ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

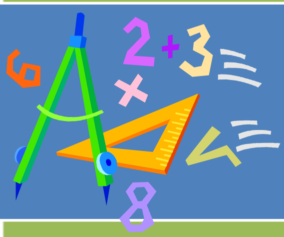
Β΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Α΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Β΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά
Α΄ Γυμνασίου, Τεύχος Β΄

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Ιωάννου Ιωάννης
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστήμιο Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2012

Εκτύπωση: Cassoulides Masterprinters Ltd

ISBN: 978-9963-0-4639-3

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5

Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

Α΄ Γυμνασίου

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ</u>

Σημείο – Ευθύγραμμο Τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία

Επίπεδο – Ημιεπίπεδο

Διερεύνηση

Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus στις πιο κάτω δραστηριότητες:*

α) Να κατασκευάσετε:

i. δύο σημεία και μια ευθεία που περνά από αυτά τα δύο σημεία,
ii. ένα ευθύγραμμο τμήμα,
iii. μια ημιευθεία.

- Σε τι διαφέρουν οι πιο πάνω κατασκευές;
- Να περιγράψετε την ευθεία, το ευθύγραμμο τμήμα και την ημιευθεία.

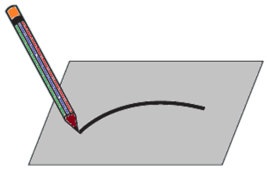
β) Να κατασκευάσετε δύο σημεία A και B στο επίπεδο.
Να φέρετε ευθείες που περνούν από τα σημεία A και B.
- Τι παρατηρείτε;

γ) Να κατασκευάσετε σημεία A, B , Γ και Δ τα οποία να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
Να κατασκευάσετε δύο ευθείες, η μια να περνά από τα σημεία A, B και η άλλη από τα σημεία Γ, Δ.
- Να μετακινήσετε το σημείο A ή το σημείο B σε διάφορες θέσεις, ώστε οι ευθείες να τέμνονται.
- Πόσα κοινά σημεία έχουν οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$;

δ) Να κατασκευάσετε σημείο A στο επίπεδο και να φέρετε ευθείες που να περνούν από το σημείο A.
- Τι παρατηρείτε;

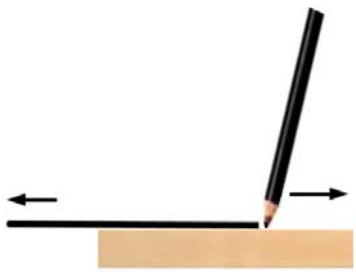
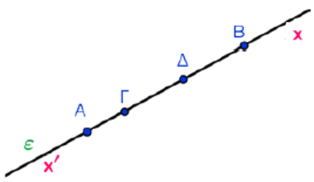
Μαθαίνω

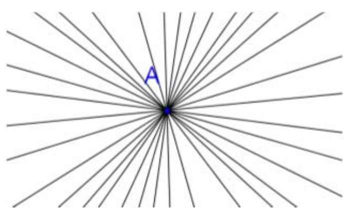
Στη Γεωμετρία δεχόμαστε την ύπαρξη ορισμένων εννοιών που προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας. Σε αυτές τις έννοιες δίνουμε κάποια ονομασία, χωρίς να τις περιγράψουμε με τη βοήθεια άλλων στοιχείων. Οι έννοιες αυτές ονομάζονται **αρχικές έννοιες** της Γεωμετρίας. Οι βασικές αρχικές έννοιες της Γεωμετρίας είναι **το σημείο**, **η ευθεία** και **το επίπεδο**.

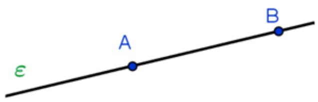
<table>
<tr><th colspan="3">Αρχικές έννοιες: Σημείο – Ευθεία – Επίπεδο</th></tr>
<tr><td>Σημείο</td><td>Το σημείο δεν έχει διαστάσεις και καθορίζει μια θέση. Σημειώνεται με τελεία και συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα, όπως φαίνεται στην εικόνα δίπλα.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Γραμμή</td><td>Αν μετακινήσουμε χωρίς διακοπή τη μύτη του μολυβιού πάνω σε ένα χαρτί, τότε το ίχνος της γράφει μία γραμμή.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ευθεία</td><td>Η γραμμή που κατασκευάζεται με το χάρακα που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος ονομάζεται ευθεία.

Η ευθεία συμβολίζεται:
➢ με ένα μικρό γράμμα του αλφαβήτου π.χ. ευθεία ε, ή
➢ με δύο μικρά γράμματα π.χ. ευθεία $x'x$ ή
➢ με δύο σημεία π.χ. ευθεία AB ή ευθεία BA.

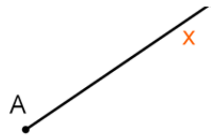
▪ Τρία ή περισσότερα σημεία λέγονται συνευθειακά, όταν αυτά βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία π.χ. A, B, Γ, Δ συνευθειακά.

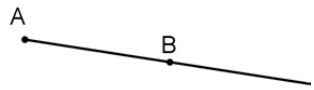
▪ Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
▪ Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.
▪ Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
▪ Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.</td><td>


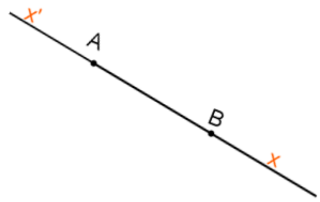
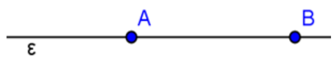


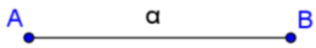

</td></tr>
</table>

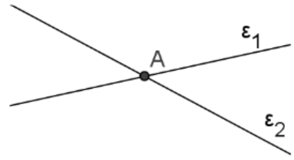
<table>
<tr><th colspan="3">Ευθύγραμμο τμήμα- Ημιευθεία</th></tr>
<tr><td>Ημιευθεία</td><td>Ημιευθεία ονομάζεται καθένα από τα δύο μέρη στα οποία η ευθεία διαιρείται από ένα σημείο της.
Συμβολίζεται με το σημείο που είναι η αρχή και ένα άλλο μικρό γράμμα.
π.χ. ημιευθεία Ax.
ή με το σημείο που είναι η αρχή και ένα άλλο σημείο πάνω σε αυτή.
π.χ. ημιευθεία AB.

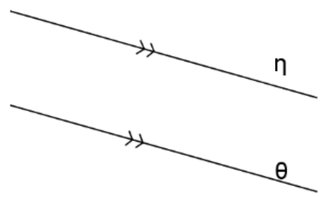
Αντικείμενες ημιευθείες ονομάζονται οι ημιευθείες που ανήκουν στην ίδια ευθεία και έχουν κοινή μόνο την αρχή τους.
π.χ. Οι ημιευθείες Ax και Ax' είναι αντικείμενες.</td><td>

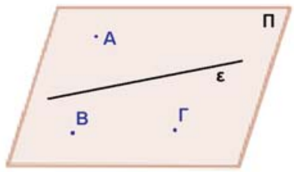
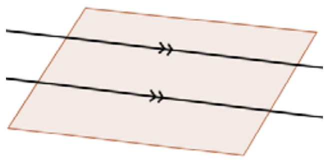
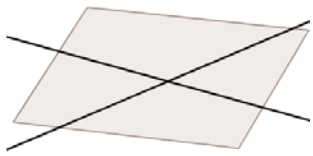
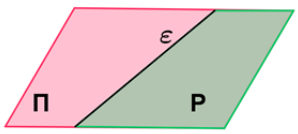
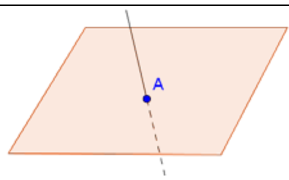
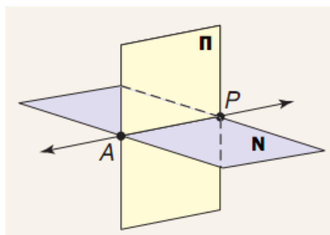



</td></tr>
<tr><td>Ευθύγραμμο τμήμα</td><td>Ευθύγραμμο τμήμα ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο σημεία μιας ευθείας (άκρα) και τα σημεία που περιέχονται μεταξύ τους.
Συμβολίζεται με:
➢ τα δύο άκρα του π.χ. AB ή BA ή
➢ ένα μικρό γράμμα π.χ. α.</td><td>


</td></tr>
<tr><th colspan="3">Θέσεις ευθειών στο επίπεδο</th></tr>
<tr><td>Τεμνόμενες</td><td>Δύο ευθείες τέμνονται όταν έχουν ένα κοινό σημείο. Το κοινό τους σημείο ονομάζεται σημείο τομής.

π.χ. Το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το A.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Παράλληλες</td><td>Δύο ευθείες λέγονται παράλληλες όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

π.χ. Η ευθεία η είναι παράλληλη με την ευθεία θ και γράφουμε $\eta \parallel \theta$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ταυτίζονται</td><td>Δύο ευθείες λέγεται ότι ταυτίζονται όταν έχουν όλα τους τα σημεία κοινά.</td><td>
</td></tr>
</table>

Έννοιες του επιπέδου		
Επίπεδο	**Επίπεδο** είναι η επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή. Για την ονομασία του επιπέδου χρησιμοποιείται: ➢ ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου π.χ.(Π) και διαβάζεται «επίπεδο Π» ή ➢ τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου και διαβάζεται «επίπεδο $AB\Gamma$» ▪ *Ένα επίπεδο εκτείνεται απεριόριστα.* ▪ *Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο, ενώ από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.* ▪ *Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη.* ▪ *Από δύο παράλληλες ευθείες διέρχεται μόνο ένα επίπεδο.* ▪ *Από δύο τεμνόμενες ευθείες διέρχεται μόνο ένα επίπεδο.*	  
Ημιεπίπεδο	Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο **ημιεπίπεδα.**	
Τομή ευθείας επιπέδου	Η τομή ευθείας και επιπέδου είναι σημείο.	
Τομή Επιπέδων	Η τομή δύο επιπέδων που δεν συμπίπτουν είναι ευθεία. π.χ. η τομή των επιπέδων (Π) και (N) είναι η ευθεία AP.	

Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε μια ευθεία ε και να σημειώσετε τέσσερα σημεία που ανήκουν στην ευθεία και ένα σημείο που να μην ανήκει.

   Λύση:

   Στην ευθεία ε ανήκουν τα σημεία A, B, Γ και Δ.
   Το σημείο Z δεν ανήκει στην ευθεία ε.

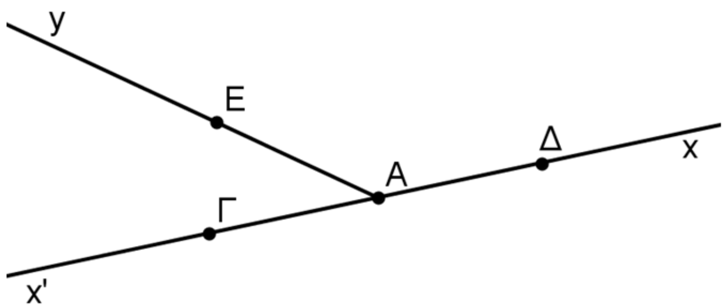
2. Να αναφέρετε μερικά αντικείμενα του περιβάλλοντός σας, τα οποία να αποτελούν μέρος επιπέδου.

   Λύση:

   Η επιφάνεια ενός τραπεζιού, ο τοίχος της τάξης, το γήπεδο του ποδοσφαίρου, η πόρτα του δωματίου κτλ.

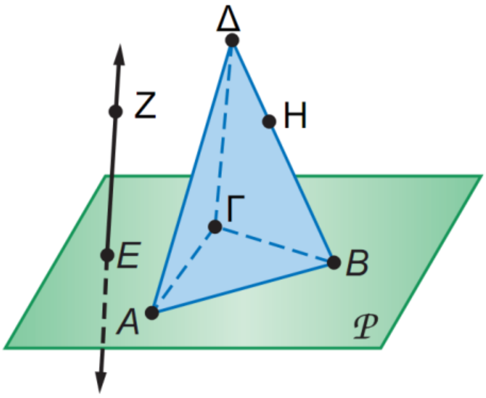
Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω σχήμα:



   α) Να ονομάσετε ένα σημείο της ευθείας $x'x$.
   β) Να δώσετε τρία άλλα ονόματα για την ευθεία $x'x$.
   γ) Να ονομάσετε τρία συνευθειακά σημεία.
   δ) Να ονομάσετε τρία μη συνευθειακά σημεία.
   ε) Να ονομάσετε δύο ημιευθείες με την ίδια αρχή.
   στ) Να ονομάσετε δύο αντικείμενες ημιευθείες.

2. Στο πιο κάτω σχήμα:



α) Να ονομάσετε 4 σημεία του επιπέδου P.
β) Να ονομάσετε την τομή της ευθείας ZE με το επίπεδο P.

3. Να εξηγήσετε γιατί ένα σημείο δεν είναι αρκετό, για να ορισθεί μια ευθεία.

4. Να εντοπίσετε στην τάξη σας αντικείμενα τα οποία θα μπορούσατε να αναπαραστήσετε με σημεία, ευθείες και επίπεδα.

5. Να αντιστοιχίσετε:

<u>Στήλη Α΄</u>

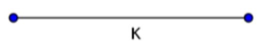
α) 

β) 

γ) 

δ) 

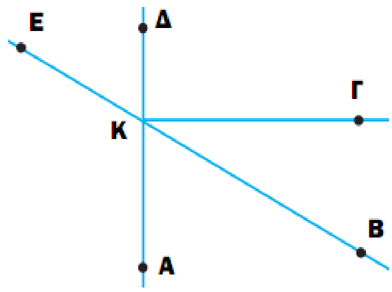
ε) 

στ) 

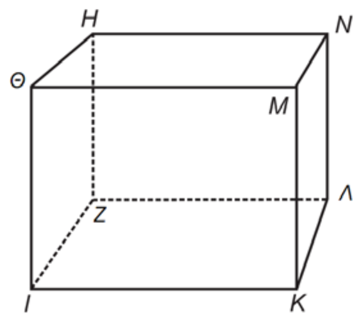
<u>Στήλη Β΄</u>

i. Ευθύγραμμο τμήμα $ΕΔ$
ii. Ευθεία $ΓΒ$
iii. Ευθεία $ΔΕ$
iv. Ευθύγραμμο τμήμα $ΓΒ$
v. Ευθύγραμμο τμήμα κ
vi. Ευθεία κ
vii. Ημιευθεία $Εx$
viii. Ημιευθεία ε
ix. Ημιευθεία κ
x. Ευθύγραμμο τμήμα ε
xi. Ευθεία ε
xii. Σημείο $Α$

6. Στο διπλανό σχήμα να ονομάσετε:
   α) Δύο ευθείες.
   β) Δύο ημιευθείες.
   γ) Δύο ευθύγραμμα τμήματα.
   δ) Ένα σημείο που να ανήκει στο $ΑΔ$.
   ε) Δύο αντικείμενες ημιευθείες.



7. Στο διπλανό σχήμα να ονομάσετε:
   α) Τέσσερα σημεία.
   β) Τρία ευθύγραμμα τμήματα.
   γ) Δύο επίπεδα.
   δ) Τέσσερα σημεία του ίδιου επιπέδου.
   ε) Δύο ευθύγραμμα τμήματα που τέμνονται στο σημείο $Κ$.
   στ) Την τομή των επιπέδων $ΙΖΛ$ και $ΚΛΝ$.
   ζ) Τρείς ευθείες που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.
   η) Το επίπεδο που περνά από το σημείο $Θ$ και την ευθεία $ΙΛ$.
   θ) Τρείς ευθείες που δεν τέμνονται.



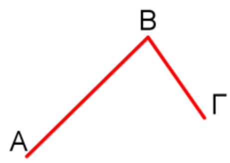
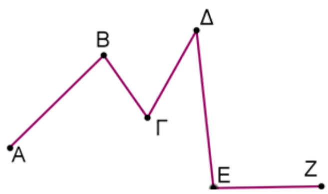
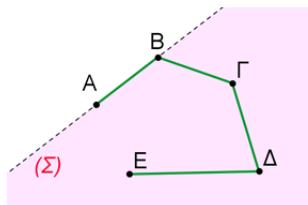
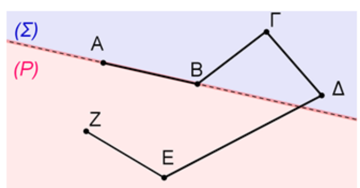
8. Να χαρακτηρίσετε ορθή ή λανθασμένη καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις:
   α) Η ημιευθεία έχει ένα μόνο άκρο.
   β) Οι ευθείες δεν έχουν άκρα.
   γ) Δυο ευθείες που δεν τέμνονται μπορεί να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.
   δ) Κάθε ζεύγος σημείων ανήκει σε ένα και μόνο επίπεδο.

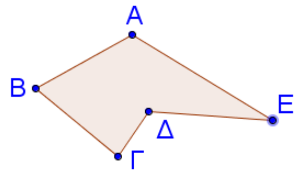
Επίπεδα Σχήματα – Ευθύγραμμα Σχήματα

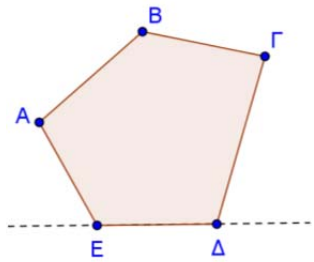
Εξερεύνηση

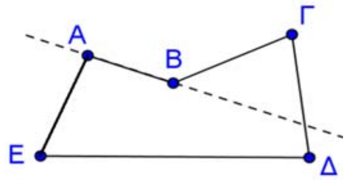
- **Τεχνολογία:** *Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En5_Tethlasmeni_grammi.ggb»*
  Να μετακινήσετε τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ και H με τέτοιο τρόπο, ώστε οι προεκτάσεις κάθε ευθύγραμμου τμήματος να αφήνει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα στο ίδιο ημιεπίπεδο.
- **Τεχνολογία:** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_Efthigrammo_sxima.ggb»*
  α) Να μετακινήσετε τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ και H με τέτοιο τρόπο, ώστε να προκύψει ένα *«κυρτό»* σχήμα.
  β) Να εξηγήσετε πότε ένα σχήμα είναι κυρτό και πότε μη κυρτό.

