\varepsilon_2: x = 2$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_1 σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

   (α) $A(1,2)$, $\varepsilon_1: 3x - 2y - 5 = 0$

   (β) $A(-1,3)$, $\varepsilon_1: 2x + y = 3$

   (γ) $A(2,-2)$, $\varepsilon_1: y = 5$

   (δ) $A(2,-2)$, $\varepsilon_1: x = 0$

   (ε) $A(2,-5)$, $\varepsilon_1: y = 2x - \frac{1}{2}$

3. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η ευθεία $(\alpha - 2)x + 3y = 5$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 7$.

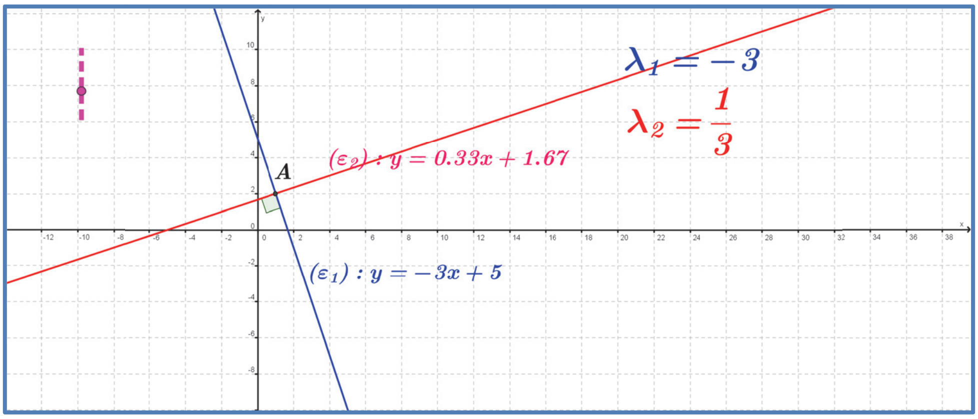
4. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

   Αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Συνθήκη Καθετότητας Δύο Ευθειών

Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το «CEn6_kathetotita_dierevnisi.ggb».



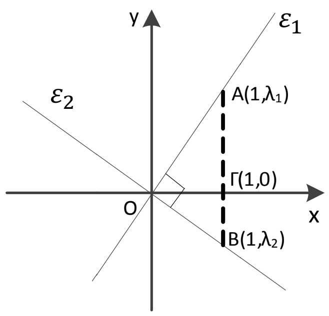
  - Να μετακινήσετε τον δρομέα στα αριστερά και να παρατηρήσετε τις κλίσεις λ_1 και λ_2 των καθέτων ευθειών ε_1 και ε_2 για να βρείτε τη συνθήκη σύμφωνα με την οποία οι δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

Μαθαίνω

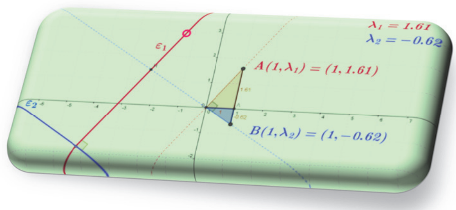
- Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1 \colon y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 \colon y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες τότε οι κλίσεις τους έχουν γινόμενο ίσο με -1, δηλαδή $\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1}$.

Απόδειξη:

Στο σχήμα δίνονται οι κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2, με εξισώσεις $\varepsilon_1\colon\ y = \lambda_1 x$ και $\varepsilon_2\colon\ y = \boldsymbol{\lambda}_2 x$ με $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.



Για την απόδειξη μπορείτε να ανοίξετε το αρχείο : "CEn6_kathetotita_apodeiksh.ggb"



Θεωρούμε τα σημεία $A(1, \lambda_1)$, $B(1, \lambda_2)$ και $\Gamma(1,0)$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AOB ($\hat{O} = 90^o$) $\Rightarrow$ $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$ (1)

Από το τρίγωνο $A\Gamma O$ $\Rightarrow (OA)^2 = 1 + {\lambda_1}^2$ (2)

Από το τρίγωνο $B\Gamma O \Rightarrow (OB)^2 = 1 + {\lambda_2}^2$ (3)

$(AB) = \lambda_1 - \lambda_2$ (4) (επειδή $\lambda_2 < 0$) .

Από τις (2), (3) και (4) η (1) γίνεται $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 1 + {\lambda_1}^2 + 1 + {\lambda_2}^2$

$$\Rightarrow \ {\lambda_1}^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + {\lambda_2}^2 = 1 + {\lambda_1}^2 + 1 + {\lambda_2}^2$$

$$\Rightarrow \ -2\lambda_1\lambda_2 = 2$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1}$$

<u>Σημείωση</u>

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων ($y = \lambda x$). Αυτό δεν επηρεάζει τη γενικότητα της συνθήκης καθετότητας, γιατί ευθείες της μορφής $y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 0$ είναι παράλληλες με αυτές της μορφής $y = \lambda x$.

Παράδειγμα

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο $A(2, -3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y = 2x + 3$.

Λύση:

Η ζητούμενη ευθεία ε έχει εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ με κλίση $\lambda = \alpha$.

Η ευθεία $\varepsilon_1 : y = 2x + 3$ έχει κλίση $\lambda_1 = 2$.

Οι ευθείες ε και ε_1 είναι κάθετες άρα $\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda \cdot 2 = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$, επομένως η ζητούμενη ευθεία παίρνει την μορφή $y = -\frac{1}{2}x + \beta$.

Το σημείο $A(2, -3)$ ανήκει στην ευθεία ε, επομένως οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$-3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = -2$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\varepsilon_1 \colon 4x - 3y = 2$ (β) $\varepsilon_1 \colon 2x + 4y = 3$ (γ) $\varepsilon_1 \colon 4x + 2y = 3$

$\varepsilon_2 \colon 4x + 3y = -7$ $\varepsilon_2 \colon y = \frac{1}{2}x - 7$ $\varepsilon_2 \colon y = \frac{1}{2}x - 7$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $A(3,-1)$ (β) $A(3,-1)$ (γ) $A(3,-1)$

$\varepsilon_1 \colon y = 3x - 1$ $\varepsilon_1 \colon y = 3$ $\varepsilon_1 \colon x = 3$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του α, ώστε η ευθεία $y = (a+1)x - 9$ να είναι κάθετη στην ευθεία $x + 3y = 1$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες στις ακόλουθες περιπτώσεις:

   (α) $\varepsilon_1: x - 3y = 4$ (β) $\varepsilon_1: y = -3x + \frac{1}{3}$ (γ) $\varepsilon_1: y = 5$

   $\varepsilon_2: -x + 3y = 2$ $\varepsilon_2: \frac{1}{3}x - y = +3$ $\varepsilon_2: y = -3$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

   (α) $A(3,2)$ (β) $A(1,3)$

   $\varepsilon_1: y = 3x - 1$ $\varepsilon_1: y = 8$

3. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 1)x$ και $\varepsilon_2 : y = (\alpha - 1)x$ είναι παράλληλες;

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-3,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,2)$.
   (α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.
   (β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
   (γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

5. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

   (α) $\begin{matrix} 3x + 2y = 9 \\ 2x - y = 13 \end{matrix}$ (β) $\begin{matrix} \omega + 5\varphi = 18 \\ 3\omega + 2\varphi = 41 \end{matrix}$

6. Σε ένα βιβλιοπωλείο 2 τετράδια και 1 μολύβι κοστίζουν €10, ενώ 3 τετράδια και 5 μολύβια κοστίζουν €22. Να βρείτε πόσο κοστίζει κάθε τετράδιο και κάθε μολύβι.

7. Μια παρέα 26 ατόμων θα πάνε εκδρομή και θα μεταφερθούν με 8 οχήματα-αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες. Με κάθε αυτοκίνητο μεταφέρονται 4 άτομα, ενώ με κάθε μοτοσικλέτα 2 άτομα. Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα και πόσες μοτοσικλέτες θα χρησιμοποιηθούν.

8. Αν το σύστημα $\begin{matrix} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{matrix}$
   έχει ως λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των αριθμών α και β.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x - y = -1$ και $\lambda x - y = -1$ αντίστοιχα, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (α) Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (β) Να υπολογίσετε την τιμή του λ για την οποία οι ευθείες τέμνονται κάθετα.

   (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ευθείες και τον άξονα των τετμημένων, όταν οι ευθείες τέμνονται κάθετα.

2. Δίνεται το σύστημα:

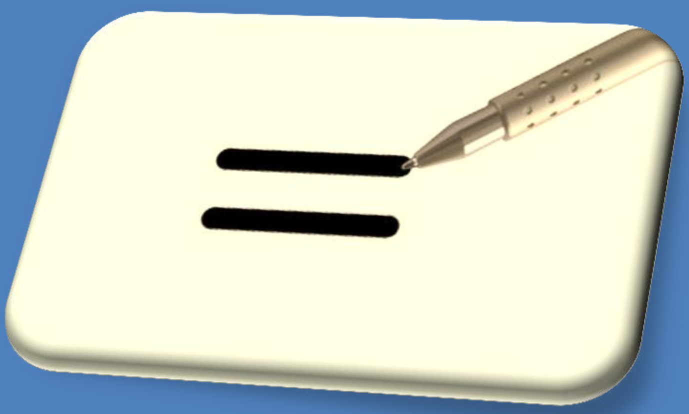
$$\begin{aligned} (2\mu - 3)x + y &= \mu + 4 \\ 5\mu x - 3y &= 3\mu + 2 \end{aligned}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

   Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(10, t)$, $t \in \mathbb{R}$ και $t \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή του t.

3. Αν $A(-2,1)$, $B(-3,-2)$ και $\Gamma(6,0)$ είναι κορυφές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Εξισώσεις Ανωτέρου Βαθμού



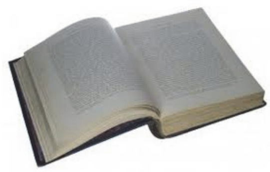
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις Δευτέρου και Ανωτέρου Βαθμού

Διερεύνηση

- Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις από το βιβλίο τους, για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι οι ασκήσεις, τους απάντησε: "Το *γινόμενο των αριθμών των δύο διαδοχικών σελίδων στις οποίες βρίσκονται οι ασκήσεις είναι ίσο με* 90". Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;



Μαθαίνω

- Όταν το γινόμενο δύο αλγεβρικών παραστάσεων ισούται με μηδέν, τότε τουλάχιστον μια από αυτές τις παραστάσεις ισούται με μηδέν και αντίστροφα.