Μαθαίνω

Είδη γραμμών		
Διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα	**Διαδοχικά** ονομάζονται δύο ευθύγραμμα τμήματα που έχουν ένα κοινό άκρο.	
Τεθλασμένη γραμμή	**Τεθλασμένη γραμμή** είναι το σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία.	
Κυρτή Τεθλασμένη γραμμή	Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές της στο ίδιο ημιεπίπεδο. π.χ. η ευθεία AB αφήνει όλες τις πλευρές $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔE στο ημιεπίπεδο (Σ).	
Μη Κυρτή Τεθλασμένη γραμμή	Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **μη κυρτή**, όταν η προέκταση έστω και μίας πλευράς <u>δεν</u> αφήνει όλες τις άλλες πλευρές της στο ίδιο ημιεπίπεδο. π.χ. η ευθεία AB αφήνει τις πλευρές $B\Gamma$ *και* $\Gamma\Delta$ στο ημιεπίπεδο (Σ)και την ZE στο ημιεπίπεδο (P)	
Καμπύλη γραμμή	Οποιαδήποτε γραμμή της οποίας κανένα τμήμα της δεν είναι ευθύγραμμο ονομάζεται **καμπύλη γραμμή**.	

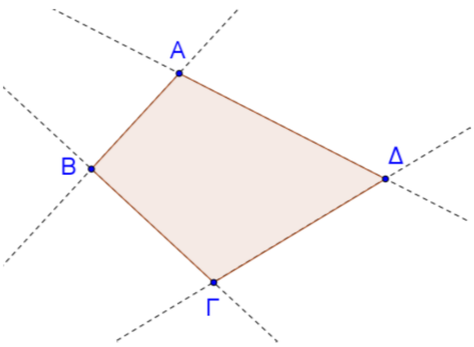
<table>
<tr><th colspan="3">Ευθύγραμμα επίπεδα σχήματα</th></tr>
<tr><td>Επίπεδα σχήματα</td><td colspan="2">Επίπεδα σχήματα είναι τα σχήματα των οποίων όλα τα σημεία βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.</td></tr>
<tr><td>Ευθύγραμμο σχήμα</td><td>Ευθύγραμμο σχήμα ή Πολύγωνο ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Κυρτό
και
Μη Κυρτό
σχήμα</td><td>Ένα ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κυρτό, όταν σχηματίζεται από μια κυρτή τεθλασμένη γραμμή.

Ένα ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται μη κυρτό, όταν δεν είναι κυρτό σχήμα.</td><td>

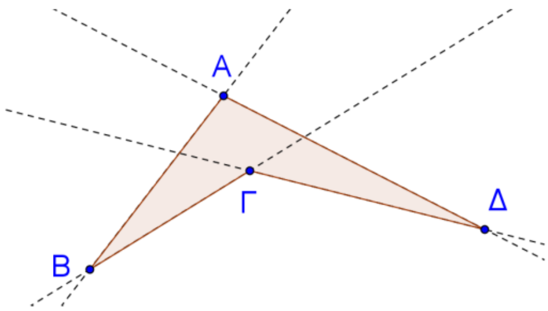

</td></tr>
</table>

Παράδειγμα

- Να χαρακτηρίσετε ως κυρτό και ή μη κυρτό το καθένα από τα πιο κάτω πολύγωνα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λύση:

Το σχήμα 1 είναι κυρτό, γιατί κάθε πλευρά του αφήνει το σχήμα στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Το σχήμα 2 είναι μη κυρτό, γιατί η $B\Gamma$ ούτε η $\Gamma\Delta$ αφήνει όλο το σχήμα στο ίδιο ημιεπίπεδο. Επίσης και η $\Gamma\Delta$ αφήνει όλο το σχήμα στο ίδιο ημιεπίπεδο.

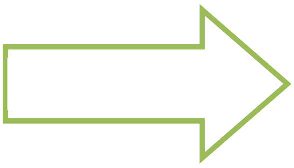
Δραστηριότητα

1. Ποια από τα πιο κάτω πολύγωνα είναι κυρτά και ποια μη κυρτά;

α)

β)

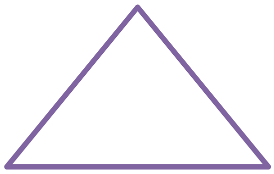
γ)



δ)

ε)

στ)

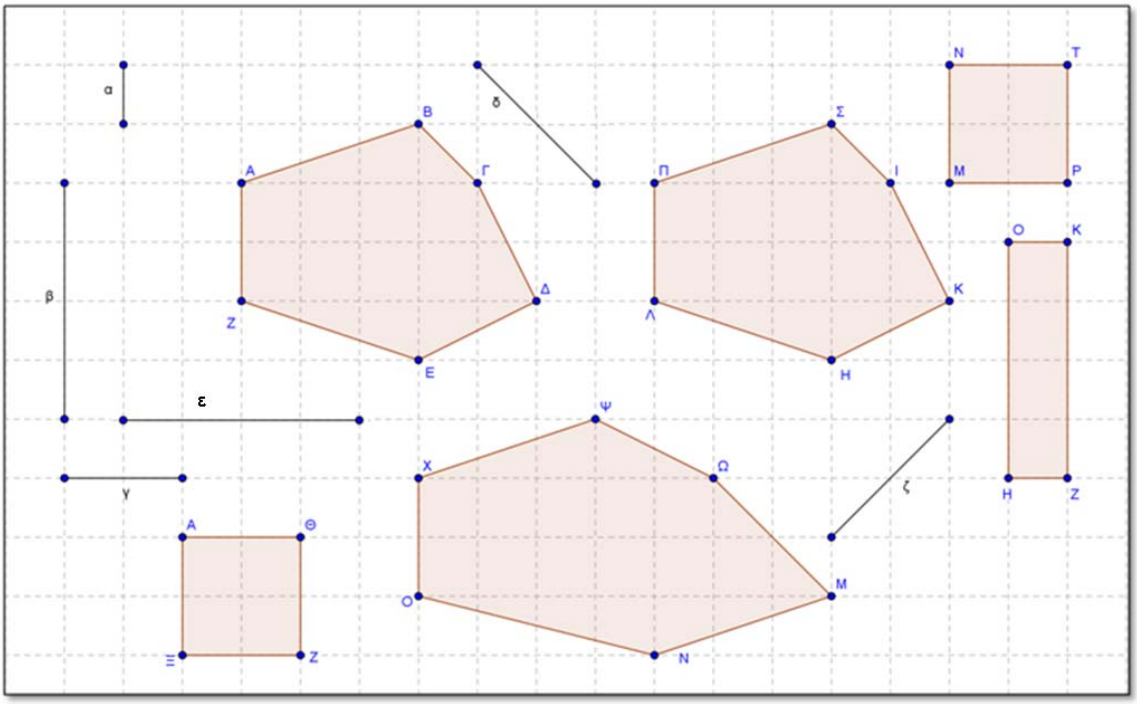


2. Να κατασκευάσετε ένα πολύγωνο που να είναι μη κυρτό.

Μέτρηση Μήκους

Διερεύνηση (1)

- Να βρείτε στο σχήμα ίσα ευθύγραμμα τμήματα και να δικαιολογήσετε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.



Διερεύνηση (2)

- **Τεχνολογία:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για την πιο κάτω κατασκευή:

  α) Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$.

  β) Να τοποθετήσετε ένα σημείο $Β$ πάνω στο $ΑΓ$.

  γ) Να βρείτε το μήκος των $ΑΒ, ΒΓ$ και $ΑΓ$.

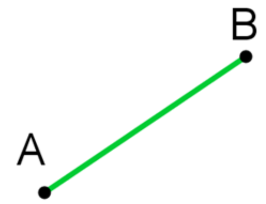
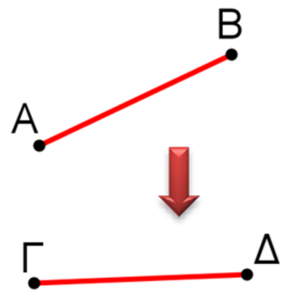
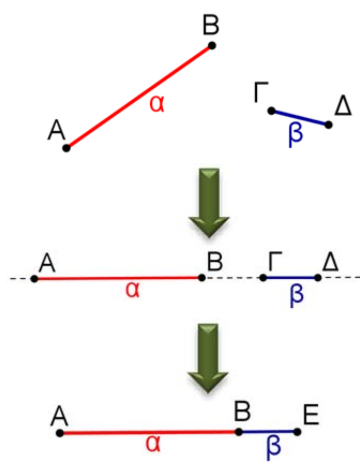
  δ) Να βρείτε το άθροισμα $ΑΒ + ΒΓ$.

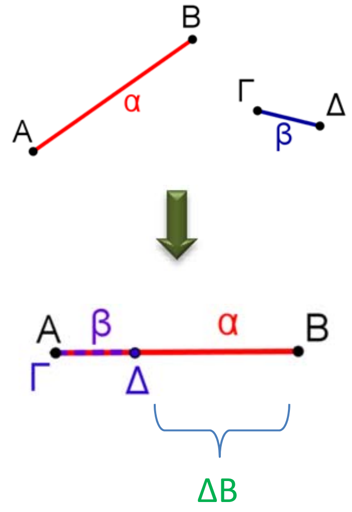
  ε) Να μετακινήσετε το σημείο $Β$ σε διάφορες θέσεις και να καταγράψετε για κάθε θέση τις μετρήσεις σας στον πίνακα.

$ΑΒ$	$ΒΓ$	$ΑΓ$	$ΑΒ + ΒΓ$

  στ) Να βρείτε μια σχέση που συνδέει τα μήκη $ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ$;

Μαθαίνω

Μήκος και Πρόσθεση Ευθυγράμμων Τμημάτων		
Απόσταση δύο σημείων	**Απόσταση** δύο σημείων A και B ονομάζεται το μήκος (AB) του ευθύγραμμου τμήματος AB που τα ενώνει. ➢ *Με το σύμβολο AB εννοούμε ταυτόχρονα δυο διαφορετικά πράγματα: Το **ευθύγραμμο τμήμα** AB, αλλά και το **μήκος** αυτού του ευθύγραμμου τμήματος AB.* ➢ Για να ξεχωρίσουμε το μήκος, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό (AB). Στο βιβλίο αυτό, για απλούστευση θα γράφουμε απλά το: **μήκος $\boldsymbol{AB}$**.	
Ίσα Ευθύγραμμα τμήματα	**Ίσα ευθύγραμμα τμήματα** ονομάζονται τα τμήματα που αν μετατοπιστούν κατάλληλα μπορούν να ταυτιστούν. Ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσο μήκος κι αντίστροφα, δηλαδή: $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta \Leftrightarrow (\mathrm{AB}) = (\Gamma\Delta)$.	
Πρόσθεση και Αφαίρεση Ευθυγράμμων τμημάτων	Για να **προσθέσουμε** ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε διαδοχικά πάνω σε μία ευθεία. Το τμήμα που έχει άκρα την αρχή του πρώτου και το τέλος του τελευταίου είναι το άθροισμά τους. π.χ. Αν $AB = \alpha$ και $\Gamma\Delta = \beta$ τότε το άθροισμα τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα $AE = \alpha + \beta$.	

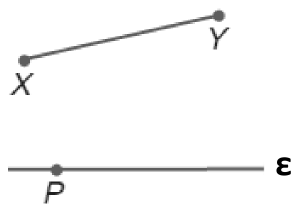
	Για να **αφαιρέσουμε** δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε πάνω σε μία ευθεία έτσι ώστε η αρχή του ενός να συμπίπτει με την αρχή του άλλου. Το τμήμα που έχει ως άκρα τα άλλα άκρα των δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι η διαφορά τους. π.χ. Αν $AB = \alpha$ και $\Gamma\Delta = \beta$ $(\alpha > \beta)$ τότε η διαφορά τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\Delta B = \alpha - \beta$.	
Μέσον ευθύγραμμου τμήματος	**Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος** AB ονομάζουμε το σημείο M του τμήματος, που απέχει εξίσου από τα άκρα του. Δηλαδή: M μέσο του AB $\Leftrightarrow$ AM = MB	 $AM = MB$

Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα PT ίσο με ευθύγραμμο τμήμα XY.

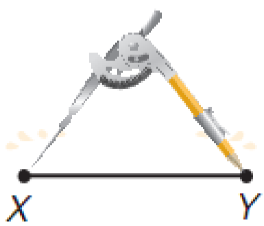
Λύση:

Βήμα 1:



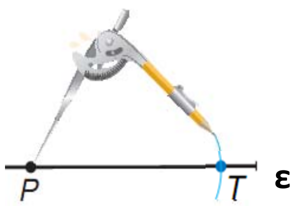
Πάνω σε ευθεία παίρνουμε ε τυχαίο σημείο P.

Βήμα 2:



Ανοίγουμε το διαβήτη ώστε τα άκρα του να συμπέσουν με τα σημεία X και Y.

Βήμα 3:

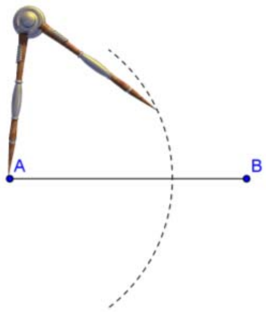


Διατηρώντας το άνοιγμα του διαβήτη ίσο με το XY, γράφουμε τόξο με κέντρο το P που τέμνει την ευθεία ε στο σημείο T . Τότε PT = XY.

2. Να κατασκευάσετε το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.

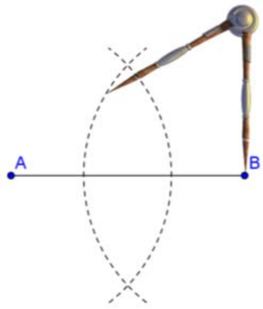
Λύση:

Βήμα 1:



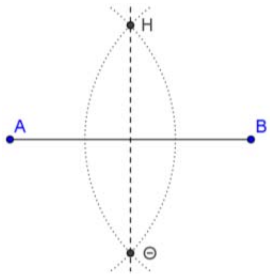
Ανοίγουμε το διαβήτη περισσότερο από το μισό μήκος του AB.
Με κέντρο το άκρο A γράφουμε τόξο.

Βήμα 2:



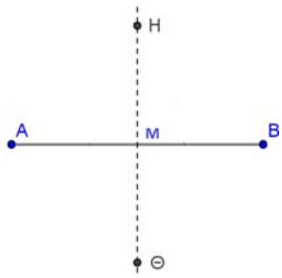
Διατηρώντας το ίδιο άνοιγμα του διαβήτη και με κέντρο το άκρο B, γράφουμε νέο τόξο.

Βήμα 3:



Φέρουμε ευθεία που περνά από τα σημεία τομής H και Θ των δύο τόξων.

Βήμα 4:



Το σημείο τομής M, της ευθείας $H\Theta$ και του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το μέσο του AB.

Δραστηριότητες

1. Τεχνολογία*: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για την πιο κάτω κατασκευή:*

α) Να κατασκευάσετε τρία σημεία A, B, Γ στο επίπεδο, ώστε να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

β) Να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, A\Gamma$.

γ) Να κατασκευάσετε το μέσο M του AB.

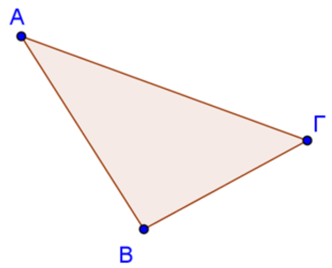
δ) Να κατασκευάσετε το μέσο N του $A\Gamma$.

ε) Να κατασκευάσετε το μήκος των $B\Gamma$ και MN.

στ) Να μετακινήσετε το σημείο B.

ζ) Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μήκη $B\Gamma$ και MN;

2. Στο σχήμα να προεκτείνετε τις πλευρές $ΑΓ$ και $ΒΓ$ προς το μέρος του $Γ$, ώστε $ΒΓ = ΓΔ$ και $ΑΓ = ΓΕ$. Να συγκρίνετε τα μήκη $ΑΒ$ και $ΔΕ$.



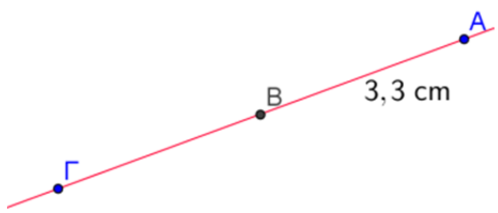
3. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΒ$ με μονάδα μέτρησης το ευθύγραμμο τμήμα $α$. Να χρησιμοποιήσετε μόνο το διαβήτη σας.

4. Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα με μήκος τετραπλάσιο του $ΑΒ$.

5. Το σημείο $Α$ απέχει $10\ cm$ από το σημείο $Β$. Ποια είναι η απόσταση $ΓΑ$, αν είναι γνωστό ότι,

α) Το $Γ$ είναι μέσο του $ΑΒ$.
β) Το $Α$ είναι μέσο του $ΒΓ$.
γ) Το $Β$ είναι μέσο του $ΑΓ$.
δ) Το $Δ$ είναι μέσο του $ΑΒ$ και $Γ$ το μέσο του $ΔΒ$.

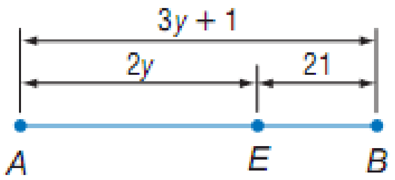
6. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΓ$, αν το σημείο $Β$ είναι το μέσο του $ΑΓ$.



7. Να υπολογίσετε την τιμή του x και το μήκος του AB. Το σημείο M είναι το μέσο του AB, το $AM = (5x - 10)\ cm$ και το $BM = (3x - 2) cm$.

8. Ένα σχοινί μήκους $36\ m$ κόπηκε σε τρία κομμάτια, το πρώτο κομμάτι είναι το μισό του δεύτερου, ενώ το τρίτο είναι κατά $1\ m$ μεγαλύτερο από το διπλάσιο του δεύτερου. Να βρείτε το μήκος του μεγαλύτερου κομματιού.

9. Να υπολογίσετε την τιμή του y και το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων AE και AB, αν $AE = 2y$, $EB = 21$ και $AB = 3y + 1$.

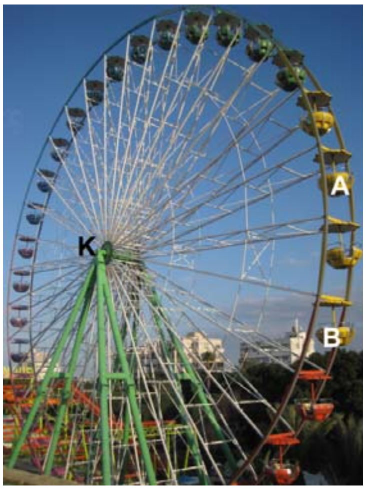


ΓΩΝΙΑ

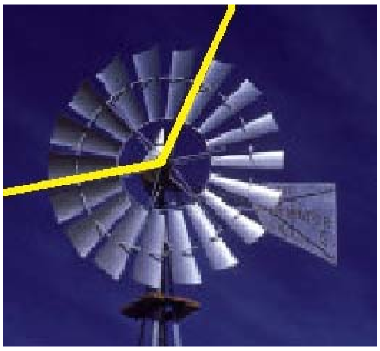
Μέτρηση Γωνίας – Είδη Γωνιών

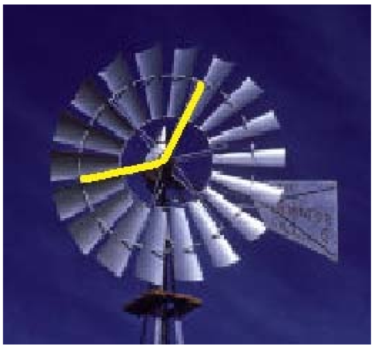
Εξερεύνηση

- Ο διπλανός «τροχός», ο οποίος βρίσκεται σε ένα πάρκο ψυχαγωγίας, έχει 32 βαγόνια και το ύψος του είναι 50 μέτρα. Ο τροχός περιστρέφεται δεξιόστροφα. Να βρείτε πόσο πρέπει να περιστραφεί ο τροχός ώστε το βαγόνι που βρίσκεται στη θέση A να φτάσει στη θέση B.



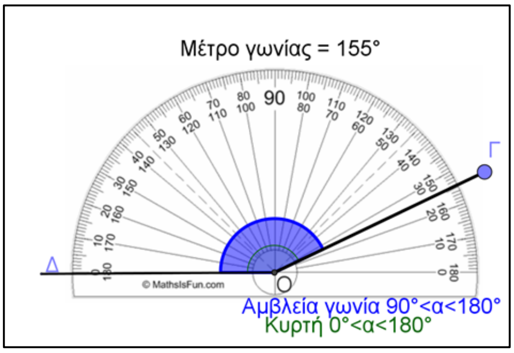
- Να συγκρίνετε τις δύο γωνίες που φαίνονται στους πιο κάτω ανεμόμυλους.





Διερεύνηση

- ***Τεχνολογία:*** *Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En5_Eidos_Gonias.ggb»:*
  α) Να μετακινήσετε το σημείο Γ σε διάφορες θέσεις.
  β) Να εντοπίσετε τα διάφορα είδη γωνιών.



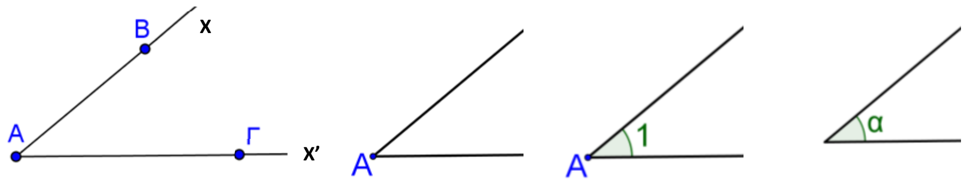
Μαθαίνω

<table>
<tr>
<td>Γωνία</td>
<td colspan="2">

Δύο ημιευθείες με κοινή αρχή χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές. Καθεμιά από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες ονομάζεται **γωνία**.

Η κοινή αρχή K των ημιευθειών ονομάζεται **κορυφή** της γωνίας και οι ημιευθείες Kx και Kx' ονομάζονται **πλευρές** της γωνίας.

Ο τρόπος συμβολισμού των γωνιών φαίνεται πιο κάτω:



$\measuredangle BA\Gamma$ ή $\measuredangle \Gamma AB$
$B\hat{A}\Gamma$ ή $\Gamma\hat{A}B$
γωνία $BA\Gamma$ ή γωνία ΓAB
ή γωνία xAx'

$\measuredangle A$
$\hat{A}$
γωνία A

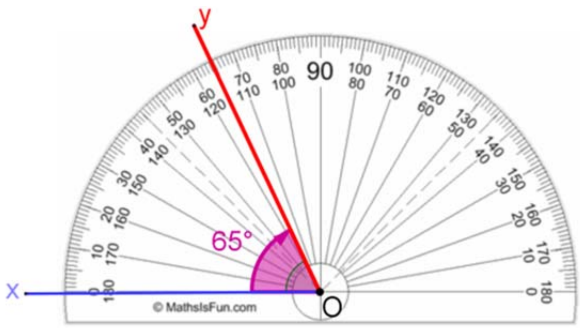
$\measuredangle A_1$
$\widehat{A_1}$
γωνία A_1

$\measuredangle \alpha$
$\hat{\alpha}$
γωνία α

</td>
</tr>
<tr>
<td>Μέτρηση γωνίας</td>
<td colspan="2">

Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το **μοιρογνωμόνιο** (γεωμετρικό όργανο).

Ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση ονομάζεται **μέτρο** γωνίας.



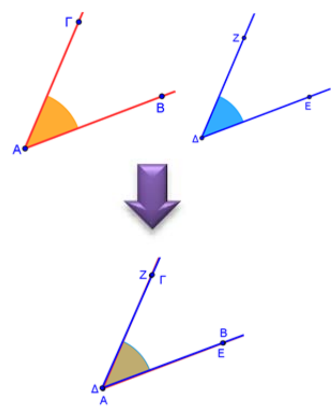
Η **μονάδα μέτρησης γωνίας** είναι η **μοίρα** και συμβολίζεται με °. Η μοίρα αντιστοιχεί στο $\frac{1}{360}$ της πλήρους γωνίας, υποδιαιρείται σε 60 λεπτά $(60')$ και κάθε λεπτό σε 60 δευτερόλεπτα $(60'')$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Ίσες γωνίες</td>
<td>

Ίσες γωνίες ονομάζονται οι γωνίες που αν μετατοπιστούν κατάλληλα μπορούν να ταυτιστούν

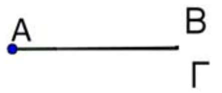
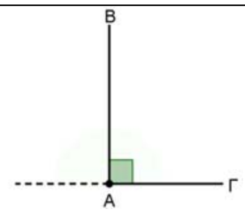
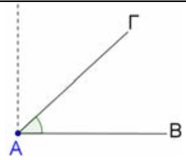
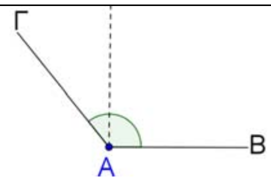
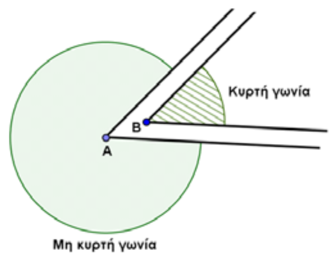
- *Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες και αντίστροφα.*

</td>
<td>



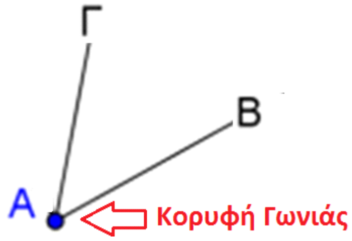
$B\hat{A}\Gamma = E\hat{\Delta}Z.$

</td>
</tr>
</table>

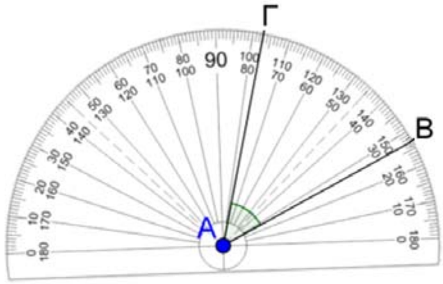
Είδη γωνιάς		
Μηδενική γωνία	**Μηδενική γωνία** λέγεται η γωνία που έχει μέτρο $\mathbf{0^\circ}$.	 $B\hat{A}\Gamma = 0^\circ$
Πλήρης γωνία	**Πλήρης γωνία** είναι η γωνία που έχει μέτρο $\mathbf{360^\circ}$.	 $B\hat{A}\Gamma = 360^\circ$
Ευθεία γωνία	**Ευθεία γωνία** λέγεται η γωνία που έχει μέτρο $\mathbf{180^\circ}$. ▪ *Οι πλευρές της ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.*	 $B\hat{A}\Gamma = 180^\circ$
Ορθή γωνία	**Ορθή γωνία** λέγεται η γωνία που έχει μέτρο $\mathbf{90^\circ}$. ▪ *Η ορθή γωνία είναι το μισό της ευθείας γωνίας.*	 $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$
Οξεία γωνία	**Οξεία γωνία** λέγεται η γωνία που είναι μεγαλύτερη από 0° μικρότερη των 90°.	 $0^\circ < B\hat{A}\Gamma < 90^\circ$
Αμβλεία γωνία	**Αμβλεία γωνία** είναι η γωνία που είναι μεγαλύτερη των 90°και μικρότερη των 180°.	 $90^\circ < B\hat{A}\Gamma < 180^\circ$
Μη κυρτή γωνία	**Μη κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που έχει μέτρο μεγαλύτερο των 180°και μικρότερο των 360°.	
Κυρτή γωνία	**Κυρτή γωνία** λέγεται κάθε γωνία που είναι μικρότερη των 180°.	$0^\circ < \hat{B} < 180^\circ$ $180^\circ < \hat{A} < 270^\circ$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $ΓAB$ με τη βοήθεια μοιρογνωμονίου.

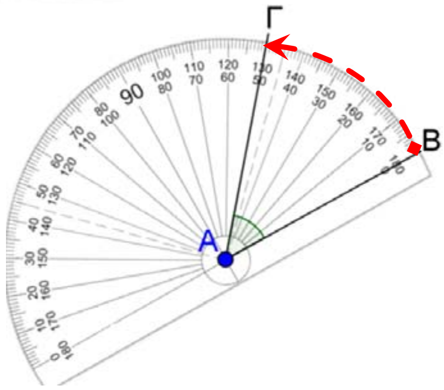


<u>*Βήμα 1:*</u> Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμονίου στην κορυφή A της γωνίας.



<u>*Βήμα 2:*</u> Περιστρέφουμε το μοιρογνωμόνιο και τοποθετούμε την ένδειξη 0 στη μια πλευρά ΑΒ της γωνίας.

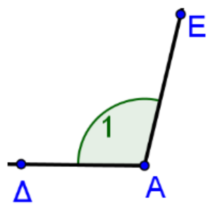
<u>*Βήμα 3:*</u> Διαβάζουμε τον αριθμό που βρίσκεται στην τομή της πλευράς ΑΓ με την κλίμακα του μοιρογνωμονίου. Στο παράδειγμα δίπλα ο αριθμός αυτός είναι το 50.



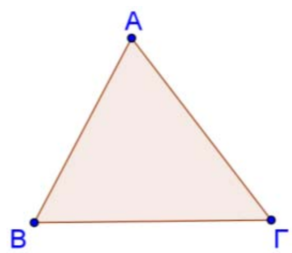
Η γωνία $BAΓ$ έχει μέτρο 50 μοίρες, δηλαδή $B\hat{A}Γ = 50°$.

Δραστηριότητες

1. Να ονομάσετε την γωνία με τρείς διαφορετικούς τρόπους.



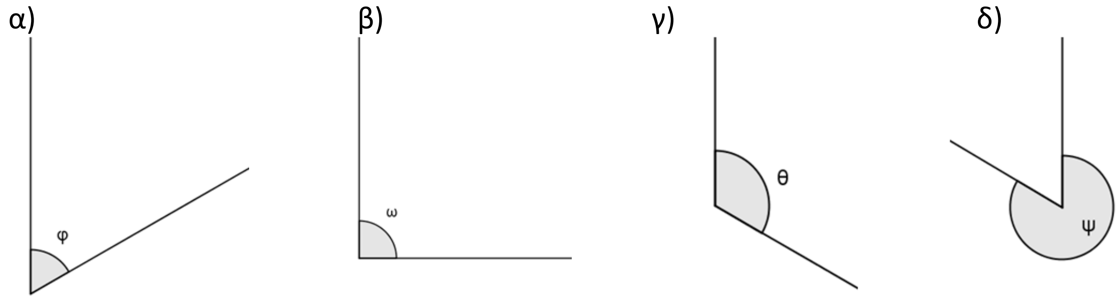
2. Στο σχήμα να ονομάσετε:
   α) Τρείς γωνίες.
   β) Τρία ευθύγραμμα τμήματα.
   γ) Τις δύο ημιευθείες που σχηματίζουν την $\measuredangle A$.
   δ) Το επίπεδο στο οποίο ανήκει το σχήμα.



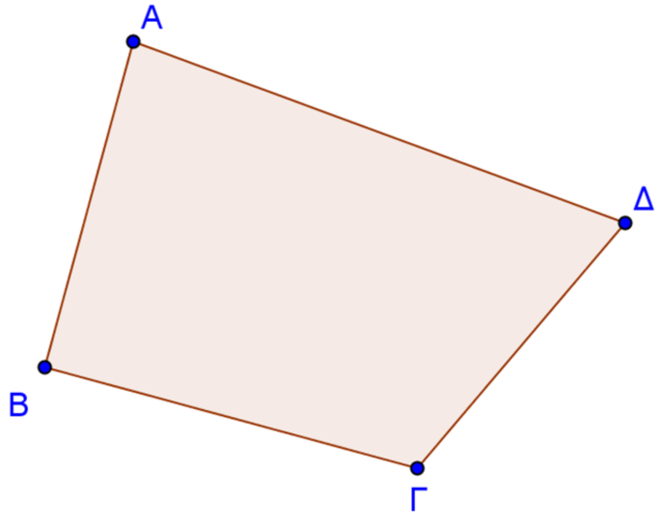
3. Γιατί έχει σημασία η σειρά των σημείων με την οποία ονομάζουμε μια γωνία;

4. Να κατασκευάσετε τις γωνίες $\hat{\alpha} = 60°, \hat{\varphi} = 90°, \hat{\omega} = 132°, \hat{\theta} = 230°$ και $\hat{\psi} = 270°$.

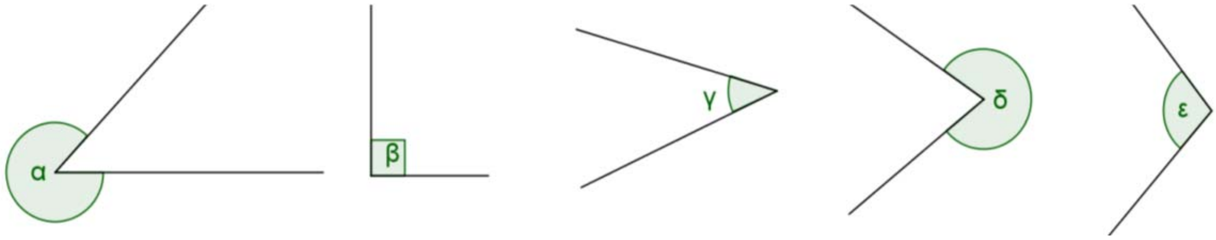
5. Να βρείτε με το μοιρογνωμόνιο σας το μέτρο της γωνίας σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις.



6. Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$. Τί παρατηρείτε;



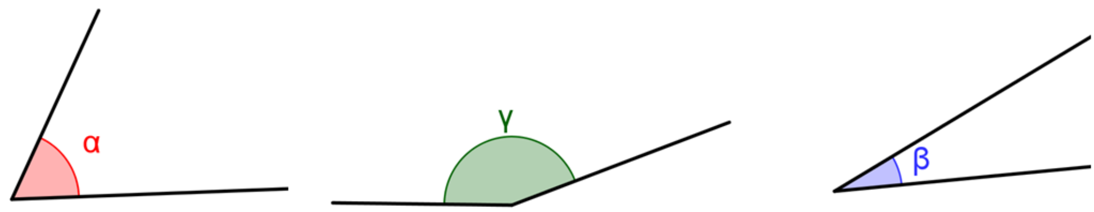
7. Ποιες από τις πιο κάτω γωνίες είναι κυρτές και ποιες μη κυρτές;



8. Να εξετάσετε την ορθότητα σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις διαγράφοντας ότι <u>δεν</u> ισχύει, στη διπλανή στήλη του πίνακα:

α) Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.	*Σωστό / Λάθος*
β) Όλες οι οξείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.	*Σωστό / Λάθος*
γ) Οι αμβλείες γωνίες είναι μη κυρτές.	*Σωστό / Λάθος*

9. Να συγκρίνετε τις πιο κάτω γωνίες και να τις γράψετε κατά σειρά από την μεγαλύτερη στην μικρότερη.

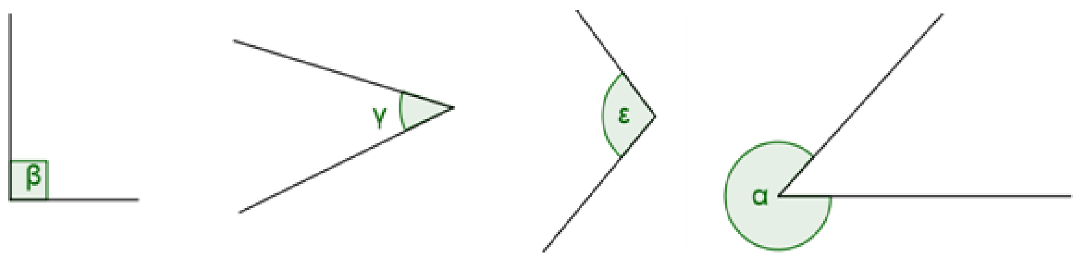


10. Να γράψετε το είδος της κάθε γωνίας στον πιο κάτω πίνακα.

Μέτρο γωνίας	Είδος γωνίας
45^{o}	
190^{o}	
134^{o}	
360^{o}	

Μέτρο γωνίας	Είδος γωνίας
90^{o}	
99^{o}	
0^{o}	
270^{o}	

11. Να χαρακτηρίσετε ως οξεία ή αμβλεία ή ορθή όπου είναι δυνατόν, καθεμιά από τις πιο κάτω γωνίες.



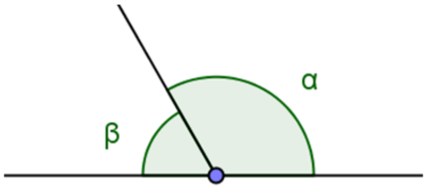
12. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του ωροδείκτη και του λεπτοδείκτη σε ένα ρολόι, όταν η ώρα είναι:
    α) $3:00$
    β) $6:30$
    γ) $12:00$

Συμπληρωματικές, Παραπληρωματικές και Κατακορυφήν Γωνίες

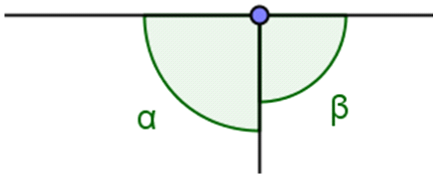
Διερεύνηση (1)

- Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών α και β σε κάθε ζεύγος γωνιών. Τι παρατηρείτε;

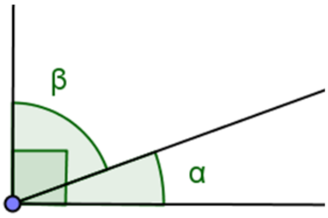
α)



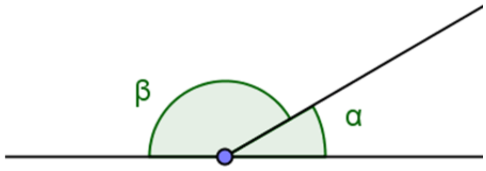
β)



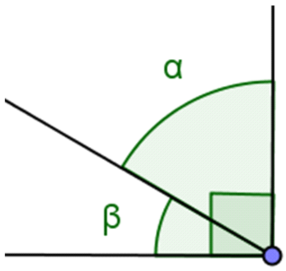
γ)



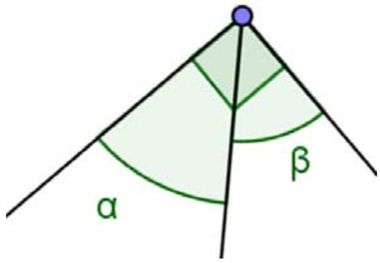
δ)



ε)



στ)

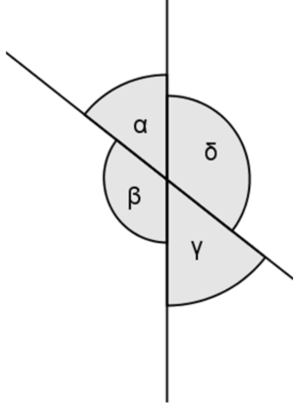


Διερεύνηση (2)

- **Τεχνολογία:** *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για την πιο κάτω κατασκευή:*

  α) Να κατασκευάσετε δύο ευθείες που τέμνονται. Να μετρήσετε και να συγκρίνετε τις γωνίες που σχηματίζονται, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

  β) Να μετακινήσετε τις ευθείες σε διάφορες θέσεις και να βρείτε τη σχέση μεταξύ των γωνιών.



Διερεύνηση (3)

Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για την πιο κάτω κατασκευή:*

α) Να κατασκευάσετε γωνία $\measuredangle AKB$.

β) Με την εντολή «διχοτόμος γωνίας» να φέρετε τη διχοτόμο της $\measuredangle AKB$.

γ) Να τοποθετήσετε σημείο Γ στη διχοτόμο της κυρτής $\measuredangle AKB$.

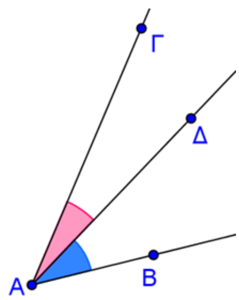
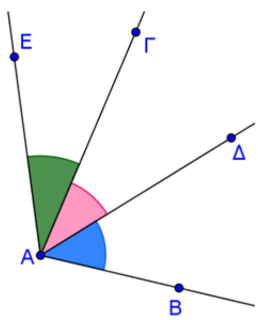
δ) Να συμπληρώσετε την πρώτη γραμμή του πιο κάτω πίνακα.

ε) Να μετακινήσετε τα σημεία A και Γ και να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες γραμμές του πίνακα.

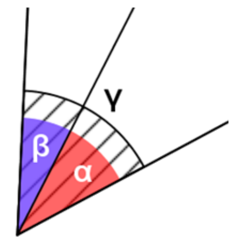
$\measuredangle AKB$	$\measuredangle AK\Gamma$	$\measuredangle BK\Gamma$

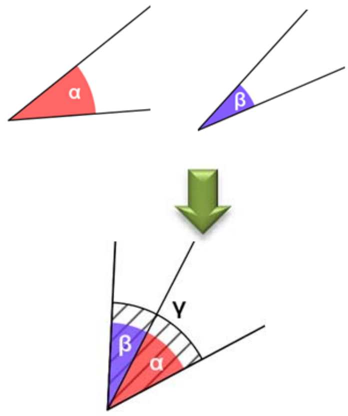
- Να γράψετε τις σχέσεις που προκύπτουν για το μέτρο των πιο πάνω γωνιών.
- Να δώσετε έναν ορισμό για τη διχοτόμο της γωνίας.

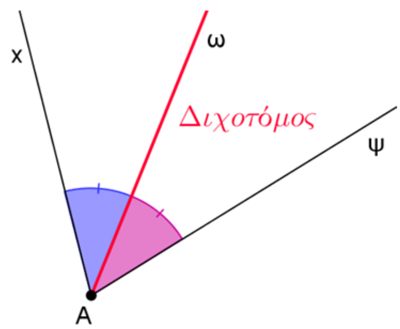
Μαθαίνω

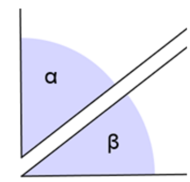
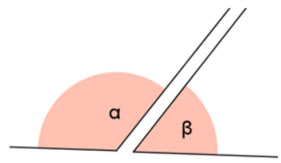
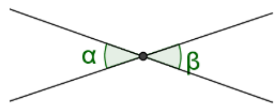
Εφεξής και διαδοχικές γωνιές – Άθροισμα και Διαφορά γωνιών –Διχοτόμος γωνίας		
Εφεξής γωνίες	**Εφεξής γωνίες** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο. π.χ. η $\Gamma\hat{A}\Delta$ και η $\Delta\hat{A}B$ είναι εφεξής γωνίες. Διότι η A είναι κοινή κορυφή, η $A\Delta$ είναι η κοινή πλευρά τους και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.	
Διαδοχικές γωνίες	**Διαδοχικές γωνίες** ονομάζονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμία από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της. π.χ. Οι γωνίες $E\hat{A}\Gamma$, $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}B$ είναι διαδοχικές γωνίες.	

<table>
<tr>
<td>Άθροισμα εφεξής γωνιών</td>
<td>Άθροισμα δύο εφεξής γωνιών ονομάζεται η γωνία με πλευρές τις δύο μη κοινές πλευρές των εφεξής γωνιών και κορυφή την κοινή κορυφή των δύο εφεξής γωνιών.

π.χ. στο σχήμα $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Άθροισμα γωνιών</td>
<td>Άθροισμα δύο οποιονδήποτε γωνιών ονομάζεται το άθροισμα δύο εφεξής γωνιών ίσων προς αυτές.

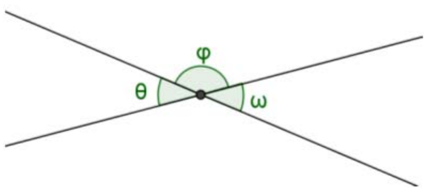
π.χ. στο σχήμα $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Διχοτόμος γωνίας</td>
<td>Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία η οποία έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη διαιρεί σε δύο ίσες γωνιές.

π.χ. $A\omega$ διχοτόμος της $x\hat{A}\psi$
$\Leftrightarrow x\hat{A}\omega = \omega\hat{A}\psi$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Συμπληρωματικές, Παραπληρωματικές και Κατακορυφήν γωνίες		
Συμπληρωματικές	**Συμπληρωματικές** γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα μια ορθή γωνία (90°). π.χ. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι συμπληρωματικές. Λέμε επίσης ότι η γωνία α είναι συμπληρωματική της γωνίας β.	 $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^o$
Παραπληρωματικές	**Παραπληρωματικές** γωνίες είναι δύο γωνίες με άθροισμα μια ευθεία γωνία (180°). π.χ. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές. Λέμε επίσης ότι η γωνία α είναι παραπληρωματική της γωνίας β.	 $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^o$
Κατακορυφήν	**Κατακορυφήν** ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες. π.χ. οι $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν γωνίες Λέμε επίσης ότι η γωνία α είναι κατακορυφήν της β. ▪ *Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*	 $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

Παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι οι κατακορυφήν γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\omega}$ είναι ίσες μεταξύ τους.



Λύση:

$\hat{\theta} + \hat{\varphi} = 180^o$ παραπληρωματικές. Άρα $\hat{\theta} = 180^o - \hat{\varphi}$

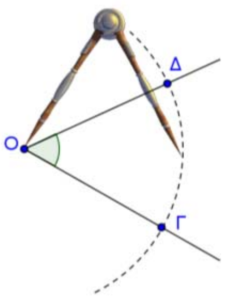
$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^o$ παραπληρωματικές. Άρα $\hat{\omega} = 180^o - \hat{\varphi}$

Συμπέρασμα $\hat{\theta} = \hat{\omega}$.

2. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο μίας γωνίας με χάρακα και διαβήτη.

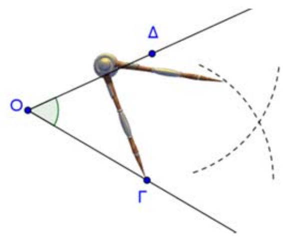
Λύση:

Βήμα 1:



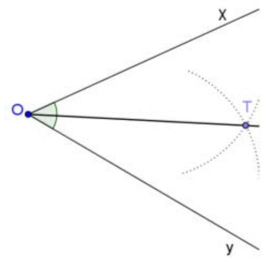
Με κέντρο την κορυφή της γωνίας O γράφουμε τόξο $ΓΔ$.

Βήμα 1:



Στη συνέχεια με κέντρο το σημείο $Γ$ γράφουμε δύο τόξα με το ίδιο άνοιγμα.

Βήμα 3:

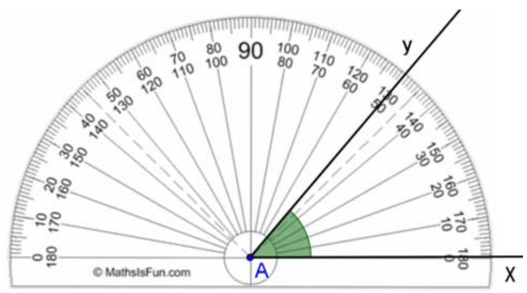


Η ημιευθεία OT, όπου T το σημείο τομής των τόξων, είναι η διχοτόμος της γωνίας xOy.

3. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο μίας γωνίας με τη χρήση μοιρογνωμονίου.

Λύση:

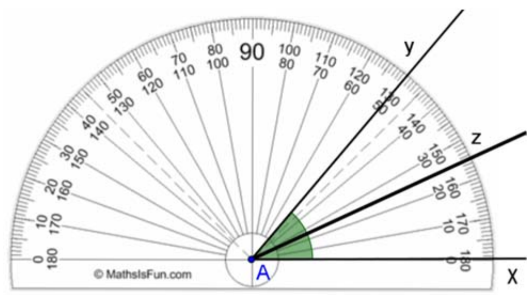
Βήμα 1:



Το μέτρο της γωνίας xAy είναι $50°$

$50° : 2 = 25°$.

Βήμα 2:



Το μέτρο της γωνίας xAz είναι $25°$ άρα ημιευθεία AZ είναι διχοτόμος της $x\hat{A}z$.

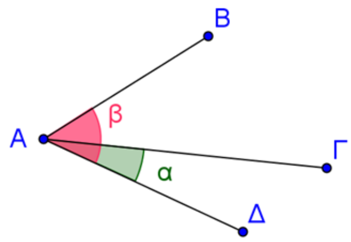
Δραστηριότητες

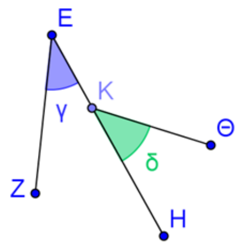
1. Να κατασκευάσετε γωνία $\hat{\beta} = 110°$ και την κατακορυφήν της.

2. Να κατασκευάσετε γωνία $\hat{\alpha} = 65°$ και την εφεξής συμπληρωματική της.

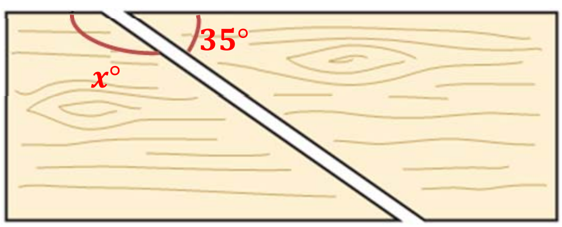
3. Η Αντωνία πρόσθεσε τα πιο κάτω ζεύγη οξειών γωνιών:
   α) $30° + 40° = 70°$
   β) $20° + 15^o = 35^o$
   γ) $10° + 70° = 80°$
   Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «*Το άθροισμα δύο οξειών γωνιών είναι οξεία γωνία*». Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι το συμπέρασμα της Αντωνίας είναι λανθασμένο.

4. Ο καθηγητής σχεδίασε τις πιο κάτω γωνίες και ρώτησε κατά πόσο υπάρχει ζεύγος εφεξής γωνιών. Ο Παναγιώτης απάντησε ότι το ζεύγος γωνιών $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ είναι εφεξής γωνίες ενώ ο Γιώργος απάντησε ότι εφεξής γωνίες είναι το ζεύγος $\hat{\gamma}, \hat{\delta}$. Ο καθηγητής διαφώνησε και με τους δύο. Να εξηγήσετε, γιατί ο καθηγητής διαφώνησε.





5. Ένας ξυλουργός χρησιμοποιεί δίσκο κοπής με γωνία 35°, για να κόψει ένα σανίδι. Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας x που δημιουργείται από την κοπή;



6. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, όπου είναι δυνατόν:

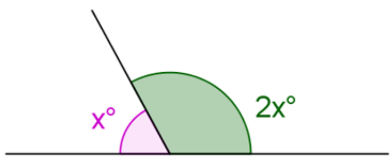
Γωνία $\hat{A}$	Συμπληρωματική της $\hat{A}$	Παραπληρωματική της $\hat{A}$
$42°$	$48°$	$138°$
$10°$		
$27°$		
$90°$		
$110°$		
$210°$		
	$33°$	
		$104°$

7. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι τριπλάσια από την παραπληρωματική της.

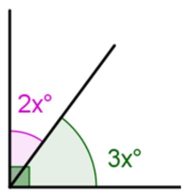
8. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι ίση με τη συμπληρωματική της.

9. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε κάθε περίπτωση.