  Δηλαδή $A(x) \cdot B(x) = 0 \iff A(x) = 0$ ή $B(x) = 0$

- Όταν το πηλίκο δύο αλγεβρικών παραστάσεων ισούται με μηδέν, τότε ο αριθμητής του πηλίκου ισούται με μηδέν και ο παρονομαστής είναι διάφορος από το μηδέν και αντίστροφα.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0 \ \ \text{και} \ \ B(x) \neq 0.$$

Σημείωση

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$ *(εξίσωση α' βαθμού) έχει λύση τον αριθμό* $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(x-2)(x+3)=0$ (β) $(2x-1)(x-1)(x+2)=0$

(γ) $(x+a)(x-\beta)=0$ (δ) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

Λύση:

(α) $(x-2)(x+3)=0 \iff x-2=0$ ή $x+3=0$

$\iff x=2$ ή $x=-3$

(β) $(2x-1)(x-1)(x+2)=0 \iff 2x-1=0$ ή $x-1=0$ ή $x+2=0$

$\iff 2x=1$ ή $x=1$ ή $x=-2$

$\iff x=\frac{1}{2}$ ή $x=1$ ή $x=-2$

(γ) $(x+a)(x-\beta)=0 \iff x+a=0$ ή $x-\beta=0$

$\iff x=-a$ ή $x=\beta$

(δ) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 \iff x-\sqrt{2}=0$ ή $x+\sqrt{2}=0$

$\iff x=\sqrt{2}$ ή $x=-\sqrt{2}$ δηλαδή $x=\pm\sqrt{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3x^2+5x=0$ (β) $x^2-4=0$

(γ) $3x^2-6=0$ (δ) $x^2=x$

(ε) $x^3-64x=0$

Λύση:

(α) $3x^2 + 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3x+5) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $(3x+5) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $3x = -5$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = -\dfrac{5}{3}$

(β) $x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 2 = 0$ ή $x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ ή $x = -2$

(γ) $3x^2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3x^2 - 6}{3} = \dfrac{0}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{2}\right) = 0$ ή $\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$

(δ) $x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = 1$

(ε) $x^3 - 64x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 64) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x-8)(x+8) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x - 8 = 0$ ή $x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = 8$ ή $x = -8$

3. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{y+2}{4} = \frac{3y-1}{y-2}$

Λύση:

$\frac{y+2}{4} = \frac{3y-1}{y-2}, \quad y-2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 2$

Θέτουμε **περιορισμούς**

$\Leftrightarrow (y+2)(y-2) = 4(3y-1)$

Εφαρμόζουμε ιδιότητες των αναλογιών.

$\Leftrightarrow (y^2 - 4) = 12y - 4$

$\Leftrightarrow y^2 - 4 - 12y + 4 = 0$

Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$\Leftrightarrow y^2 - 12y = 0$

$\Leftrightarrow y(y - 12) = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = 0$ ή $y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = 0$ ή $y = 12$

Ελέγχουμε κατά πόσο οι λύσεις που βρήκαμε τηρούν τους περιορισμούς.

Οι λύσεις είναι δεκτές.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.

(α) Η εξίσωση $3x + 2 = 5$ έχει λύση $x = 1$.

(β) Αν $x^2 - 1 = 0$ τότε $x = 1$ ή $x = -1$.

(γ) Αν $3x = 0$ τότε $x = -3$.

(δ) Η εξίσωση $0x = 0$ είναι αδύνατη εξίσωση.

(ε) Η εξίσωση $0x = 3$ έχει λύση $x = 0$.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Η εξίσωση $-2x = 0$ έχει τη λύση:

Α) $x = 2$ Β) $x = \frac{1}{2}$ Γ) $x = 0$ Δ) $x = -2$

(β) Η εξίσωση $3x - 6 = 0$ έχει τη λύση:

Α) $x = 2$ Β) $x = -2$ Γ) $x = 1$ Δ) $x = -1$

(γ) Η εξίσωση $3x + 2 = x + 2(x + 1)$

Α) είναι αδύνατη Β) είναι αόριστη Γ) έχει λύση $x = 1$ Δ) έχει λύση $x = 0$

(δ) Η εξίσωση $x^2 = 4$ έχει λύσεις

Α) $x = 2$ ή $x = -2$ Β) $x = 2$ Γ) $x = -2$ Δ) $x = 0$ ή $x = 2$

(ε) Η εξίσωση $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ έχει λύσεις τις

Α) $x = 1$ Β) $x = 1$ ή $x = 0$ Γ) $x = -1$ Δ) $x = -1$ ή $x = 1$

(στ) Αν η εξίσωση $3\alpha x^2 + 2x = 1$ έχει λύση $x = -1$, τότε το α είναι ίσο με

Α) -1 Β) 1 Γ) 2 Δ) 0

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

(α) $(x-7)(x+5)(2x-3)=0$

(β) $5x^2-10x=0$

(γ) $x^4-4x^2=0$

(δ) $(2x-5)(x^2-6x+5)=0$

(ε) $x^3=25x$

(στ) $25x^2-10x+1=0$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\mathbf{35}}{\boldsymbol{x^2+x-6}}+\frac{\boldsymbol{x-4}}{\boldsymbol{x-2}}=\frac{\boldsymbol{2x-1}}{\boldsymbol{x+3}}$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{\alpha^2-2\alpha}}-\frac{\boldsymbol{\alpha+4}}{\boldsymbol{\alpha^2-4}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha^2+2\alpha}}$

Επίλυση Εξίσωσης 2^{ου} Βαθμού

Διερεύνηση

(α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $4x^2 - 12x + 9$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 - 12x + 5 = 0$ χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (α) ερώτημα.

Μαθαίνω

- Κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ ονομάζεται εξίσωση **2^{ου} βαθμού.**

- Αν $\beta^2 - 4a\gamma \geq 0$, τότε οι λύσεις ή ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \beta x + \gamma = 0\,, a \neq 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

Η παράσταση $\beta^2 - 4a\gamma$ συμβολίζεται με Δ και ονομάζεται **Διακρίνουσα** της εξίσωσης δηλαδή :

$$\varDelta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Αν $\varDelta > 0$ έχει δύο πραγματικές άνισες ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{2\alpha}$

Αν $\varDelta = 0$ έχει μια πραγματική διπλή ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2a}$

Αν $\varDelta < 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$

$\Rightarrow 4\alpha\cdot \alpha x^2+4\alpha\cdot\beta x+4\alpha\cdot\gamma=0$

$\Rightarrow\ \ 4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+4\alpha\gamma=0$

$\Rightarrow (4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2)-\beta^2+4\alpha\gamma=0$

$\Rightarrow\ (2\alpha x+\beta)^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)=0$

$\Rightarrow\ (2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης επί 4α.

Προσθέτουμε και αφαιρούμε το β^2, για να προκύψει τέλειο τετράγωνο.

Αν θέσουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$\Rightarrow\ (2\alpha x+\beta)^2=\Delta$

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις:

(i) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Στην περίπτωση αυτή η $\sqrt{\Delta}$ είναι πραγματικός αριθμός και έχουμε:

$$(2\alpha x+\beta)^2=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad (2\alpha x+\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\quad \left(2\alpha x+\beta-\sqrt{\Delta}\right)\left(2\alpha x+\beta+\sqrt{\Delta}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad 2\alpha x+\beta-\sqrt{\Delta}=0 \text{ ή } 2\alpha x+\beta+\sqrt{\Delta}=0$$

$$\Rightarrow\quad 2\alpha x+\beta-\sqrt{\Delta}=0 \text{ ή } 2\alpha x+\beta+\sqrt{\Delta}=0$$

$$\Rightarrow\quad x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως, η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες που για συντομία γράφονται $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

(ii) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{0}}{2\alpha}\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$

Επειδή τώρα βρήκαμε δύο ίσες λύσεις λέμε ότι η εξίσωση μας έχει μια **διπλή πραγματική ρίζα** την $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

(iii) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Η εξίσωση $(2\alpha x+\beta)^2=\Delta$ είναι αδύνατη αφού $\Delta<0$ και $(2\alpha x+\beta)^2\geq 0$.

Επομένως, η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \ \alpha\neq 0$ **δεν** έχει πραγματικές ρίζες.

Παραδείγματα

1. Να λύσετε οι πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x^2 - x - 6 = 0$ (β) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

(γ) $-x^2 - x + 1 = 0$ (δ) $x^2 - 5 = 4x$

(ε) $2x^2 - 3 = 0$ (στ) $3x^2 - 6x = 0$

(ζ) $4x^2 + 8 = 0$ (η) $x^2 - 2x + 4 = 0$

Λύση:

(α) $2x^2 - x - 6 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49 > 0$, επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+7}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

(β) $16x^2 - 8x + 1 = 0$, $\alpha = 16$, $\beta = -8$, $\gamma = 1$

Έχουμε ότι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$, επομένως η εξίσωση μας έχει μια διπλή πραγματική ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -(\frac{-8}{32}) = \frac{1}{4}$

(γ) $-x^2 - x + 1 = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5 > 0$, επομένως η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{+1+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{+1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

(δ) $x^2 - 5 = 4x$,

$x^2 - 5 = 4x \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad \alpha = 1\ ,\ \beta = -4\ ,\ \gamma = -5$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36 > 0$, επομένως η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+6}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{4-6}{2} = -1 \end{cases}$$

(ε) $2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(στ) $3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

(ζ) $4x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες (διότι $x^2 \geq 0$).

(η) $x^2 - 2x + 4 = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 4$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$, επομένως η εξίσωση μας δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2}{x-3}+\frac{x}{2x-4}=\frac{2}{x^2-5x+6}$

Λύση:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{x}{2x-4}=\frac{2}{x^2-5x+6}$$

Αναλύουμε τους παρονομαστές

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-3}+\frac{x}{2(x-2)}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}$$

$$ΕΚΠ = 2(x-2)(x-3) \neq 0$$

$$x \neq 2, \quad x \neq 3$$

Βρίσκουμε το **Ε.Κ.Π.** των παρονομαστών.
Θέτουμε **περιορισμούς**

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{2}^{2(x-2)}}{x-3}+\frac{\overbrace{x}^{(x-3)}}{2(x-2)}=\frac{\overbrace{2}^{2}}{(x-2)(x-3)}$$

Κάνουμε **απαλειφή των παρονομαστών**, μετατρέποντας τα κλάσματα σε ομώνυμα

$$\Leftrightarrow 4x-8+x^2-3x=4$$

Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$\Leftrightarrow x^2+x-8-4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-12=0$$

$$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 1^2-4\cdot 1\cdot(-12)$$

$$= 1+48=49$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{-1-7}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Η λύση $x_2=-4$ είναι δεκτή

και η λύση $x_1=3$ απορρίπτεται.

Ελέγχουμε κατά πόσο οι λύσεις που βρήκαμε τηρούν τους περιορισμούς ή όχι και ανάλογα **δεχόμαστε** ή **απορρίπτουμε** συγκεκριμένες λύσεις.

Δραστηριότητες

1. Να αντιστοιχίσετε την κάθε εξίσωση της στήλης Α με μια πρόταση από τη στήλη Β.

Στήλη Α	
I.	$x^2 - 5x + 6 = 0$
II.	$x^2 - 4x + 2 = 0$
III.	$x^2 - 4 = 0$
IV.	$x^2 - 2x + 1 = 0$
V.	$x^2 - x + 2 = 0$
VI.	$x^2 - 4x = 0$

Στήλη Β	
(α)	Έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
(β)	Έχει δύο πραγματικές και ίσες ρίζες.
(γ)	Δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $x^2 + x - 6 = 0$ (β) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (γ) $2x^2 - 5x + 10 = 0$

(δ) $5x^2 - 4x = 0$ (ε) $2x^2 - 2 = 0$ (στ) $2x^2 + 4x - 3 = 0$

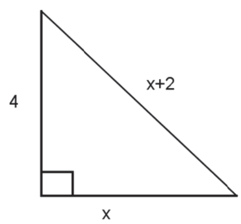
(ζ) $3x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$

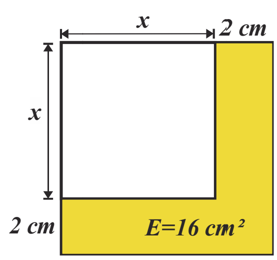
3. Να λύσετε τις εξισώσεις

(α) $(x-2)^2 - 4 = 0$ (β) $(x+1)^2 - (x-1)(x+2) = -2x(x-3)$

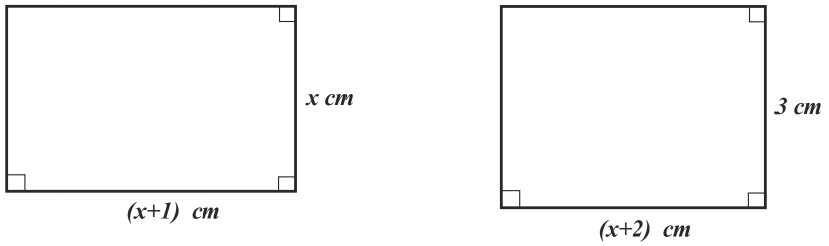
(γ) $\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 7$ (δ) $(x^2 - 7x + 12)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

4. Να υπολογίσετε το $\boldsymbol{x}$ στα πιο κάτω σχήματα.



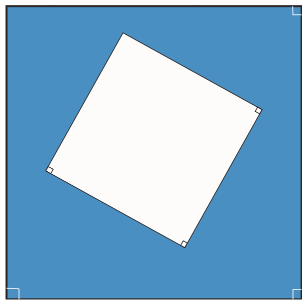


5. Τα πιο κάτω σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να υπολογίσετε την τιμή του $\boldsymbol{x}$.



6. Σε έναν αριθμό προσθέτουμε τον αντίστροφο του και βρίσκουμε $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$. Να βρείτε ποιος είναι ο αριθμός αυτός.

7. Στο σχήμα το εξωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{cm}$ και το εσωτερικό τετράγωνο έχει πλευρά $\mathbf{3\ cm}$.



   (α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{x} - \mathbf{3})(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})\ \boldsymbol{cm}^{\mathbf{2}}$.

   (β) Να υπολογίσετε την τιμή του $\boldsymbol{x}$ εάν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι $\mathbf{16\ cm^2}$.

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\frac{4x+1}{x-2} = \frac{9}{x-2}$

(β) $\frac{3x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{x-3}$

(γ) $\frac{x}{x-2} + \frac{x-8}{x} = \frac{4}{x^2-2x}$

(δ) $\frac{4}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{2x+2} = \frac{2x}{3x-6}$

(ε) $\frac{3}{x+2} + \frac{6x}{4-x^2} = \frac{3}{x-2}$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $x+5$ και $x-5$, έχει εμβαδόν $24\ m^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του.
2. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που τα τετράγωνά τους να έχουν άθροισμα 145.
3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^2 + (x-1)^3 - x^3 + 7$:

   (α)Να αποδείξετε ότι $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$

   (β)Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α) $x^2 = 9x$

   (β) $16\beta^2 - 8\beta + 1 = 0$

   (γ) $3x^2 - 15x = 0$

   (δ) $x^2 + x = 6$

   (ε) $(\alpha - 3)(\alpha + 2) = +6$

   (στ) $4\gamma^2 - 4 = 0$

   (ζ) $2y^2 - 5y + 7 = 0$

   (η) $\omega^2 + 9 = 0$

   (ϑ) $(\alpha - 2)(2\alpha + 8) = 0$

   (ι) $\alpha^3 = 5\alpha^2 - 6\alpha$

   (ια) $2(x+1)^2 - 4(x+1) = 0$

   (ιβ) $(2x-5)^2 = 1$

   (ιγ) $x^2 + 2(x-3) + 4 = 1$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3} + \frac{x-1}{x-1} = \frac{x+2}{x+3}$

   (β) $\frac{3-3\alpha}{3-\alpha} - \frac{2(\alpha+1)}{2+\alpha} = \frac{30}{\alpha^2-\alpha-6}$

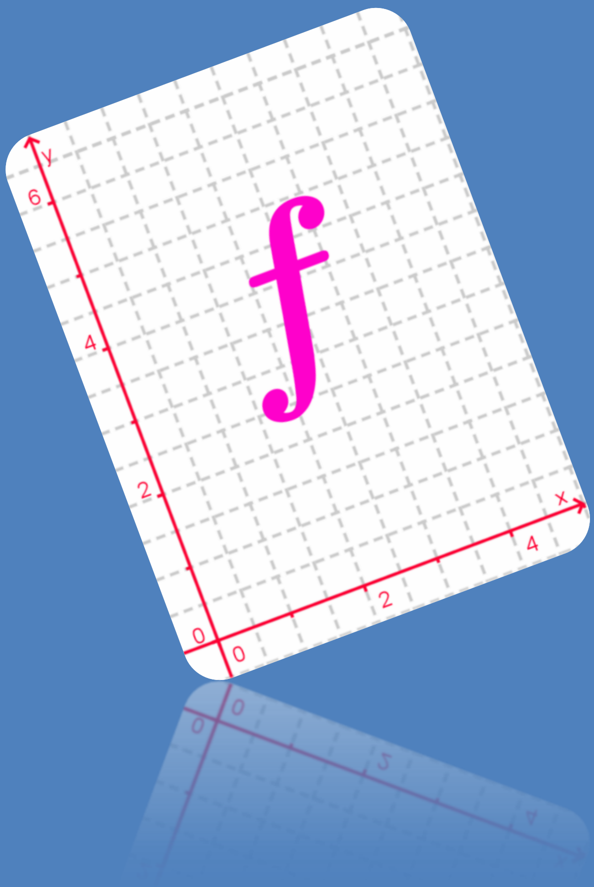
   (γ) $\frac{2x-19}{x^2+x-6} - \frac{x}{2-x} = \frac{5}{x+3}$

   (δ) $\frac{y}{y+2} + \frac{4}{y} = \frac{y+8}{y^2+2y}$

6. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς που το γινόμενό τους είναι 132.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Συναρτήσεις



Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Συναρτήσεις

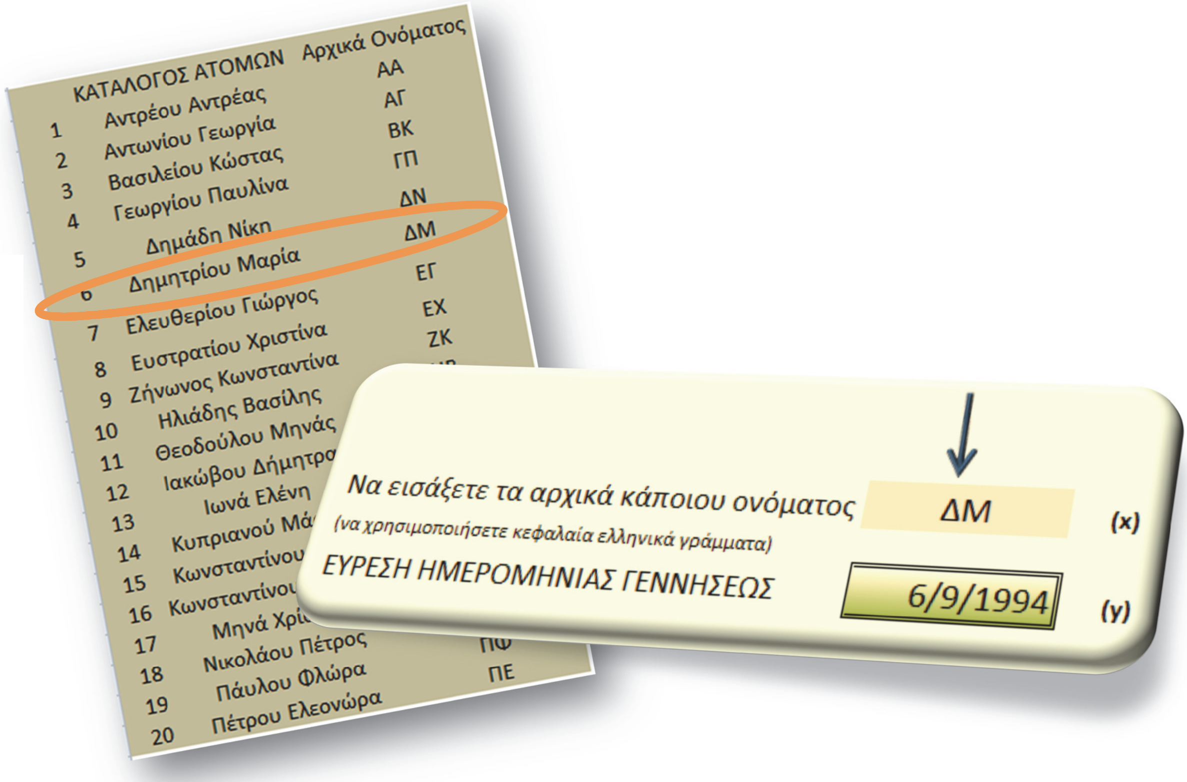
Εξερεύνηση

Να μελετήσετε τα πιο κάτω σενάρια:

<u>1ο Σενάριο:</u>

Εισάγουμε τα αρχικά ενός ατόμου (x), σε μια βάση δεδομένων και εμφανίζεται η ημερομηνία γέννησής του (y).

- ***Τεχνολογία:*** *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο “CEn8_BashDedomenon.xls”*



<u>2ο Σενάριο:</u>

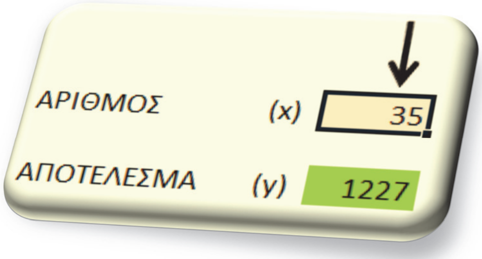
Σχεδιάζουμε ένα ταξίδι και εισάγουμε στον υπολογιστή μας ένα ποσό χρημάτων (x), που διαθέτουμε για αεροπορικά εισιτήρια.

Ο υπολογιστής μάς δίνει τους διαφορετικούς προορισμούς (y), στους οποίους μπορούμε να ταξιδέψουμε με το συγκεκριμένο ποσό χρημάτων.

3ο Σενάριο:

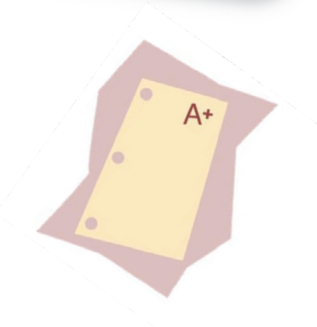
Λέμε σε ένα φίλο μας έναν οποιοδήποτε αριθμό (x), τον υψώνει στο τετράγωνο, στη συνέχεια προσθέτει 2 και μας λέει το αποτέλεσμα (y).