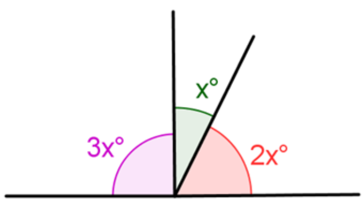
α)



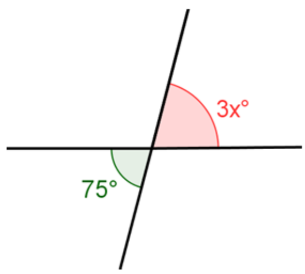
β)



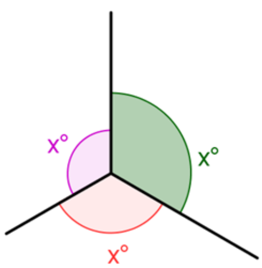
γ)



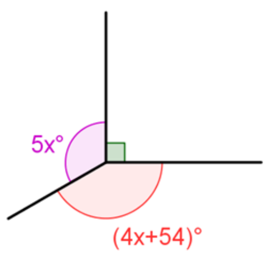
δ)



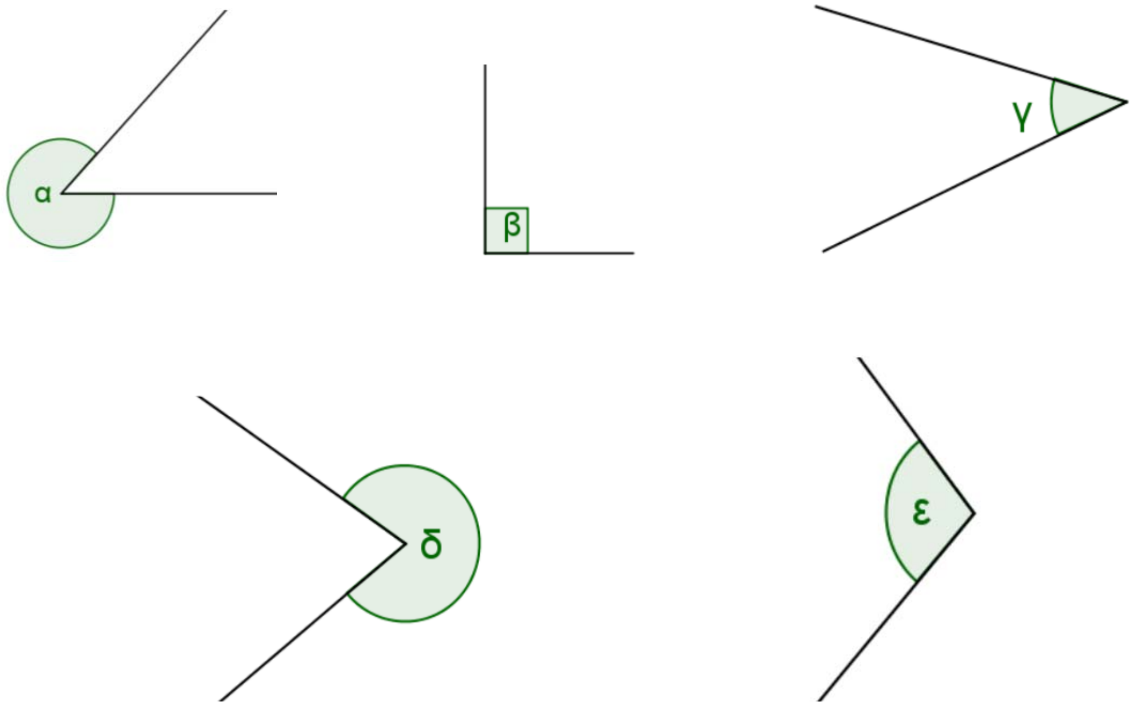
ε)



στ)



10. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο σε καθεμιά από τις πιο κάτω γωνίες.



11. Να κατασκευάσετε τη γωνία $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 32^{\mathrm{o}}$. Σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις να φέρετε την ημιευθεία ΑΓ και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$, αν:

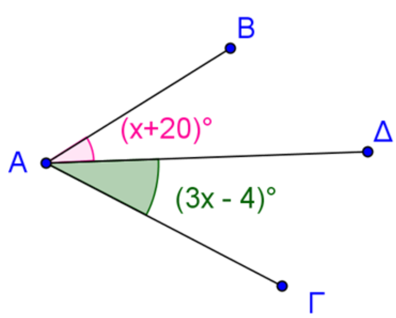
α) Η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Delta$.

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.

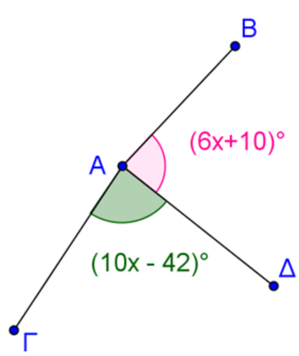
γ) Η AB είναι διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}\Delta$.

12. Στα σχήματα πιο κάτω η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε κάθε περίπτωση.

α)



β)

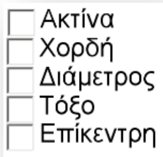


Βασικά Στοιχεία Κύκλου

Διερεύνηση (1)

- **Τεχνολογία:** Να ανοίξετε εφαρμογίδιο *«A_En5_Stoixeia_Kyklou.ggb»*

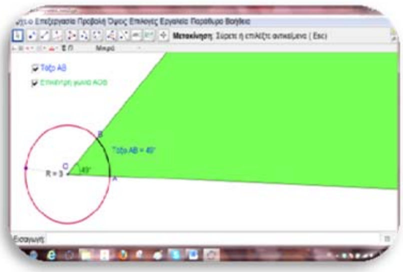
α) Να επιλέξετε ένα από τα στοιχεία που φαίνονται δίπλα.
β) Να μετακινήσετε τα μπλε σημεία του κύκλου σε διάφορες θέσεις.
γ) Να επαναλάβετε τη διαδικασία και για τα άλλα στοιχεία.



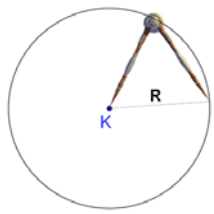
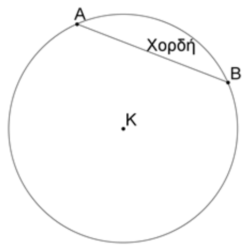
Διερεύνηση (2)

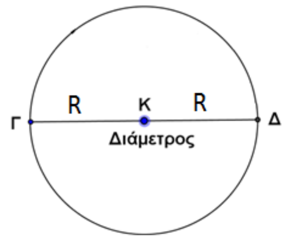
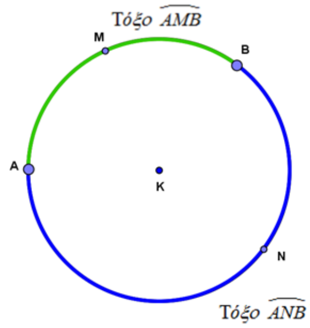
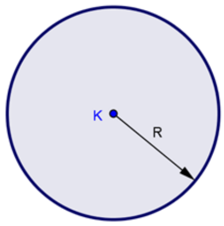
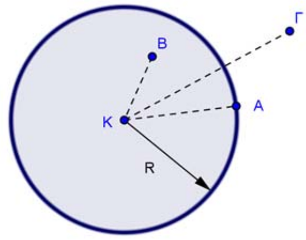
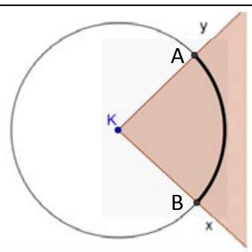
- ***Τεχνολογία:*** Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_Sxesi_eggegramenis_toxou.ggb»*.

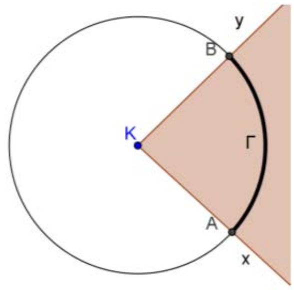
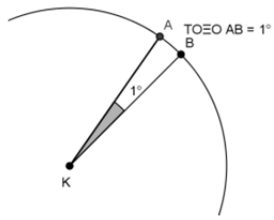
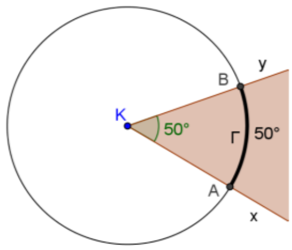
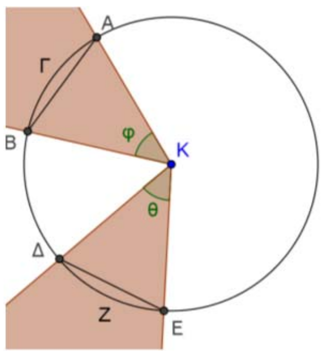
α) Να μετακινήσετε τα σημεία A και B, και να εξετάσετε ποια σχέση συνδέει το μέτρο ενός τόξου με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας.
β) Να μεταβάλετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου και να γράψετε τις παρατηρήσεις.



Μαθαίνω

Στοιχεία Κύκλου		
Κύκλος	**Κύκλος** ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση R (ακτίνα) από ένα σταθερό σημείο K (κέντρο) του επιπέδου. Γράφουμε για συντομία κύκλος (K, R). Δύο κύκλοι με την ίδια ακτίνα είναι ίσοι.	
Χορδή κύκλου	**Χορδή κύκλου** ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του πάνω στον κύκλο. π.χ. η AB είναι χορδή του κύκλου.	

Διάμετρος κύκλου	**Διάμετρος κύκλου** είναι η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου. π.χ. η $ΓΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου. ▪ *Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή κύκλου και έχει μήκος διπλάσιο από την ακτίνα (R), δηλαδή $ΓΔ = 2R$.* ▪ *Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου.*	
Τόξο κύκλου	Δύο σημεία A και B του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη, που το καθένα ονομάζεται **τόξο** $\overset{\frown}{AB}$ **του κύκλου** με άκρα A και B. ▪ *Τα σημεία A και B χωρίζουν τον κύκλο σε δύο τόξα. Τα δύο τόξα που ορίζονται στον κύκλο από τα σημεία A και B, συμβολίζονται $\overset{\frown}{AMB}$ και $\overset{\frown}{ANB}$, όπου M και N είναι ενδιάμεσα σημεία των αντίστοιχων τόξων.* ▪ *Η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη που ονομάζονται ημικύκλια.*	
Κυκλικός δίσκος	**Κυκλικός δίσκος** είναι ο κύκλος (K, R) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει. ▪ *Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου (K, R) απέχουν από το κέντρο K απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα R.*	
Θέση σημείου ως προς κύκλο	▪ Αν για το σημείο Α ισχύει $KA = R$, τότε το σημείο A **ανήκει** στον κύκλο. ▪ Αν για το σημείο Β ισχύει $KB < R$, τότε το σημείο Β ονομάζεται **εσωτερικό** σημείο του κύκλου. ▪ Αν για το σημείο Γ, $KΓ > R$, τότε το σημείο Γ ονομάζεται **εξωτερικό** σημείο του κύκλου.	
Επίκεντρη γωνία	**Επίκεντρη γωνία** ονομάζεται μια γωνία της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου. π.χ. στο σχήμα η γωνία $y\widehat{K}x$ είναι επίκεντρη.	

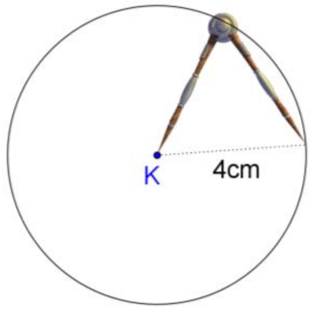
Αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης	Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A και B. Το τόξο $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ του κύκλου, που περιέχεται στο εσωτερικό της επίκεντρης γωνίας ονομάζεται **αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας**. π.χ. το $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ είναι το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης $\mathrm{y\widehat{K}x}$ και λέμε ότι η γωνία $\mathrm{A\widehat{K}B}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$. Σε κάθε επίκεντρη γωνία αντιστοιχεί ένα τόξο που οι πλευρές της γωνιάς αποκόπτουν από τον κύκλο και αντίστροφα σε κάθε τόξο αντιστοιχεί μια επίκεντρη γωνία.	
Μοναδιαίο τόξο	**Μοναδιαίο τόξο** θεωρούμε το τόξο που είναι ίσο με το $\frac{1}{360}$ του κύκλου και ονομάζεται **τόξο μίας μοίρας** $(1°)$. Το μοναδιαίο τόξο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μίας μοίρας.	
Μέτρο τόξου	Σε τόξο μ μοιρών (συμβολικά μ°) βαίνει επίκεντρη γωνία επίσης μ°. π.χ. το τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ έχει **μετρό** ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας του $\widehat{\mathrm{xKy}} = 50^{\circ}$	
Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου	Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ▪ *Αν δύο επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα, και αντίστροφα.* *π.χ.* στο σχήμα αν $\hat{\varphi} = \hat{\theta} \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{A\Gamma B}} = \widehat{\mathrm{\Delta ZE}}$ ▪ *Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες, και αντίστροφα.* π.χ. στο σχήμα $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}} = \widehat{\mathrm{\Delta ZE}} \Leftrightarrow AB = \Delta E$.	

Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$.

Λύση:

Για να κατασκευάσουμε έναν κύκλο $(K, 4\ cm)$, τοποθετούμε σημείο Κ που θα είναι το κέντρο του κύκλου και ανοίγουμε το διαβήτη ώστε τα άκρα του να απέχουν μεταξύ τους $4\ cm$. Τοποθετούμε το μεταλλικό άκρο του διαβήτη σταθερά στο σημείο K και το άλλο άκρο του διαβήτη στο χαρτί. Στη συνέχεια περιστρέφουμε το διαβήτη μια ολόκληρη στροφή στο επίπεδο και το σχήμα που δημιουργείται είναι κύκλος με κέντρο K και ακτίνα $4\ cm$.



Δραστηριότητες

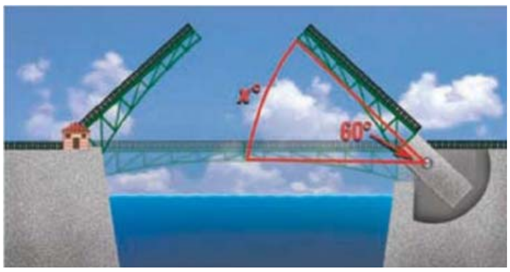
1. Να κατασκευάσετε:
   α) Κύκλο με κέντρο K και ακτίνα $5\ cm$.
   β) Πέντε κύκλους με ακτίνα $3\ cm$.
   γ) Κύκλο με διάμετρο $80\ mm$.

2. Να κατασκευάσετε δύο ομόκεντρους κύκλους (κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο) με ακτίνες $2\ cm$ και $28\ mm$.

3. Σε κύκλο $(K, 6\ cm)$ και να κατασκευάσετε τα πιο κάτω:

   α) Μία διάμετρο AB.
   β) Μία επίκεντρη γωνία $\Gamma\widehat{K}\Delta$.
   γ) Δύο ακτίνες KE και KZ.
   δ) Η $E\Theta$ να είναι χορδή.
   ε) Το $\overset{\frown}{\mathrm{BZH}}$ να είναι τόξο·

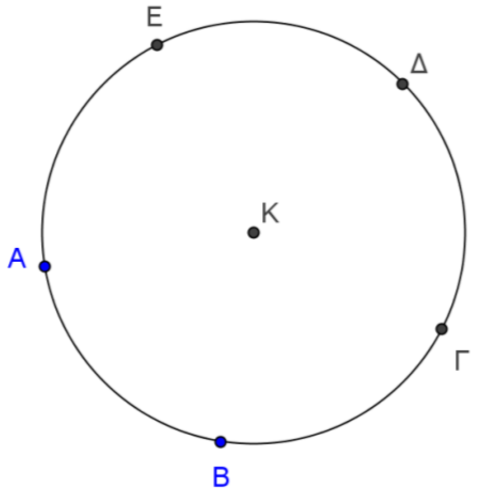
4. Στη διπλανή φωτογραφία φαίνεται μια γέφυρα που ανοίγει. Η γωνία που σχηματίστηκε από την οριζόντια θέση μέχρι το σημείο ανοίγματος είναι $60°$. Να βρείτε το μέτρο του τόξου x.



Τεχνολογία: *Οι δραστηριότητες* 5 *και* 6 *μπορεί να γίνουν και με τη χρήση λογισμικού Geogebra ή Capri II plus.*

5. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 5\ cm)$, χορδή $AB = 3\ cm$, επίκεντρη $B\widehat{K}\Gamma = 60°$ και τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ που να αντιστοιχεί σε $45°$.

6. Να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{\Delta E A}$ και $\overset{\frown}{\Delta A E}$, αν $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta E} = \overset{\frown}{EA}$.



7. Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο Ψ.Ε.Π. «*P02_A_DEC12/S01-01/index.html*», για να σας βοηθήσει να επιλύσετε το πιο κάνω πρόβλημα.

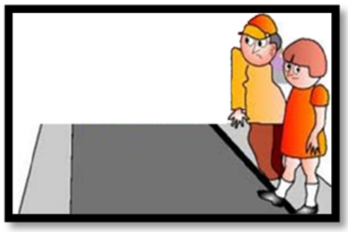
Πως θα κατασκευάσετε έναν κύκλο με διάμετρο $6\ m$, αν το μόνο εργαλείο που έχετε στην διάθεσή σας είναι ένα σχοινί μήκους $3\ m$ και δύο μικρά κλαδιά;

8. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$ και χορδές $AB = \Delta E = 3\ cm$.
   α) Να μετρήσετε τις επίκεντρες γωνίες $A\widehat{K}B$ και $\Delta\widehat{K}E$.
   β) Να υπολογίσετε το μέτρο των τόξων AB *και* ΔE.