- ***Τεχνολογία:*** *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο "CEn8_ArithmosApotelesma.xls"*



4ο Σενάριο:

Στο τέλος του τετραμήνου, η βαθμολογία των μαθητών στα Μαθηματικά τοποθετείται σε έναν πίνακα που παρουσιάζει τον αριθμό μητρώου του μαθητή (x) στην αριστερή στήλη και το βαθμό του μαθητή (y) στη δεξιά στήλη.

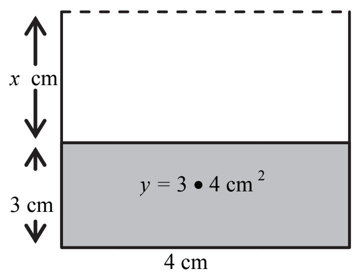


- Να περιγράψετε τις ομοιότητες και τις διαφορές των πιο πάνω σεναρίων.
- Σε ποιες περιπτώσεις νομίζετε ότι το y είναι συνάρτηση του x; Γιατί;

Διερεύνηση

- Ένα ορθογώνιο έχει αρχικές διαστάσεις $4\ cm$ και $3\ cm$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μια διάσταση του ορθογωνίου παραμένει σταθερή και η άλλη αυξάνεται κατά $x\ cm$.

(α) Αν συμβολίσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου με y, να βρείτε τον τύπο για τον υπολογισμό του εμβαδού.



(β) Για πέντε διαφορετικές τιμές του x, να υπολογίσετε το εμβαδόν και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών.

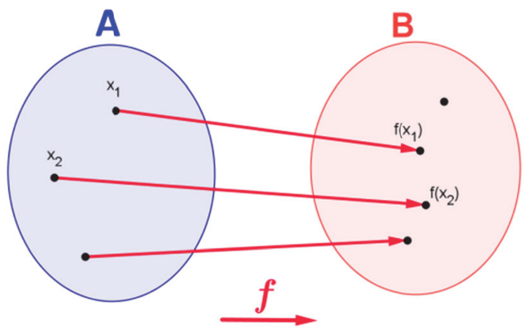
(γ) Να υπολογίσετε την τιμή του x, όταν το εμβαδόν γίνει $48\ cm^2$.

Μαθαίνω

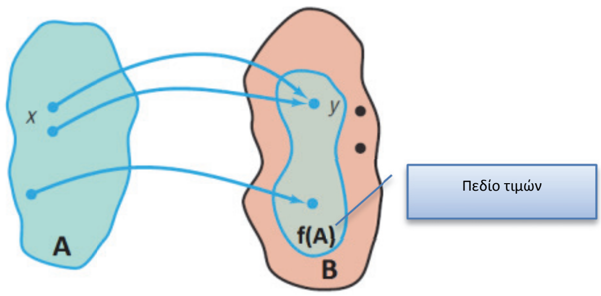
Συναρτήσεις

- Έστω δύο μη κενά σύνολα Α, Β. **Συνάρτηση** f από το σύνολο Α στο σύνολο Β, την οποία συμβολίζουμε $f: A \to B$, ονομάζουμε μια αντιστοιχία (κανόνα), όπου για κάθε στοιχείο x του συνόλου A ($\forall x \in A$) αντιστοιχεί ένα και μόνον ένα στοιχείο y του συνόλου B.

  Το y λέγεται και «**τιμή της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{x}$**» και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$**.** Η συνάρτηση συμβολίζεται και με τον τύπο $\boldsymbol{y = f(x)}$**.**



- **Πραγματική συνάρτηση** πραγματικής μεταβλητής από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $f: A \to B$, όταν το $A \subseteq \mathbb{R}$ και το $B \subseteq \mathbb{R}$.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** ($\Pi.O.$) της συνάρτησης.
- Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών $f(x)$ (με x στοιχείο του A) λέγεται **πεδίο τιμών** ($\Pi.T.$) της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Ισχύει $f(A) \subseteq B$.



- Η μεταβλητή x που παίρνει τιμές από το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η μεταβλητή y της οποίας η κάθε τιμή, εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

  Παρατήρηση: Όταν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού A μιας πραγματικής συνάρτησης $f: A \to B$, παίρνουμε ως A το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: «για κάθε τιμή του x, το $f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός που ανήκει στο B».

Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x + 3$ και πεδίο ορισμού $A = \left\{-2,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3\right\}$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της.

Λύση:

Για $x = -2$, τότε $f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

Για $x = 0$, τότε $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

Για $x = \frac{3}{2}$, τότε $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 6$

Για $x = 2$, τότε $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

Για $x = 3$, τότε $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

Έτσι το πεδίο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \{-1, 3, 6, 7, 9\}$.

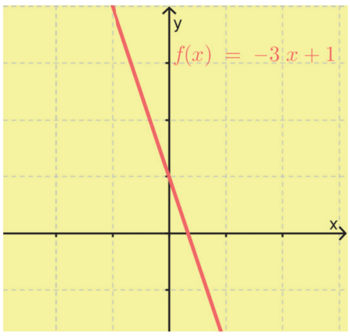
2. Δίνονται οι συναρτήσεις

α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x + 1$,

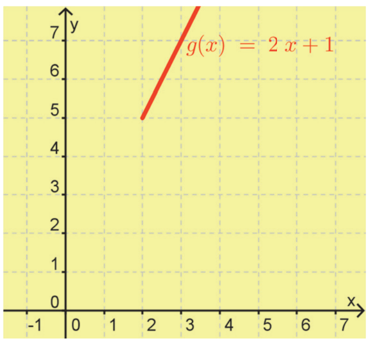
β) $g: [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 2x + 1$

Να βρείτε το πεδίο τιμών τους.

Λύση:



(α) Η συνάρτηση $f(x) = -3x + 1$ με Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνωστό ότι αντιπροσωπεύει ευθεία, η οποία παίρνει τιμές σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, το Πεδίο Τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.



(β) Η συνάρτηση $g(x) = 2x + 1$ αντιπροσωπεύει ευθεία, η οποία όμως ορίζεται στο σύνολο $[2, +\infty)$. Για να βρούμε το Πεδίο Τιμών της εργαζόμαστε ως εξής:

$x \geq 2 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow 2x + 1 \geq 5 \Rightarrow g(x) \geq 5$

Άρα το Πεδίο τιμών της είναι το $[5, +\infty)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x-3}$

(α) Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς: $-9, 0, 1, 6, 12$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

(β) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

Λύση:

(α) Δίνοντας στο x τις τιμές -9, 0 και 1, η παράσταση $x-3$ γίνεται, αντίστοιχα, $-12, -3$ και -2. Έτσι η $\sqrt{x-3}$ δεν είναι πραγματικός αριθμός γι' αυτές τις τιμές του x, αφού η υπόριζη ποσότητα είναι αρνητικός αριθμός.

Αντίθετα, για τις τιμές $x = 6$ και $x = 12$ έχουμε $f(6) = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$ και

$f(12) = \sqrt{12-3} = \sqrt{9} = 3$.

Άρα, μόνο οι τιμές $x = 6$ και $x = 12$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f.

(β) Για να είναι η παράσταση $\sqrt{x-3}$ πραγματικός αριθμός πρέπει $x - 3 \geq 0$.

Έτσι, το $x \geq 3$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = [3, +\infty)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{5}{x-2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Λύση:

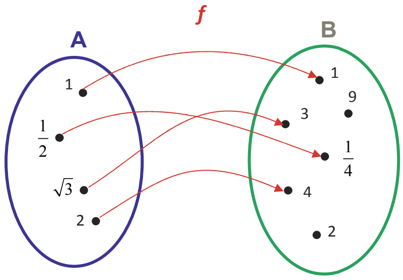
Για να ορίζεται η παράσταση $\frac{5}{x-2}$ πρέπει $x - 2 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών εκτός του 2.

Δηλαδή $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

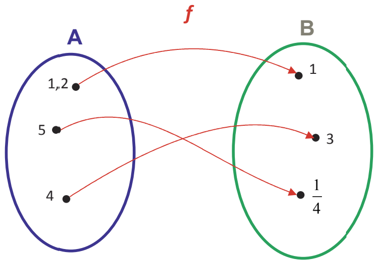
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων που δίνονται με βελοειδή διαγράμματα.

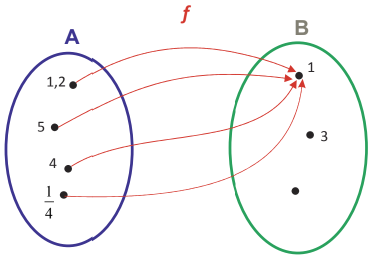
(α)



(β)

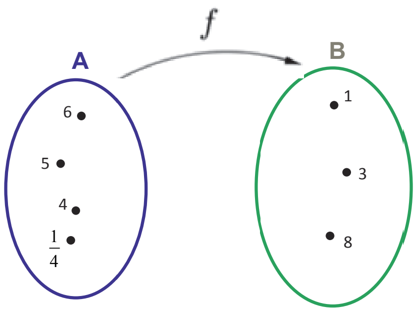


(γ)

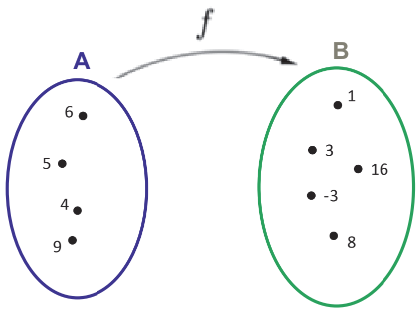


2. Να συμπληρώσετε με βέλη τα πιο κάτω διαγράμματα έτσι ώστε η f να ορίζει συνάρτηση.

(α)



(β)



3. Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίο Τιμών των συναρτήσεων που ορίζονται από τα πιο κάτω παραδείγματα.

   (α) Μια εταιρεία μεταφέρει δέματα με μέγιστο βάρος $50\ kg$.Η χρέωση $\boldsymbol{y}$ σε ευρώ για τη μεταφορά δέματος $x\ kg$, δίνεται από τον τύπο $y = 1{,}5(x-1)+9$.

   (β) Ο φόρος προστιθέμενης αξίας $\boldsymbol{y}$ σε ευρώ είναι το 18% της αξίας του προϊόντος με αξία x ευρώ, δηλ. $y = 0{,}18x$.