Κάθετες Ευθείες – Απόσταση Σημείου από Ευθεία – Απόσταση Παραλλήλων Ευθειών

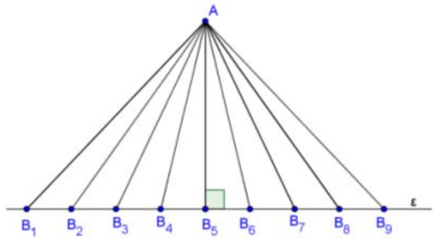
Εξερεύνηση

- Πώς θα διασταυρώσει το δρόμο κάποιος πεζός όσο πιο γρήγορα γίνεται με τον ελάχιστο κίνδυνο από τα διερχόμενα οχήματα;



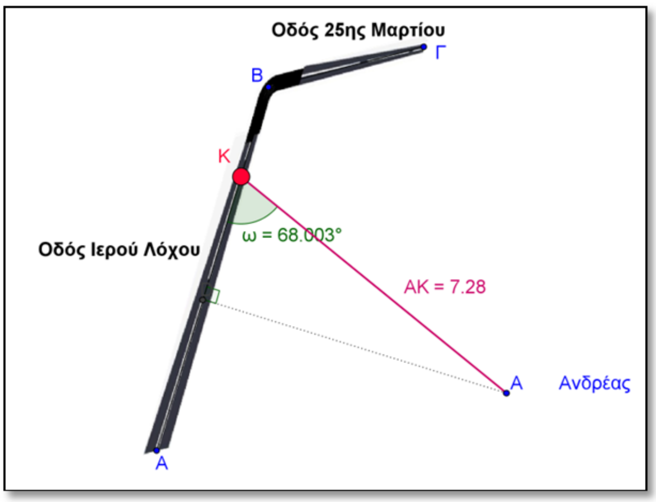
Διερεύνηση (1)

- Στο διπλανό σχήμα τα σημεία $B_1, B_2, \dots, B_9$ είναι σημεία της ευθείας ε. Να εξετάσετε ποιο από τα ευθύγραμμα τμήματα AB_1, AB_2, … , AB_9 έχει το πιο μικρό μήκος;



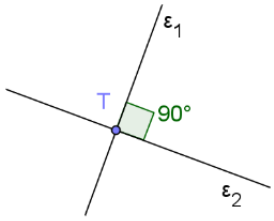
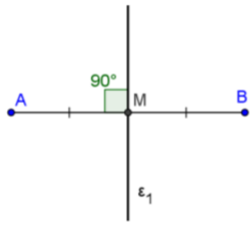
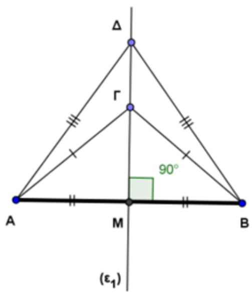
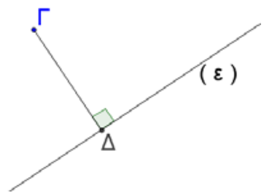
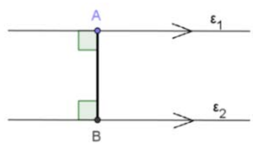
Διερεύνηση (2)

- **Τεχνολογία:** Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_Apostasi_simeiou_apo_eftheia.ggb»*.



- Να μετακινήσετε το σημείο K.
- Σε ποια θέση του σημείου K η απόσταση του Ανδρέα από το σημείο K γίνεται όσο το δυνατό πιο μικρή;

Μαθαίνω

Κάθετες Ευθείες – Αποστάσεις – Μεσοκάθετος		
Κάθετες	**Κάθετες** ονομάζονται δύο ευθείες που τέμνονται και σχηματίζουν μεταξύ τους ορθή γωνία. ▪ Ο συμβολισμός $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ δηλώνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται κάθετα. ▪ Το $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ διαβάζεται «η ευθεία ε_1 είναι κάθετη με την ευθεία ε_2 » ή «ε_1και ε_2 κάθετες μεταξύ τους».	
Μεσοκάθετος	**Μεσοκάθετος** ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και περνά από το μέσο του. π.χ. Αν M μέσο AB και $\varepsilon_1 \perp AB$ τότε ε_1 μεσοκάθετος του AB. ▪ *Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος, ισαπέχει από τα άκρα του.* π.χ. Αν ε_1 μεσοκάθετος του AB τότε $A\Gamma = \Gamma B$ και $A\Delta = \Delta B$.	 
Απόσταση σημείου από ευθεία	**Απόσταση σημείου από ευθεία** ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο στην ευθεία. π.χ. Η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ε είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ που είναι η κάθετη από το σημείο Γ στην ευθεία ε.	
Απόσταση παράλληλων ευθειών	**Απόσταση παράλληλων ευθειών** ονομάζεται το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σε αυτές. π.χ. Η απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2 είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.	

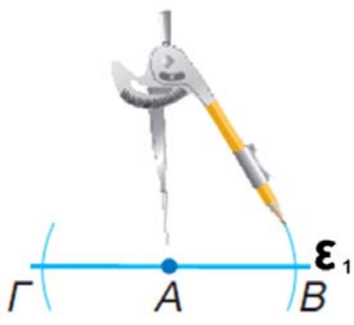
Παραδείγματα

1. Από σημείο A της ευθείας ε_1, να φέρετε κάθετη σε αυτή:
   α) με χάρακα και διαβήτη
   β) με χάρακα και γνώμονα
   γ) με μοιρογνωμόνιο

Λύση:

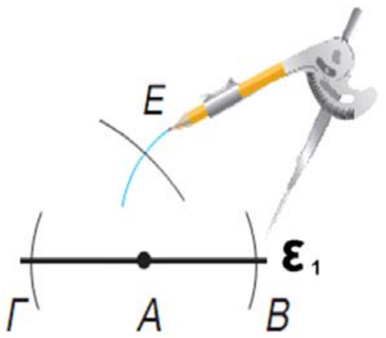
α) Κατασκευή **με χάρακα και διαβήτη**

Βήμα 1:



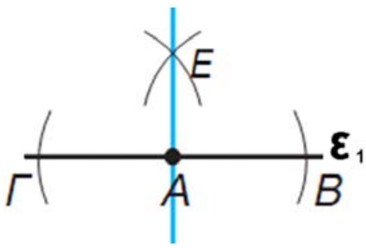
Με κέντρο το A γράφουμε τόξα που τέμνουν την ευθεία ε_1 στα σημεία B και Γ.

Βήμα 2:



Με άνοιγμα του διαβήτη μεγαλύτερο του $A\Gamma$ και με κέντρα το Γ και το B, γράφουμε δύο τόξα που τέμνονται στο E.

Βήμα 3:



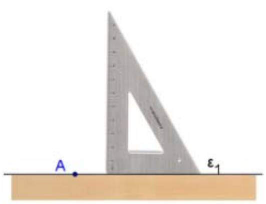
Φέρουμε την ευθεία AE. Η AE είναι κάθετη με την $B\Gamma$.

β) Κατασκευή **με χάρακα και γνώμονα**

Βήμα 1:

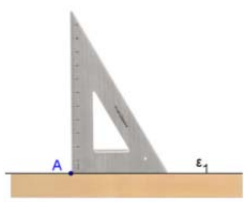
Τοποθετούμε το χάρακα πάνω στην ευθεία.

Βήμα 2:



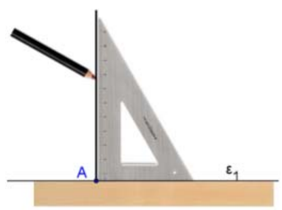
Τοποθετούμε το γνώμονα πάνω στον χάρακα.

Βήμα 3:



Μετατοπίζουμε το γνώμονα μέχρι να ακουμπήσει το σημείο A.

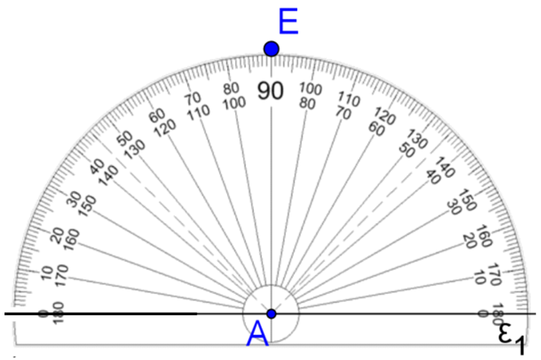
Βήμα 4:



Φέρουμε την κάθετη με το μολύβι.

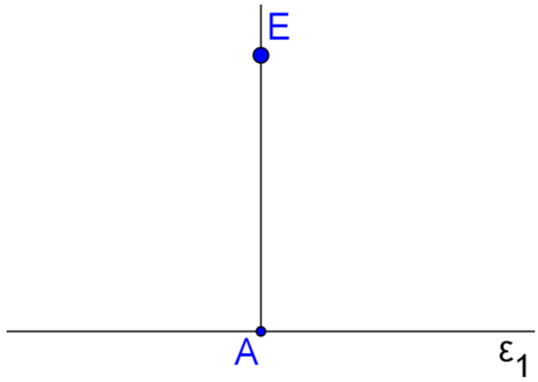
γ) Κατασκευή **με μοιρογνωμόνιο**

Βήμα 1:



Τοποθετούμε το κέντρο του μοιρογνωμονίου στο σημείο A και την ένδειξη 0 πάνω στην ευθεία ε_1. Γράφουμε το σημείο E στην ένδειξη $90°$.

Βήμα 2:



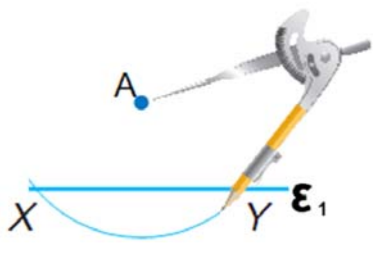
Γράφουμε την ευθεία AE .

2. Από σημείο Α εκτός ευθείας ε_1 να φέρετε κάθετη σε αυτή:
   α) με χάρακα και διαβήτη
   β) με χάρακα και γνώμονα

Λύση:

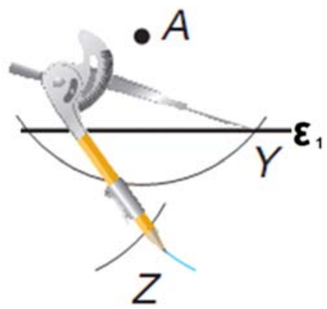
α) Κατασκευή **με χάρακα και διαβήτη**

Βήμα 1:



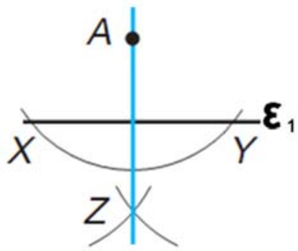
Με κέντρο το σημείο A γράφουμε τόξο που τέμνει την ευθεία ε_1 σε σημεία X και Y.

Βήμα 2:



Με άνοιγμα του διαβήτη μεγαλύτερο του μισού του XY και γράφουμε τόξα με κέντρα το X και το Y που τέμνονται στο Z.

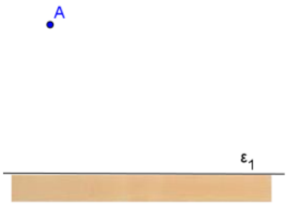
Βήμα 3:



Με το χάρακα φέρουμε την ευθεία AZ που είναι κάθετη με την ευθεία ε_1.

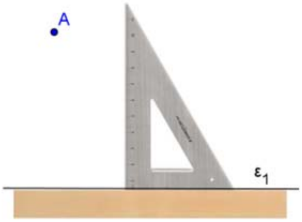
β) Κατασκευή **με χάρακα και γνώμονα**

<u>Βήμα 1:</u>



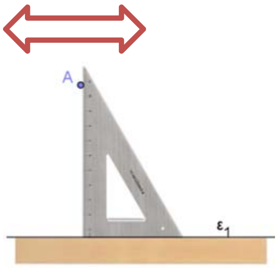
Τοποθετούμε τον χάρακα στην ευθεία ε_1.

<u>Βήμα 2:</u>



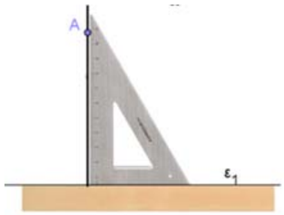
Τοποθετούμε το γνώμονα πάνω στον χάρακα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

<u>Βήμα 3:</u>



Μετατοπίζουμε το γνώμονα μέχρι να ακουμπήσει το σημείο A.

<u>Βήμα 4:</u>

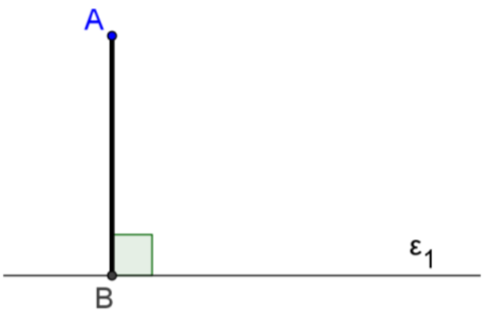


Φέρουμε την κάθετη στην ε_1 που περνά από το σημείο A.

3. Να μετρήσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_1.

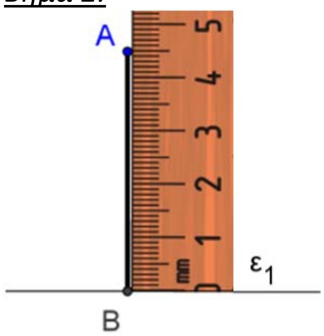
Λύση:

<u>Βήμα 1:</u>



Φέρω την κάθετη ABαπό το A στην ευθεία ε_1.

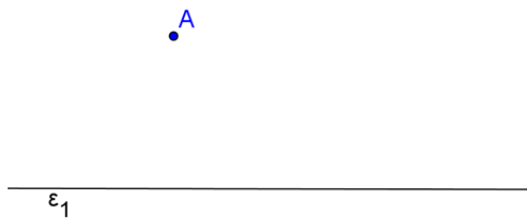
<u>Βήμα 2:</u>



Μετρώ το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

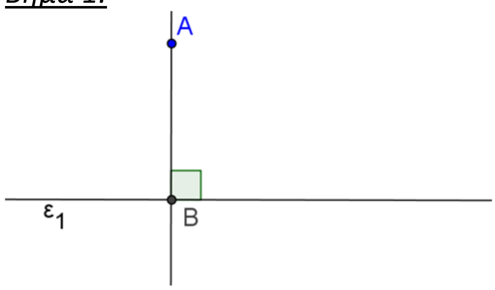
$AB = 4{,}5\ cm$

4. Από σημείο A εκτός της ευθείας ε_1, να κατασκευάσετε ευθεία ε_2 που να είναι παράλληλη με την ε_1.



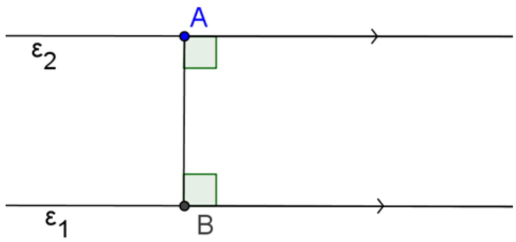
Λύση:

<u>*Βήμα 1:*</u>



Φέρουμε $AB \perp \varepsilon_1$.

<u>*Βήμα 2:*</u>

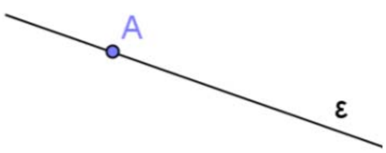


Από το A φέρουμε $\varepsilon_2 \perp AB$.

Δραστηριότητες

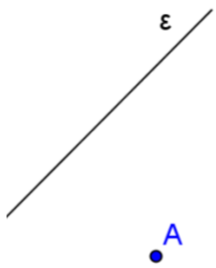
1. Από το σημείο A να φέρετε κάθετη στην ευθεία ε σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις

α)



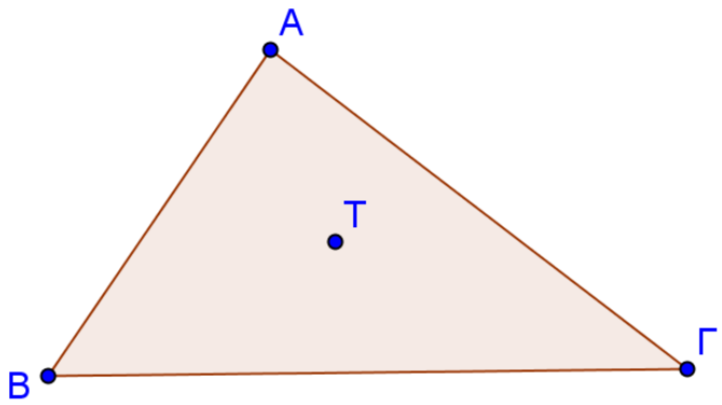
β)

γ)



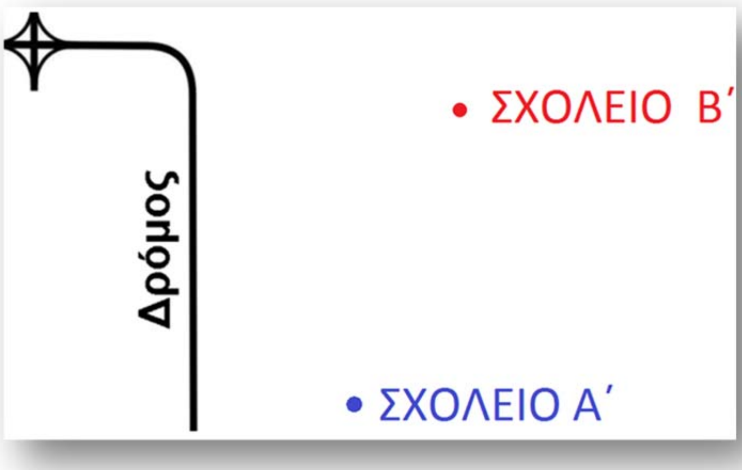
δ)

2. Να φέρετε τις αποστάσεις του σημείου T από τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.