   (γ) Ένα όχημα ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα $80\ km/h$ και είναι εφοδιασμένο με καύσιμα για να διανύσει μέχρι $240\ km$. Η απόσταση $\boldsymbol{d}$ που καλύπτει το όχημα, είναι συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες, δηλ. $d = 80t$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f: A \to B$ με $f(x) = 3x - 5$ και πεδίο ορισμού $A = \{-1, 2, 3, 6\}$. Να βρείτε το πεδίο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

   (α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 6x - 1$,

   (β) $h: (-\infty, +2) \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = 3x - 5$

   Να βρείτε το πεδίο τιμών τους.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:

(α) $f(x) = x^2$ (β) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (γ) $f(x) = \frac{x-1}{3}$

(δ) $f(x) = \frac{4}{x-4}$ (ε) $f(x) = \sqrt{9-2x}$

7. Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

Αν $f: A \to B$ είναι συνάρτηση τότε προκύπτει ότι:

(α) Η f έχει πεδίο ορισμού το A. Σ Λ

(β) Η f έχει πεδίο τιμών το B. Σ Λ

(γ) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε ισχύει πάντα $x_1 = x_2$. Σ Λ

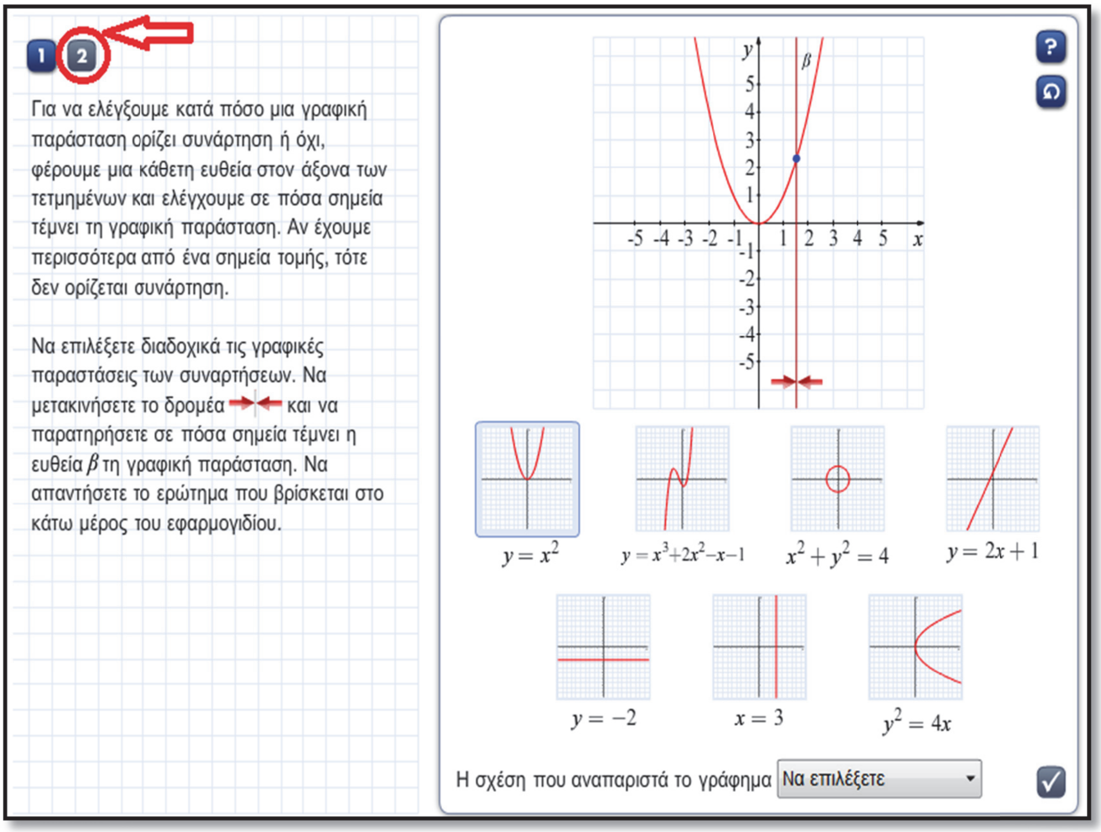
(δ) Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$, τότε ισχύει πάντα $f(x_1) = f(x_2)$. Σ Λ

(ε) Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, τότε ισχύει πάντα $f(x_1) \neq f(x_2)$. Σ Λ

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Διερεύνηση (1)

- ***Τεχνολογία:*** Να χρησιμοποιήσετε τη *δραστηριότητα 2* στο ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο **«1.4 Η έννοια της συνάρτησης»** και να ακολουθήσετε τις οδηγίες ώστε να εξετάσετε αν ορίζεται συνάρτηση ή όχι για καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις.

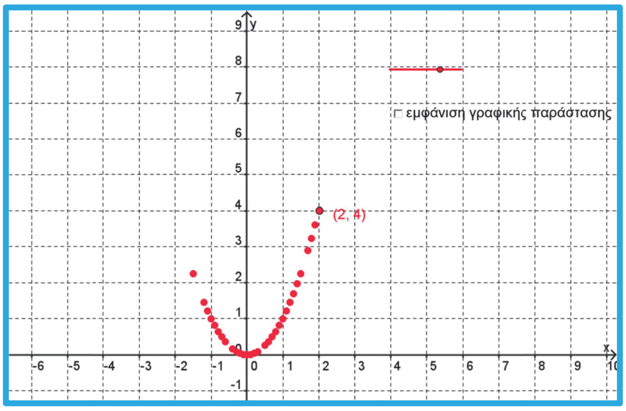


Διερεύνηση (2)

- Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x^2$.

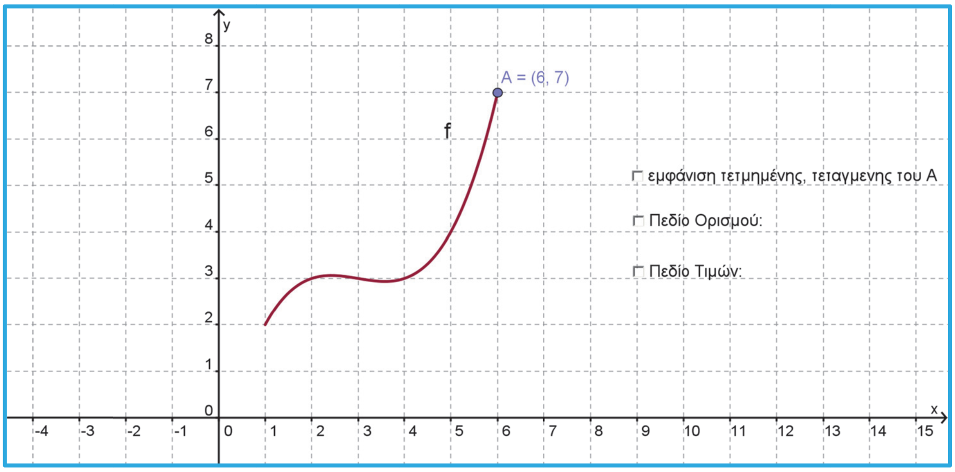
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης,

(β) ***Τεχνολογία:*** Να ανοίξετε το αρχείο: **“CEn8_x^2.ggb”.**
Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.



Διερεύνηση (3)

- ***Τεχνολογία:*** Να ανοίξετε το αρχείο: **“C_En8_PO_PT.ggb.”.**



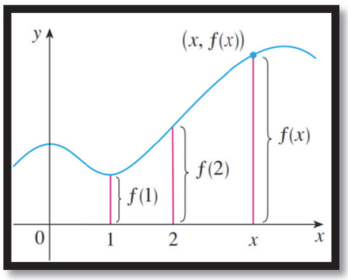
(α) Να μετακινήσετε το σημείο A και να παρατηρήσετε τις τιμές των συντεταγμένων του καθώς κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(β) Να επιλέξετε το « εμφάνιση τετμημένης, τεταγμενης του A ». Να μετακινήσετε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και να σημειώσετε τις παρατηρήσεις σας για τις τιμές της τετμημένης και τεταγμένης του A.
Ακολούθως να βρείτε το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίο Τιμών της συνάρτησης f.

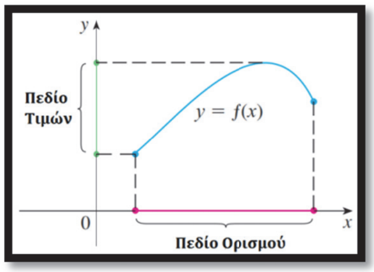
Μαθαίνω

- **Γράφημα** μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή $G = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A\}$.

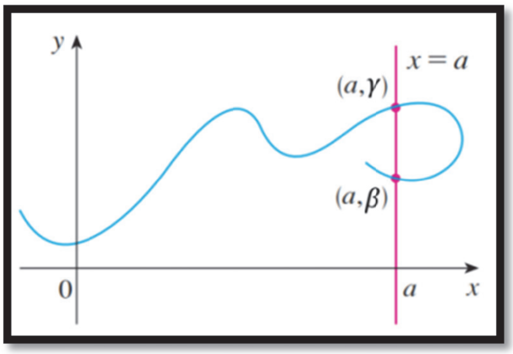
- **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης f είναι η αναπαράσταση των διατεταγμένων ζευγών (x, y) του γραφήματος G της συνάρτησης σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.



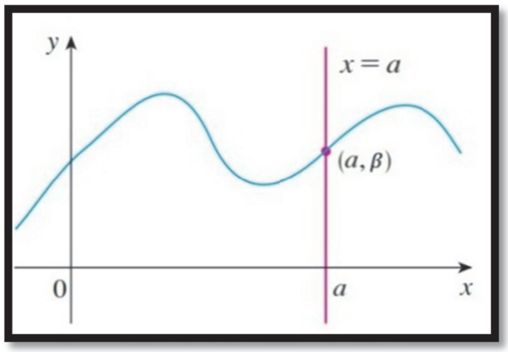
Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι το πεδίο τιμών της.



- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερα σημεία με την ίδια τετμημένη.



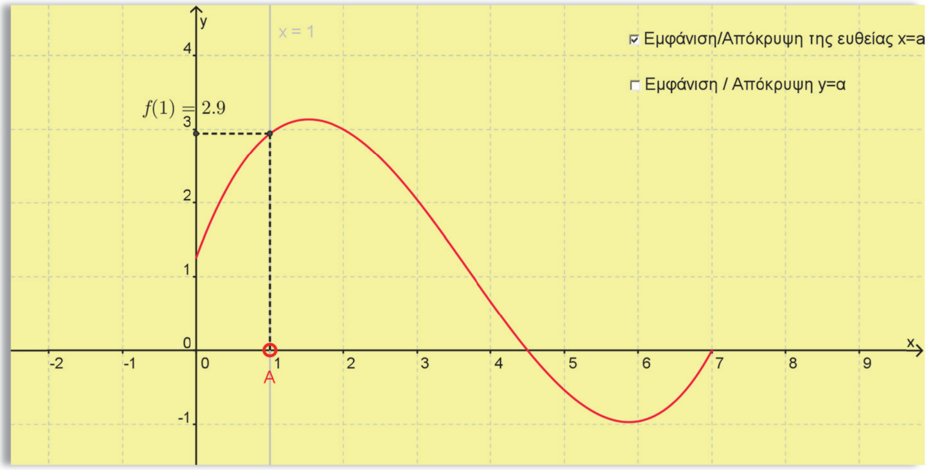
δεν είναι συνάρτηση



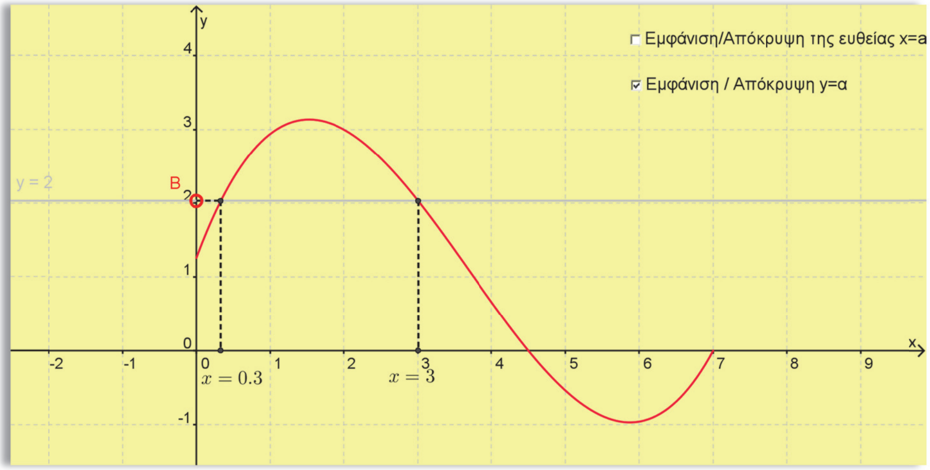
είναι συνάρτηση

Παραδείγματα

1. ***Τεχνολογία:*** Να χρησιμοποιήσετε αρχείο «CEn8_paradeigma.ggb» για να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα για τη συνάρτηση f:



(α) Να επιλέξετε το «☑ Εμφάνιση/Απόκρυψη της ευθείας x=a» και μετακινώντας το σημείο A να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$και $f(5)$.



(β) Να επιλέξετε το «☑ Εμφάνιση / Απόκρυψη y=α » και μετακινώντας το σημείο B να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 2$ και $f(x) = 1$.

(γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

Λύση

(α) Από τη γραφική παράσταση (με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου), παρατηρούμε ότι $f(1) = 2{,}9$, $f(2) = 3$ και $f(5) = -0{,}5$.

(β) Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι τα σημεία με τεταγμένη $y = 2$ που ανήκουν στη γραφική παράσταση της f έχουν τετμημένες $x = 0{,}3$ και $x = 3$.
Το σημείο με τεταγμένη $y = 1$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχει τετμημένη $x = 3{,}8$.

(γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται, όταν $0 \leq x \leq 7$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $[0,7]$.

2. Να βρείτε το α, ώστε το σημείο $(2,10)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \alpha x$

Λύση

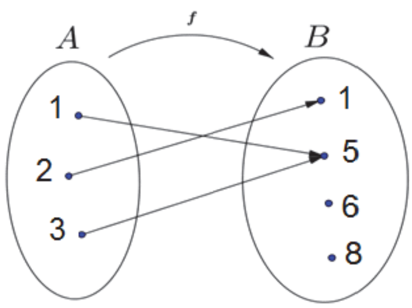
Επειδή το σημείο $(2,10)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση $y = f(x)$ ή $y = x^2 - \alpha x$ της γραφικής παράστασης. Δηλαδή ισχύει $f(2) = 10$, οπότε θα έχουμε:

$2^2 - 2\alpha = 10 \Leftrightarrow 4 - 2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = -3.$

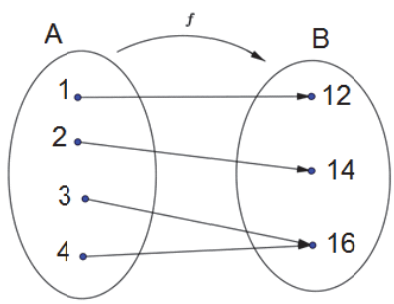
Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τα γραφήματα των πιο κάτω συναρτήσεων:

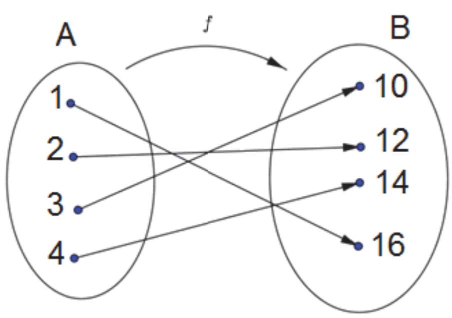
(α)



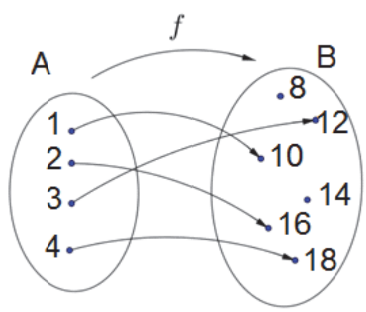
(β)



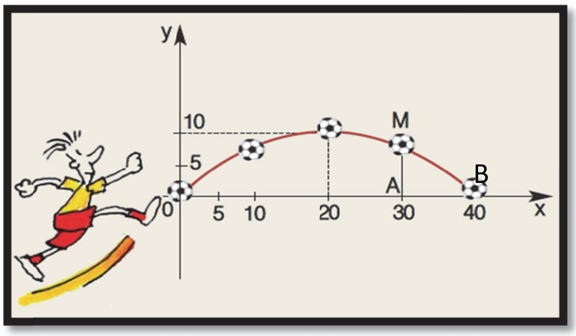
(γ)



(δ)



2. Η διπλανή γραφική παράσταση αναπαριστά την τροχιά που διέγραψε μια μπάλα, η οποία χτυπήθηκε από το σημείο Ο. Οι δύο άξονες είναι βαθμολογημένοι σε μέτρα.



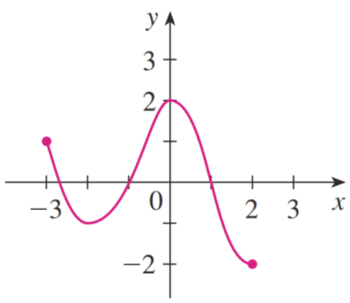
(α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού και το Πεδίο Τιμών της συνάρτησης που αναπαριστά η διπλανή γραφική παράσταση.

(β) Ποιο ήταν το μέγιστο ύψος που ανέβηκε η μπάλα;

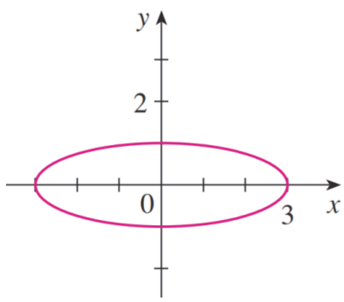
(γ) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το έδαφος, όταν αυτή βρισκόταν στο σημείο Μ, που έχει τετμημένη 30 και σε ποιο άλλο σημείο της τροχιάς η μπάλα απείχε την ίδια απόσταση από το έδαφος;

3. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις είναι συνάρτηση του y ως προς x:

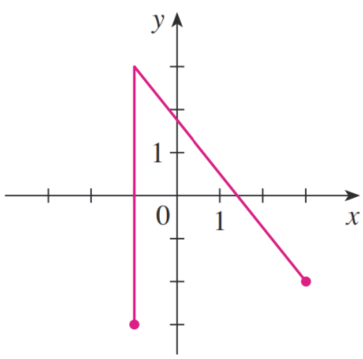
(α)



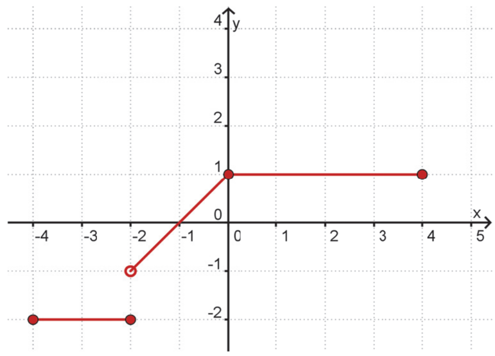
(β)



(γ)



(δ)

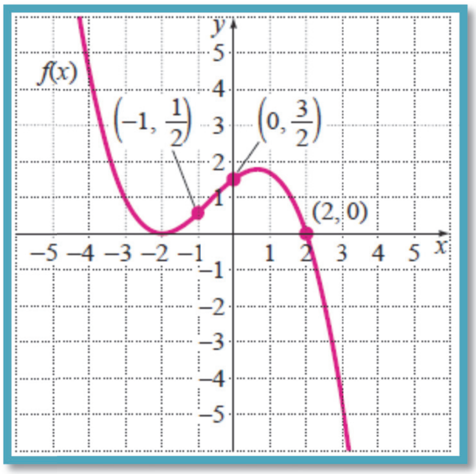


4. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

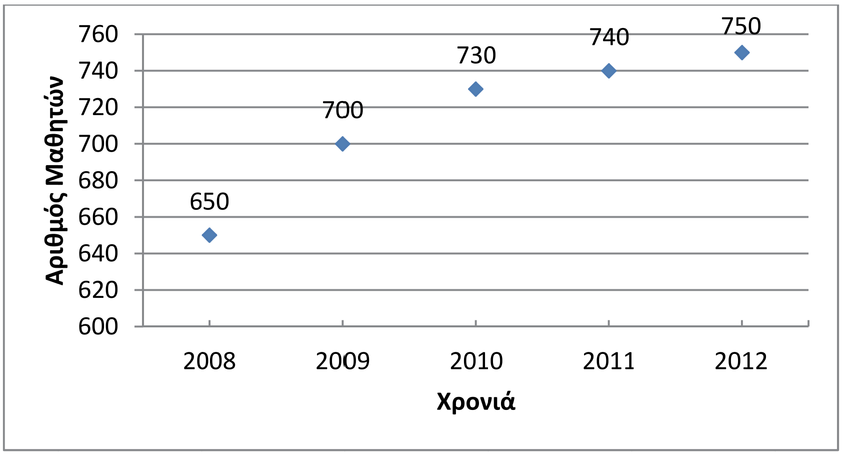
(α) Να βρείτε τις τιμές $f(-1), f(0)$ *και* $f(2)$.

(β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

(γ) Να βρείτε τα σημεία που τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης τους άξονες των τετμημένων και των τεταγμένων.



5. Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών σε ένα σχολείο κατά τις χρονιές 2008-2012.



(α) Να εξετάσετε αν η πιο πάνω γραφική παράσταση ορίζει συνάρτηση.

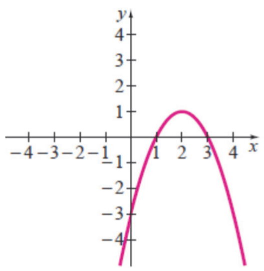
(β) Αν ορίζει συνάρτηση, να ονομάσετε τη συνάρτηση g και να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της και το Πεδίο Τιμών της.

(γ) Να βρείτε τις τιμές $g(2009)$ και $g(2011)$.

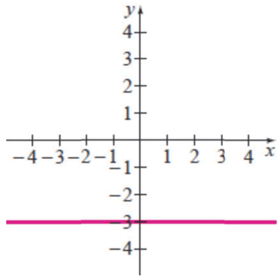
(δ) Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία ισχύει $g(x) = 730$ και να την ερμηνεύσετε.

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών των συναρτήσεων, για τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται πιο κάτω:

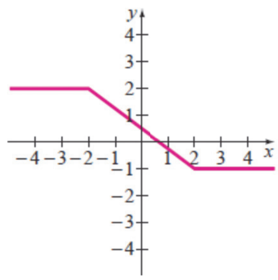
(α)



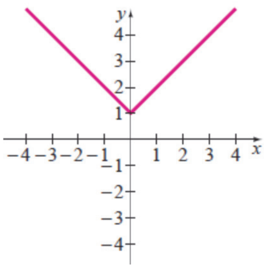
(β)



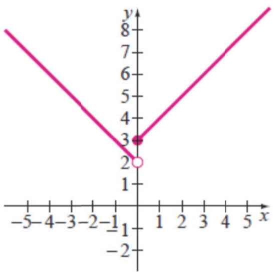
(γ)



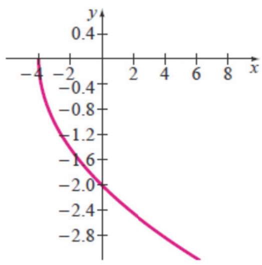
(δ)



(ε)



(στ)



7. Αν το σημείο $(3,8)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(α) $g(x) = x^2 + a$ (β) $g(x) = ax + 2$,

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$

(α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
(β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f με τη χρήση δυναμικού λογισμικού δημιουργίας γραφικών παραστάσεων.
(γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από των άξονα $x'x$.