3. Να κατασκευάσετε γωνία $x\hat{O}y$, να φέρετε τη διχοτόμο της και να κατασκευάσετε σε αυτή ένα σημείο A. Να φέρετε τις αποστάσεις του σημείου από τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις αυτές.

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δυο σχολεία (Σχολείο Α΄ και Σχολείο Β΄) . Ο Δήμαρχος θέλει να τοποθετήσει μια στάση στο πιο κοντινό δρόμο για το σχολικό λεωφορείο. Να βοηθήσετε το Δήμαρχο να βρει σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετήσει τη στάση, έτσι ώστε να ισαπέχει από τα δύο σχολεία.



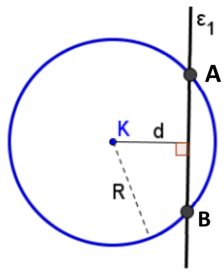
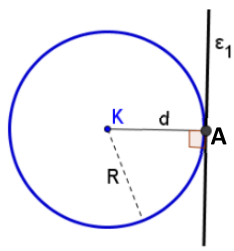
5. Να κατασκευάσετε ευθεία ε_1. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ευθεία ε_2 που να απέχει $2\ cm$ από την ε_1.

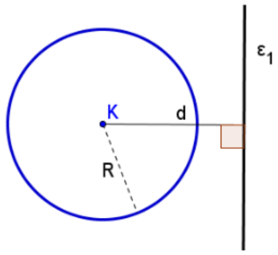
Θέση Ευθείας και Κύκλου

Διερεύνηση

- **Τεχνολογία:** Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En5_Thesi_eftheias_kyklou»*
  - Να μεταβάλετε το μήκος της ακτίνας, ώστε η ευθεία να εφάπτεται του κύκλου.
  - Ποια είναι η σχέση της ακτίνας R με την απόσταση d του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
  - Να επαναλάβετε τη διαδικασία και να βρείτε τη σχέση μεταξύ R και d, όταν η ευθεία τέμνει τον κύκλο και όταν η ευθεία δεν τέμνει τον κύκλο.

Μαθαίνω

<table>
<tr><th colspan="3">Θέση ευθείας και κύκλου</th></tr>
<tr><td>Τέμνουσα</td><td>Όταν ευθεία και κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία A και B, η ευθεία ε_1 ονομάζεται τέμνουσα του κύκλου ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα A και B.
▪ Όταν η απόσταση d του κέντρου K από την ευθεία ε_1 είναι μικρότερη από την ακτίνα R η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου.
Δηλαδή,
αν $d < R$, τότε η ευθεία ε_1 είναι τέμνουσα του κύκλου (K, R).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Εφαπτόμενη</td><td>Όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο A, η ευθεία ε_1 ονομάζεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Το σημείο A ονομάζεται σημείο επαφής κύκλου και εφαπτόμενης.
▪ Όταν η απόσταση d του κέντρου K από την ευθεία ε_1 είναι ίση με την ακτίνα R η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου.
Δηλαδή,
αν $d = R$, τότε η ευθεία ε_1 είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο σημείο A .</td><td>
</td></tr>
</table>

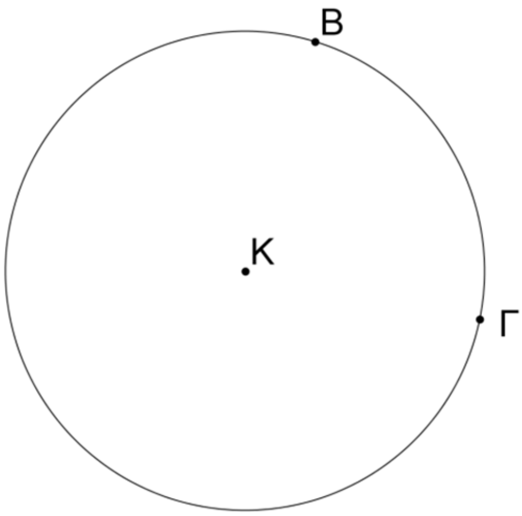
Εξωτερική	Όταν ευθεία και κύκλος έχουν **δεν έχουν κανένα κοινό σημείο** λέμε ότι η ευθεία ε_1 είναι **εξωτερική του κύκλου**(K, R). ▪ *Όταν η απόσταση d του κέντρου K από την ευθεία ε_1 είναι μεγαλύτερη της ακτίνας R η ευθεία είναι* εξωτερική του κύκλου(K, R). *Δηλαδή,* *αν $d > R$, τότε η ευθεία ε_1 είναι* **εξωτερική** του κύκλου.	

Δραστηριότητες

1. Να κατασκευάσετε κύκλο $(K, 4\ cm)$ και στη συνέχεια να φέρετε ευθεία ε_1 που να απέχει $3\ cm$ από το κέντρο του κύκλου. Ποια είναι η θέση της ευθείας σε σχέση με τον κύκλο;

2. Στο σχήμα να φέρετε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B και Γ. Αν οι εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο A, να συγκρίνετε:

   α) Τις αποστάσεις AB και $A\Gamma$.
   β) Τις αποστάσεις των σημείων B και Γ από το ευθύγραμμο τμήμα KA.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να ονομάσετε μια ευθεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα, μια ημιευθεία και ένα σημείο, με τη βοήθεια του πιο κάτω σχήματος

2. Να κατασκευάσετε με μοιρογνωμόνιο γωνίες $\alpha = 60^o$, $\beta = 100^o$ και $\gamma = 200^o$ και να φέρετε τη διχοτόμο της καθεμιάς.

3. Να γράψετε δίπλα από κάθε γωνία το είδος της (οξεία , αμβλεία , ορθή , ευθεία , πλήρης, μη κυρτή , μηδενική).

Μέτρο Γωνίας	Είδος Γωνίας
$98°$	
$270°$	
$180°$	
$181°$	
$0°$	
$90°$	
$225°$	
$117°$	

4. Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:

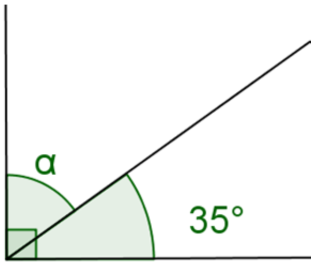
α) Τι είναι η μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος;
β) Ποιες γωνίες ονομάζονται εφεξής;
γ) Τι είναι η διχοτόμος μιας γωνίας;
δ) Ποιες γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές;

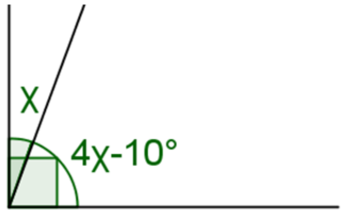
5. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι τετραπλάσια από τη συμπληρωματική της.

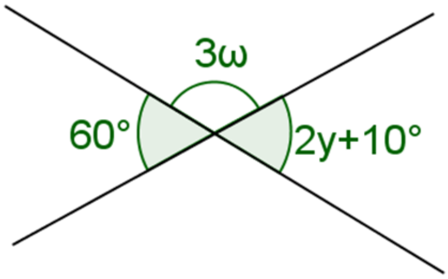
6. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι οκταπλάσια από την παραπληρωματική της.

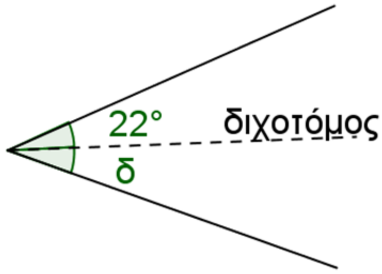
7. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα $AB = 10\ cm$ και να φέρετε τη μεσοκάθετη του.

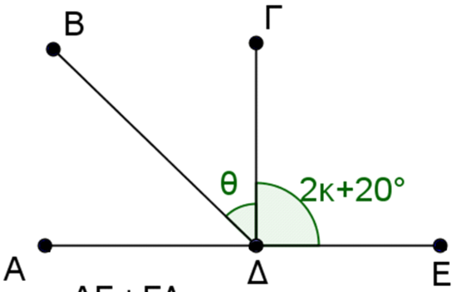
8. Να υπολογίσετε την τιμή των $\alpha, \gamma, \chi, \omega, y, \delta, \theta$ και κ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) 

β) 

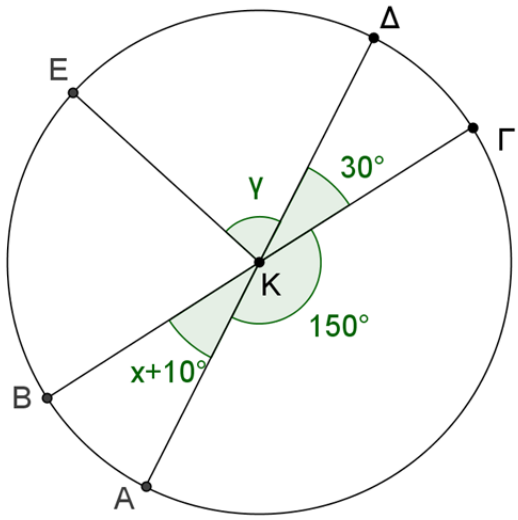
γ) 

δ) 

ε) 

ΑΕ⊥ΓΔ

ΔΒ διχοτόμος ∡ΑΔΓ

στ) 

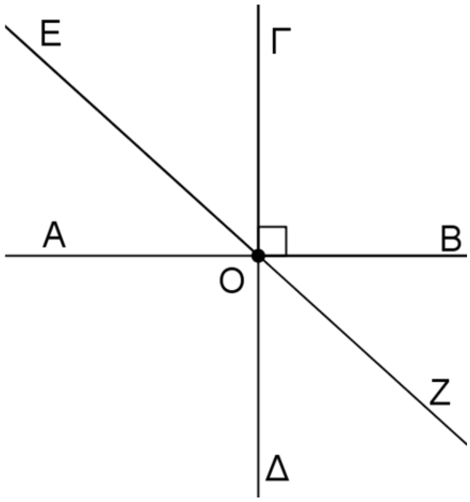
(Κ,ΚΕ) κύκλος

ΕΚ διχοτόμος ∡ΒΚΔ

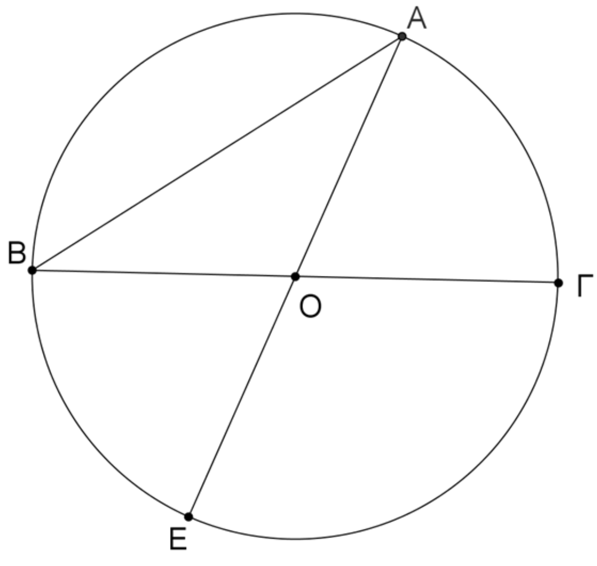
9. Τι είδους γωνία είναι:
   α) Η συμπληρωματική μιας οξείας γωνιάς;
   β) Η παραπληρωματική μιας οξείας γωνίας;
   γ) Η παραπληρωματική μιας ορθής γωνιάς;
   δ) Η παραπληρωματική μιας αμβλείας γωνιάς;

10. Να κατασκευάσετε δύο εφεξής γωνίες $A\hat{O}B = 20°$ και $B\hat{O}\Gamma = 60°$. Να κατασκευάσετε τυχαίο σημείο Δ στην κοινή τους πλευρά και να φέρετε τις κάθετες ΔZ και ΔH στις ημιευθείες OA και $O\Gamma$,αντίστοιχα. Να συγκρίνετε τις αποστάσεις ΔZ και ΔH.

11. Στο διπλανό σχήμα $AB \perp \Gamma\Delta$.
Να βρείτε:
α) Δύο εφεξής γωνίες.
β) Δύο κατακορυφήν γωνίες.
γ) Μια ευθεία γωνία.
δ) Δύο συμπληρωματικές γωνίες.
ε) Δύο παραπληρωματικές γωνίες.
στ) Τρεις διαδοχικές γωνίες.



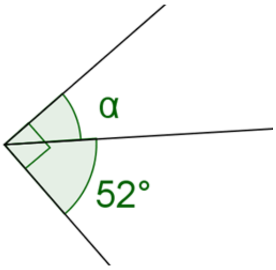
12. Να συμπληρώσετε τον πίνακα βάζοντας ✓ στην κατάλληλη θέση.



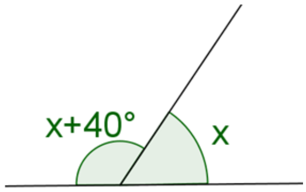
Ευθ. Τμήμα	Ακτίνα	Διάμετρος	Χορδή
OA			
OB			
$B\Gamma$			
AB			
AE			
$E\Gamma$			

13. Να υπολογίσετε την τιμή των $x, \psi, \omega, \varphi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

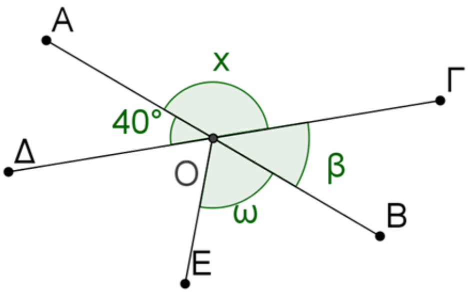
α)



β)

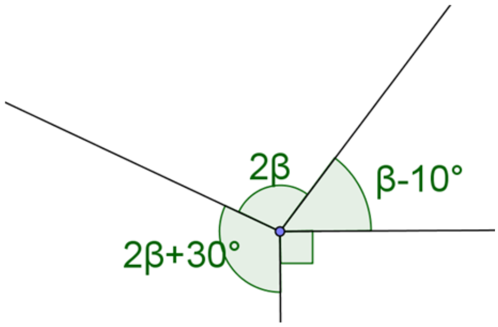


γ)

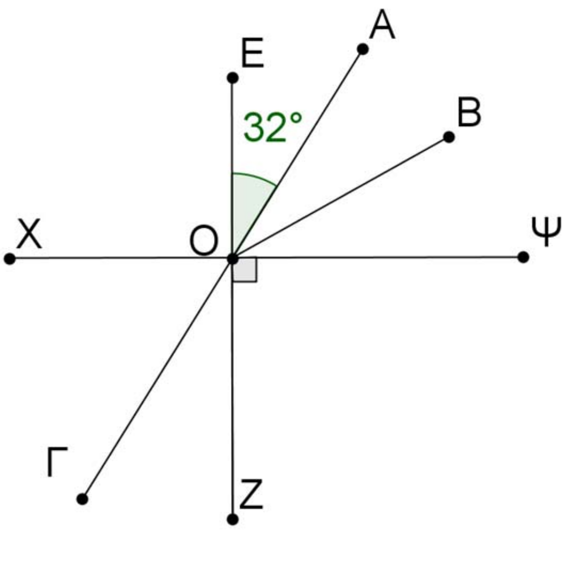


ΟΕ διχοτόμος της ∡ΔΟΒ

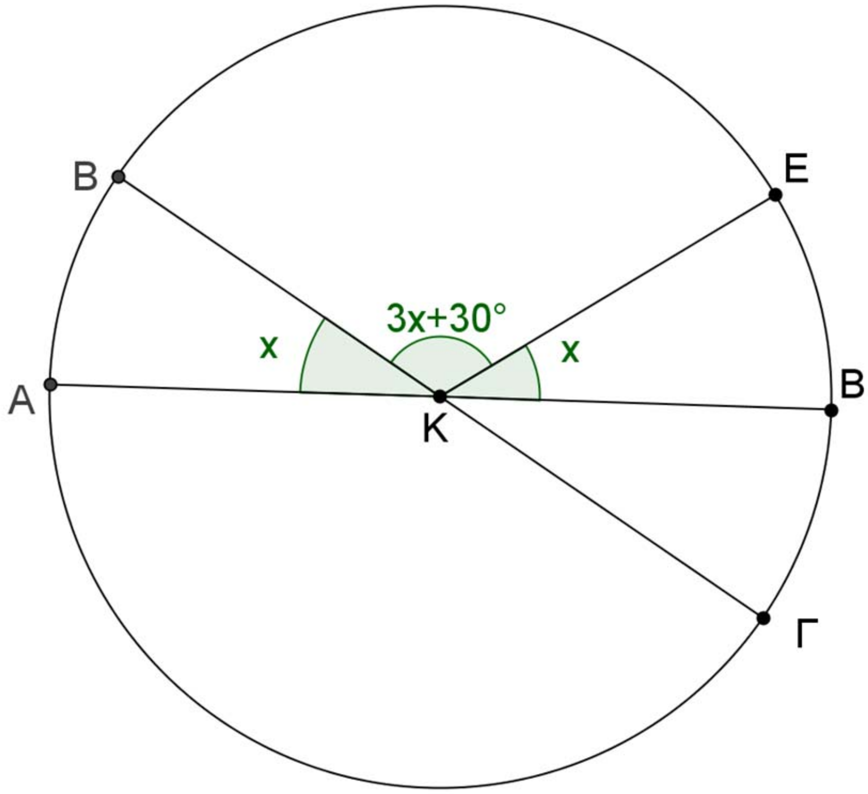
δ)



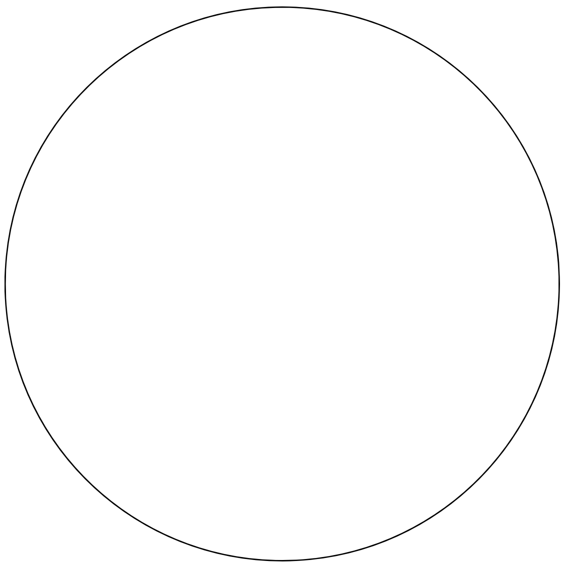
14. Στο πιο κάτω σχήμα $Χ\Psi \perp ΕΖ$, η $ΟΒ$ είναι διχοτόμος της $\measuredangle ΑΟ\Psi$ και η $\measuredangle ΑΟ\Gamma$ είναι ευθεία γωνία. Να υπολογίσετε τις γωνιές $\measuredangle \Psi ΟΒ$, $\measuredangle \Gamma ΟΖ$, $\measuredangle ΖΟΒ$.