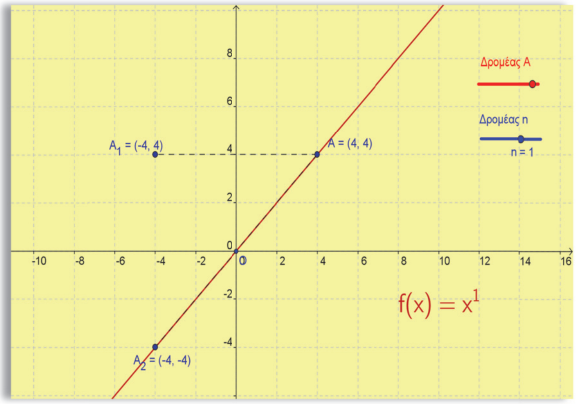
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$.

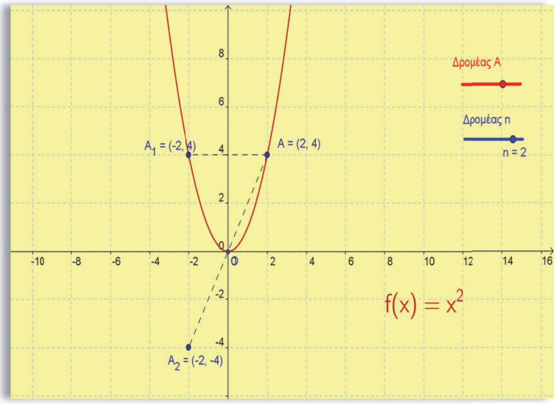
(α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
(β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f με τη χρήση δυναμικού λογισμικού δημιουργίας γραφικών παραστάσεων.
(γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από των άξονα $x'x$.

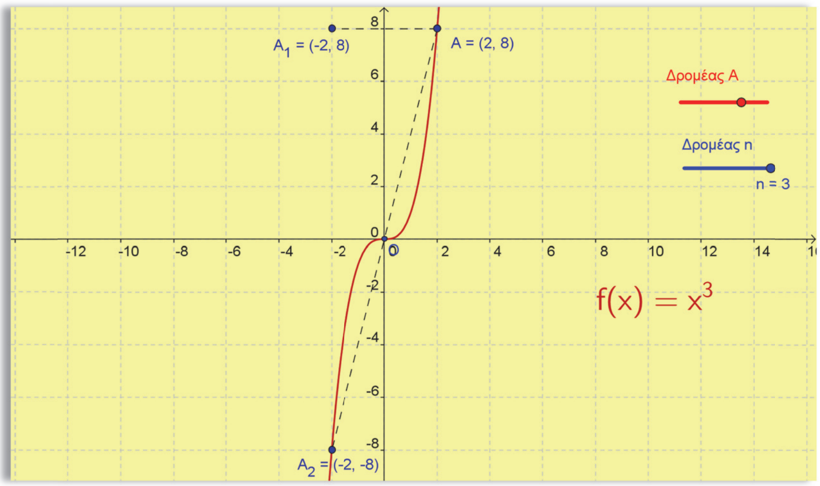
Ειδικές περιπτώσεις Συναρτήσεων

Διερεύνηση

- ***Τεχνολογία:*** Να ανοίξετε το αρχείο: **“C_En8_eidikes.ggb”**.







- Μετακινώντας το «**Δρομέα n**» εμφανίζεται, ανάλογα με τις τιμές του n $(n = -2, -1, 0, 1, 2, 3)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^n$.
- Για καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας όσον αφορά τις ιδιαιτερότητες τους ως προς τις τιμές που παίρνουν.
- Να εξετάσετε αν παρουσιάζουν συμμετρία ως προς κέντρο ή ως προς άξονα.

Μαθαίνω

- ***Σταθερή συνάρτηση***

  Μια συνάρτηση $f: A \to B$ για την οποία ισχύει $f(x) = \alpha$, για κάθε $x \in A$, όπου α σταθερό στοιχείο του Β, λέγεται **σταθερή συνάρτηση**.

  Δηλαδή όλα τα στοιχεία του A έχουν την ίδια τιμή στο B (Το Πεδίο Τιμών είναι μονοσύνολο).

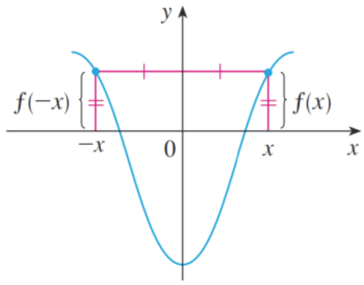
  Για παράδειγμα : $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή συνάρτηση.

- ***Άρτια συνάρτηση***

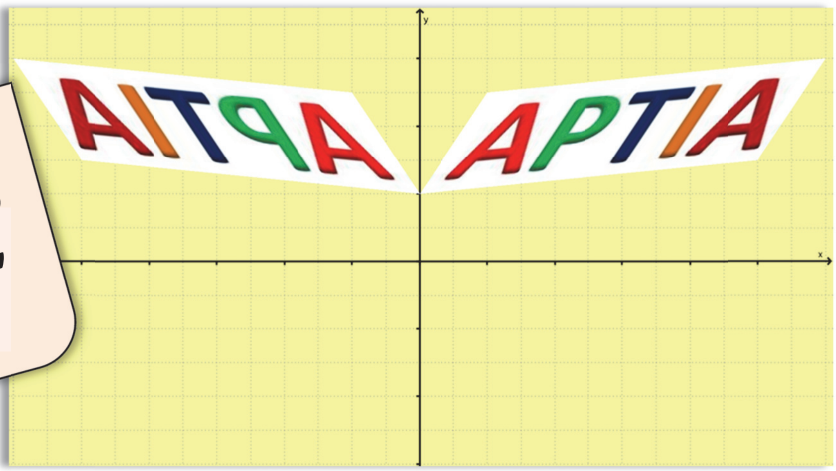
  Μια συνάρτηση $f: A \to B$ ονομάζεται **άρτια** όταν:

  Για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

  δηλαδή η f έχει την ίδια τιμή σε αντίθετα στοιχεία του Πεδίου Ορισμού της.



Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης $y = f(x)$ **έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y.**

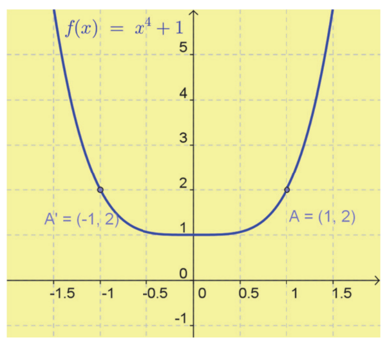


Για παράδειγμα :

Η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, είναι άρτια με **άξονα συμμετρίας** τον άξονα των y.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

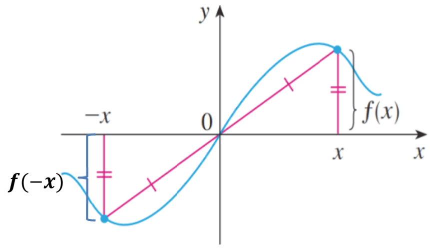
$f(-1) = 2 = f(1)$ και γενικά $f(-\alpha) = \alpha^4 + 1 = f(\alpha)$.



- ***Περιττή συνάρτηση***

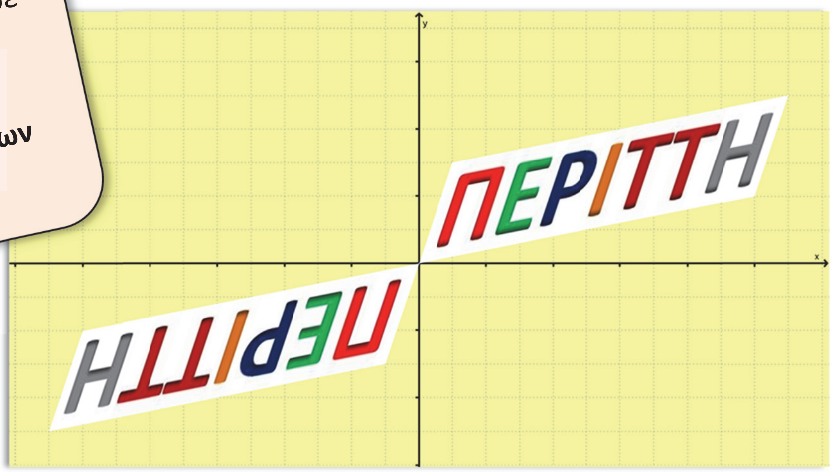
Μια συνάρτηση $f: A \to B$ ονομάζεται **περιττή** όταν

Για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$



Δηλαδή η f έχει αντίθετες τιμές σε αντίθετα στοιχεία του Πεδίου Ορισμού της.

Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης $y = f(x)$ έχει **κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων** $(0,0)$.

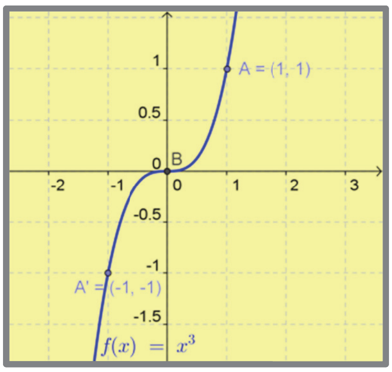


Για παράδειγμα :

Η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $(0,0)$.

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι

$f(-1) = -1 = -f(1)$ και γενικά $f(-a) = -a^3 = -f(a)$.



Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις , αν είναι σταθερές ή όχι.

(α) $f(x) = 2(x+4) - 2x\,, x \in \mathbb{R}$.

(β) $f(x) = 2(x+4) - 8\,, x \in \mathbb{R}$.

(γ) $f(x) = 2(x+4) - 2x - 8\,, x \in \mathbb{R}$.

Λύση

(α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2(x+4) - 2x\,, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 8\,, x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(β) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2(x+4) - 8\,, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 2x\,, x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

(γ) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2(x+4) - 2x - 8\,, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 0\,, x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι σταθερή συνάρτηση.

2. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι άρτιες

(α) $f(x) = 3x^2$,

(β) $f(x) = x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 1$

(γ) $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$

Λύση

(α) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $-\alpha \in \mathbb{R}$ και $f(-\alpha) = (-\alpha)^2 = \alpha^2 = f(\alpha)$.
Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

(β) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $-\alpha \in \mathbb{R}$ και
$f(-\alpha) = (-\alpha)^6 + 2(-\alpha)^4 - 3(-\alpha)^2 + 1 = \alpha^6 + 2\alpha^4 - 3\alpha^2 + 1 = f(\alpha)$.
Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

(γ) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $-\alpha \in \mathbb{R}$ και
$f(-\alpha) = 3(-\alpha)^2 + 2(-\alpha) + 3 = 3\alpha^2 - 2\alpha + 3 \neq f(\alpha)$
Άρα η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.

3. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττές.

(α) $f(x) = 2x^3$

(β) $f(x) = x^5 + 4x^3 + x$

(γ) $f(x) = x^5 - 4x^3 + x + 1$

Λύση

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και

$f(-x) = (-x)^5 + 4(-x)^3 + (-x) = -x^5 - 4x^3 - x = -(x^5 + 4x^3 + x) = -f(x)$

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση.

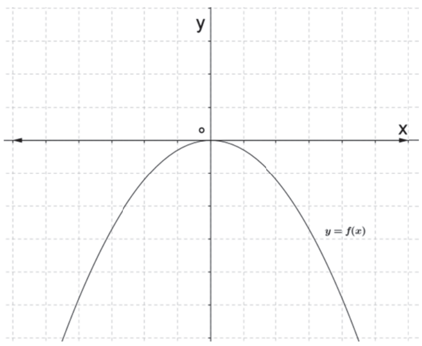
(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και

$f(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 + (-x) + 1 = -x^5 + 4x^3 - x + 1 \neq -f(x)$

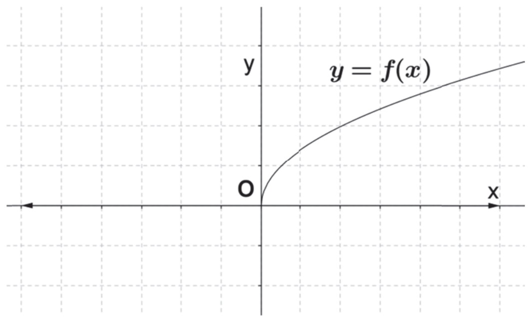
Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση.

3. Να εξετάσετε ποια από τα ακόλουθα διαγράμματα είναι γραφική παράσταση είτε άρτιας είτε περιττής συνάρτησης.

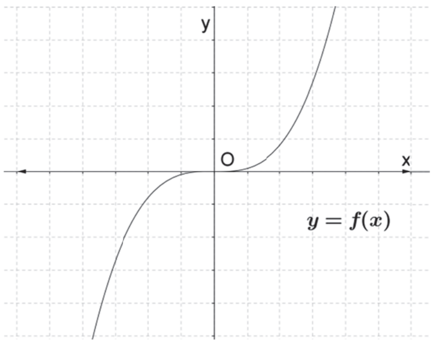
Α)



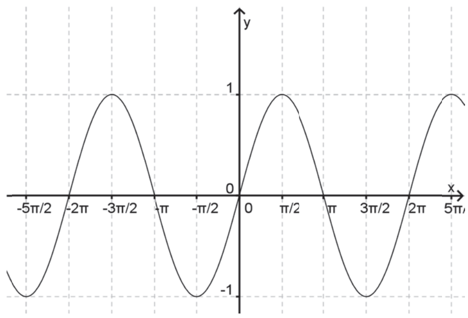
Β)



Γ)



Δ)



Λύση

Α: άρτια, επειδή έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Β: ούτε άρτια ούτε περιττή.

Γ: περιττή, επειδή έχει κέντρο συμμετρίας *το* $O(0,0)$.

Δ: περιττή, επειδή έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

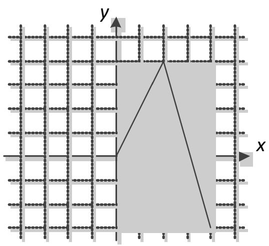
Δραστηριότητες

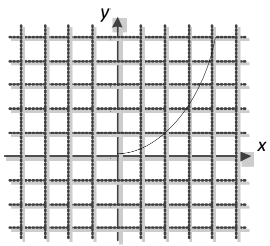
1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Λ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

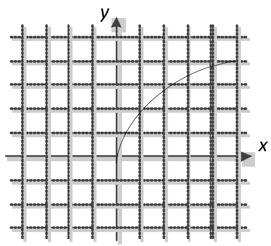
(α) Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,2)$.	Σ	Λ
(β) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.	Σ	Λ
(γ) Αν μια άρτια συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο $(\rho, 0)$, τότε θα τον τέμνει και στο $(-\rho, 0)$.	Σ	Λ
(δ) Αν μια περιττή συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο $(\rho, 0)$, τότε θα τον τέμνει και στο $(-\rho, 0)$.	Σ	Λ

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις ώστε να αναπαριστούν:

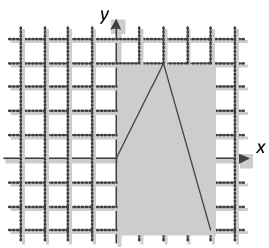
(α) Άρτια συνάρτηση

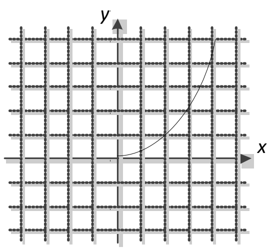


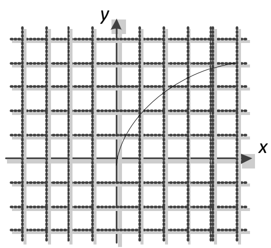




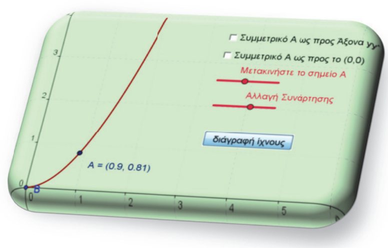
(β) Περιττή συνάρτηση







Για την πιο πάνω άσκηση μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο :
«C_En8_Katask.art.periti.ggb «



3. Να εξετάσετε σε ποιο σημείο μπορεί να τέμνει τον άξονα των $y'y$:

   (α) Μια περιττή συνάρτηση

   (β) Μια άρτια συνάρτηση.

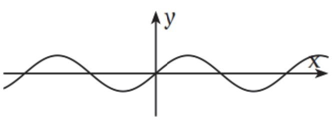
4. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτα από τα δύο και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

   (α) $f(x) = \sqrt{x-4}$ (β) $g(x) = 3x^3 + x$

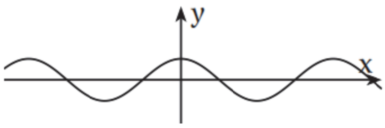
   (γ) $h(x) = x^6 - x^4$

5. Πιο κάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Ποιες από αυτές είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

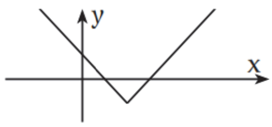
(α)



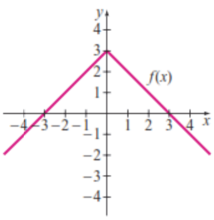
(β)



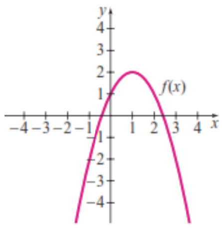
(γ)



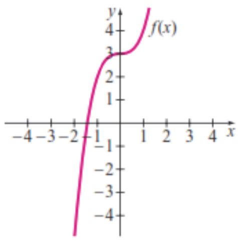
(δ)



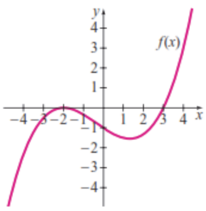
(ε)



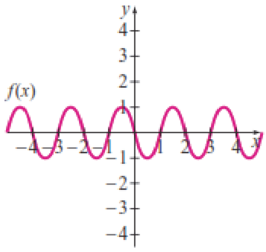
(στ)



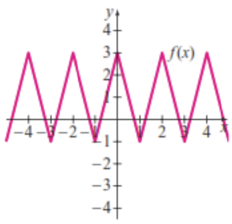
(ζ)



(η)

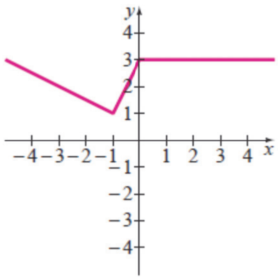


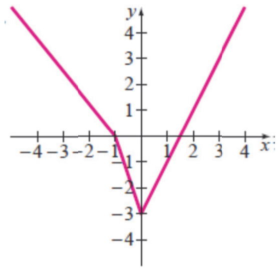
(θ)

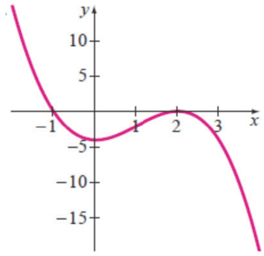


Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών των συναρτήσεων για τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται πιο κάτω:

(α) 

(β) 

(γ) 

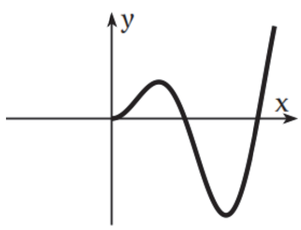
2. Η ποσότητα Στερεών αποβλήτων που συλλέγηκε για ανακύκλωση κατά τις χρονιές 2004-2007 στην Κύπρο, παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα.

Χρονιά	Ποσότητα που ανακυκλώθηκε (σε τόνους)
2004	58140
2005	64000
2006	71690
2007	74560

(α) Να κατασκευάσετε βελοειδές διάγραμμα του πιο πάνω πίνακα.
(β) Να εξετάσετε αν το διάγραμμα ορίζει συνάρτηση και να την ονομάσετε με f.
(γ) Ποιο είναι το Πεδίο Ορισμού και ποιο το Πεδίο Τιμών της f.
(δ) Να βρείτε το γράφημα της συνάρτηση f.
(ε) Να βρείτε τις τιμές $f(2004)$ και $f(2006)$.

3. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αν η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι:

(α) άρτια
(β) περιττή



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

   (α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
   (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f με τη χρήση δυναμικού λογισμικού δημιουργίας γραφικών παραστάσεων.
   (γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από των άξονα $x'x$.
   (δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$.

   (α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
   (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f με τη χρήση δυναμικού λογισμικού δημιουργίας γραφικών παραστάσεων.
   (γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από των άξονα $x'x$.

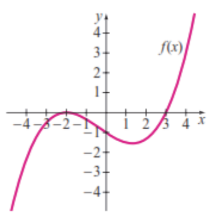
6. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x + 15$ που έχει:

   (α) Τετμημένη ίση με -2
   (β) Τεταγμένη ίση με 15
   (γ) αντίθετες συντεταγμένες
   (δ) ίσες συντεταγμένες

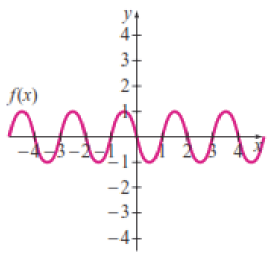
7. Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το σημείο $N(-\alpha, 3\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x - x^2$.

8. Πιο κάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Για την κάθε περίπτωση να εξετάσετε αν πρόκειται για άρτια ή περιττή συνάρτηση ή ούτε άρτια, ούτε περιττή.

(α)



(β)



(γ)