15. Δίνεται κύκλος (K, R). Να υπολογίσετε την τιμή του x, το μέτρο του τόξου $\widehat{EB\Gamma}$ και την επίκεντρη γωνία $\Delta\widehat{K}E$.



16. Να προσδιορίσετε τη θέση του κέντρου του πιο κάτω κύκλου με τη χρήση χάρακα και διαβήτη.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσετε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Στη συνέχεια να βρείτε τα μέσα M και N των πλευρών AB και $\Delta\Gamma$. Ποια είναι η σχέση που συνδέει το μήκος MN με τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$;

2. Με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετη ε του ευθύγραμμου τμήματος AB. Να κατασκευάσετε ένα σημείο Γ πάνω στην ε και να φέρετε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Gamma$. Τι παρατηρείτε για τα μήκη των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ και τι παρατηρείτε για το μέτρο των $\measuredangle \Gamma AB$ και $\measuredangle \Gamma BA$;

3. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα $AB = \Gamma\Delta = 4\ cm$, ώστε $AB \perp \Gamma\Delta$ και M το μέσο των AB και $\Gamma\Delta$.

4. Αν τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, Γ, Δ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, να βρείτε την τομή των επιπέδων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

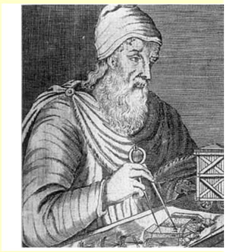
Δυνάμεις Ρητών Αριθμών

Α΄ Γυμνασίου

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ιδιότητες Δυνάμεων (Ι)

Εξερεύνηση



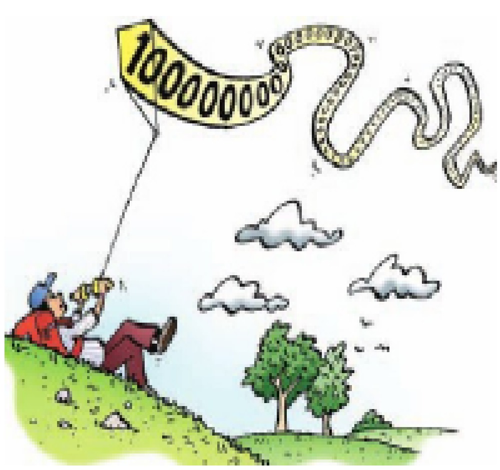
Ο Αρχιμήδης ($3^{ος}$ αι. π.Χ.) θεωρείται ο μεγαλύτερος φυσικομαθηματικός της αρχαιότητας. Στο βιβλίο του «Ψαμμίτης» (Άμμου καταμέτρης), ο Αρχιμήδης υποστηρίζει ότι ο αριθμός των κόκκων της άμμου δεν είναι άπειρος, όπως πίστευαν πολλοί, αλλά πεπερασμένος αριθμός.

Προκειμένου να υπολογίσει τους κόκκους της άμμου, έπρεπε πρώτα να επινοήσει ένα σύστημα ονομασίας μεγάλων αριθμών. Ξεκίνησε λοιπόν από το μεγαλύτερο αριθμό εκείνης της εποχής, τη μυριάδα μυριάδων. Η **μυριάδα** ισούται με 10 000, συνεπώς η **μυριάδα μυριάδων**, ήταν η μυριάδα στο τετράγωνο. Ο Αρχιμήδης συνειδητοποίησε ότι με απλούς υπολογισμούς δεν μπορούσε να φθάσει εύκολα στο αποτέλεσμα που ήθελε. Χρησιμοποιώντας τη μυριάδα μυριάδων ως βάση δημιούργησε μεγαλύτερους αριθμούς, **υψώνοντας δύναμη σε δύναμη**, αφού με αυτό τον τρόπο οι αριθμοί αυξάνονται εντυπωσιακά.

Τελικά σταμάτησε στον αριθμό: $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{10^8} = 10^{8\cdot 10^{16}}$ ο οποίος είναι μία μυριάδα μυριάδων στη μυριοστή μυριάδα και όλο στη μυριοστή μυριάδα. Ο αριθμός αυτός είναι ασύλληπτα μεγάλος και αποτελείται από το 1 ακολουθούμενο από $8{\cdot}10^{16}$ μηδενικά. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη αστρονομικές μετρήσεις υπολόγισε το μέγεθος του Σύμπαντος και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν χρειάζονται πάνω από 10^{63} κόκκοι άμμου για να γεμίσει ολόκληρο το Σύμπαν.

Πρόσφατα, τον $20^{ο}$ αιώνα, ο Αμερικανός μαθηματικός Edward Kasner, δημιούργησε τον αριθμό $googol$ για να εκφράσει πολύ μεγάλους αριθμούς. Το όνομα του αριθμού ήταν ιδέα του εννιάχρονου ανιψιού του Milton Sirotta και δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1940 στο βιβλίο του Μαθηματικά και Φαντασία. Ο αριθμός $googol$ ισούται με 10^{100}.

- ✓ Να συγκρίνετε τον αριθμό του Αρχιμήδη με τον αριθμό του Kasner.



Αργότερα, ο Kasner δημιούργησε και τον αριθμό $googloplex$, τον οποίο περίγραψε ως τον αριθμό με πρώτο ψηφίο τη μονάδα και μετά τόσα μηδενικά που βαριέσαι να τα γράψεις.

Διερεύνηση (1)

Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες:

Δύναμη	Πρόσημο Αποτελέσματος
$(+2)^1$	
$(+1)^7$	
$(+1)^{368}$	
$(+1)^{1821}$	
$(+1)^{2012}$	

Δύναμη	Πρόσημο Αποτελέσματος
$(-2)^1$	
$(-1)^7$	
$(-1)^{368}$	
$(-1)^{1821}$	
$(-1)^{2012}$	

- ✓ Τι παρατηρείτε;
- ✓ Μπορεί μια δύναμη με βάση θετικό αριθμό να δώσει αρνητικό αποτέλεσμα; Αν ναι, να δώσετε ένα παράδειγμα.
- ✓ Πότε μια δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό δίνει θετικό και πότε αρνητικό αποτέλεσμα;

Διερεύνηση (2)

Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Γινόμενο δυνάμεων	Γινόμενο παραγόντων	Δύναμη
$2^4 \cdot 2^3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^7
$\alpha^3 \cdot \alpha^5$		
$(3{,}1)^2 \cdot (3{,}1)^4$		
$(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)$		
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu$		

Πηλίκο δυνάμεων	Διαγραφή/Απλοποίηση	Γινόμενο	Δύναμη
$\frac{2^7}{2^3}$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2 \cdot 2 \cdot 2}}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2}}$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^4
$\frac{x^5}{x^2}$			
$5^8 : 5^2$			
$\alpha^\mu : \alpha^\nu$			

Δύναμη σε δύναμη	Γινόμενο δυνάμεων	Δύναμη
$(7^2)^4$	$(7^2)\cdot(7^2)\cdot(7^2)\cdot(7^2)$	7^8
$[\alpha^3]^5$		
$(\alpha^\mu)^\nu$		
$((\alpha^3)^2)^5$		

Διερεύνηση (3)

Στον πιο κάτω πίνακα υπολογίζονται δυνάμεις του 2.

Δύναμη	Αποτέλεσμα
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	;
⋮	⋮
2^{15}	32 768
⋮	⋮
2^{20}	1 048 576
⋮	⋮
2^{32}	4 294 967 296
⋮	⋮
2^{64}	

- ✓ Πώς μπορείτε, χρησιμοποιώντας τις τιμές του πιο πάνω πίνακα, να υπολογίσετε το 2^{10}; Να αναφέρετε διαφορετικούς τρόπους που μπορείτε να το υπολογίσετε.

- ✓ Πώς μπορείτε, χρησιμοποιώντας τις τιμές του πιο πάνω πίνακα, να υπολογίσετε το 2^{10}, κάνοντας μόνο μια διαίρεση;

- ✓ Ο Αλέξης ισχυρίζεται ότι μπορεί να βρει την τιμή του 2^{10}, διαιρώντας το 2^{20} με το 2. Να εξετάσετε αν είναι ορθός ο ισχυρισμός του.

Μαθαίνω

- Κάθε δύναμη με **βάση θετικό αριθμό** είναι **θετικός αριθμός**.
  Αν, $\boldsymbol{\alpha > 0,}$ τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0,}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν

- Κάθε δύναμη με **βάση αρνητικό αριθμό** είναι:
  - **θετικός αριθμός,** αν ο **εκθέτης είναι άρτιος.**
    Αν, $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και $\boldsymbol{\nu}$ άρτιος τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} > 0}$
  - **αρνητικός αριθμός,** αν ο **εκθέτης είναι περιττός.**
    Αν, $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και $\boldsymbol{\nu}$ περιττός τότε $\boldsymbol{\alpha^{\nu} < 0}$

- Το **γινόμενο δυνάμεων** που έχουν την ίδια βάση είναι μια δύναμη που έχει ως βάση την **κοινή βάση** και εκθέτη **το άθροισμα** των εκθετών.

$$\boldsymbol{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

- Το **πηλίκο δυνάμεων** που έχουν την ίδια βάση είναι μια δύναμη που έχει ως βάση την **κοινή βάση** και εκθέτη **τη διαφορά** του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\boldsymbol{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N},\ \mu > \nu \ \text{ και } \alpha \neq 0$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N},\ \mu > \nu \text{ και } \alpha \neq 0$$

- Αν δύο δυνάμεις με την ίδια βάση είναι ίσες, τότε και οι εκθέτες τους είναι ίσοι.

$$\boldsymbol{\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu} \Leftrightarrow \mu = \nu} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N},\ \alpha \neq 0 \text{ και } \alpha \neq \pm 1$$

- Μια δύναμη $\boldsymbol{\alpha^{\mu}}$ που είναι υψωμένη σε εκθέτη $\boldsymbol{\nu}$ είναι μια δύναμη που έχει ως βάση το $\boldsymbol{\alpha}$ και εκθέτη το γινόμενο των εκθετών $\boldsymbol{\mu \cdot \nu}$.

$$(\boldsymbol{\alpha^{\mu}})^{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha^{\mu \cdot \nu}} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω δυνάμεων:

(α) 5^2 (β) $(-5)^2$ (γ) $(+4)^5$ (δ) $(-1256)^{27}$

Λύση:

(α) *Η βάση της δύναμης είναι θετικός αριθμός, άρα η δύναμη είναι* ***θετικός*** *αριθμός.*

(β) *Η βάση της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης άρτιος αριθμός, άρα η δύναμη είναι* ***θετικός*** *αριθμός.*

(γ) *Η βάση της δύναμης είναι θετικός αριθμός, άρα η δύναμη είναι* ***θετικός*** *αριθμός.*

(δ) *Η βάση της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης περιττός αριθμός, άρα η δύναμη είναι* ***αρνητικός*** *αριθμός.*

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $(-4)^2$ (β) -4^2 (γ) $(-3)^3$ (δ) $(+4,2)^0$ (ε) $(+1)^{2011}$

Λύση:

(α) $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16$

(β) $-4^2 = -(4)^2 = -(4\cdot 4)\ - 16$

(γ) $(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$

(δ) $(+4,2)^0 = 1$

(ε) $(+1)^{2011} = +1$

3. Να γράψετε σε μορφή μιας δύναμης ή δυνάμεων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $5^3 \cdot 5$ (β) $\left(-\frac{3}{5}\right)^7 : \left(-\frac{3}{5}\right)^2$ (γ) $3\cdot 9\cdot 81$

(δ) $x^6 : x^4$ (ε) $(-3)^2\cdot(+3)^3$ (στ) $3^5 + 7\cdot 3^5 - 3^5 + 2\cdot 3^5$

Λύση:

(α) $5^3 \cdot 5 = 5^3 \cdot 5^1 = 5^{3+1} = 5^4$

(β) $\left(-\frac{3}{5}\right)^7 : \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{7-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^5$

(γ) $3 \cdot 9 \cdot 81 = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^4 = 3^{1+2+4} = 3^7$ *Γράφουμε κάθε αριθμό ως δύναμη με την ίδια βάση.*

(δ) $x^6 : x^4 = x^{6-4} = x^2$

(ε) $(-3)^2 \cdot (+3)^3 = (+3)^2 \cdot (+3)^3 = (+3)^{2+3} = (+3)^5$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουν την ίδια βάση, το $(-3)^2 = (+3)^2$ ενώ το $(-3)^3 \neq (+3)^3$. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $(-3)^2 = (+3)^2$ για να εφαρμόσουμε την ιδιότητα.

(στ) $3^5 + 7 \cdot 3^5 - 3^5 + 2 \cdot 3^5 = (1 + 7 - 1 + 2) \cdot 3^5 = 9 \cdot 3^5 = 3^2 \cdot 3^5 = 3^7$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα και ακολούθως την ιδιότητα του γινομένου δυνάμεων με την ίδια βάση.

4. Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $(5^4)^2$ (β) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^4\right)^7$ (γ) 125^4

Λύση:

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

(α) $(5^4)^2 = 5^{4 \cdot 2} = 5^8$

(β) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^4\right)^7 = \left(\frac{3}{7}\right)^{4 \cdot 7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{28}$

(γ) $125^4 = (5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Δύναμη	Βάση	Εκθέτης	Γινόμενο
$(-2)^3$			
	$-6{,}3$	2	
			$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

2. Να βρείτε το πρόσημο των δυνάμεων:

(α) $(-3)^4$ (β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ (γ) -2012^2 (δ) $(+2{,}15)^{2013}$

3. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο πρόσημο:

(α) $(-2)^4 = \cdots 16$ (β) $(-1)^8 = \cdots 1$ (γ) $(+3)^3 = \cdots 27$

(δ) $(-1)^5 = \cdots 1$ (ε) $(-2)^5 = \cdots 32$ (στ) $(-6)^2 = \cdots 36$

(ζ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \cdots \frac{1}{81}$ (η) $(-2{,}75)^1 = \cdots 2{,}75$ (θ) $(0{,}5)^3 = \cdots 0{,}125$

4. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $=$, $>$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς:

(α) $(+2)^2$ …… $(-2)^2$ (β) $(-7)^8$ …… $(+7)^8$

(γ) $(+12)^3$ …… $(-12)^3$ (δ) $(+113)^2$ …… $(-113)^2$

(ε) $(-2)^{2013}$ …… $(+2)^{2013}$ (στ) $(+4)^{41}$ …… $(-4)^{41}$

5. Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς υπό μορφή δύναμης, με περισσότερους από ένα τρόπους:

(α) 25 (β) -8 (γ) 1

6. Να διατάξετε τους αριθμούς $(-6)^2$, 6^1, $(-6)^3$, 6^9 από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, χωρίς να υπολογίσετε τις δυνάμεις.

7 . Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο εκθέτη, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $2^4 \cdot 2^{10} = 2^{\square}$ (β) $(+2)^{12} \cdot (+2)^{\square} = (+2)^{20}$

(γ) $(-2)^{\square} \cdot (-2)^{\square} \cdot (-2)^{\square} = (-2)^{10}$ (δ) $4 \cdot (+2)^{\square} = (+2)^6$

8 . Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $(-7)^5 : (-7)^3$ (β) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$

(γ) $(-2)^4 \cdot (-2)^2 : (-2)^3$ (δ) $(5^5 : 5^2) \cdot 5^3$

(ε) $(\alpha^5 \cdot \alpha \cdot \alpha^4) : \alpha^9$ (στ) $(-3y^4) \cdot (-2y)$

(ζ) $(\beta^{15} : \beta^3) \cdot (\beta^7 : \beta^6)$ (η) $(0{,}1)^{19} \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}1)^{22}$

9 . Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω σχέσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) $(-2)^5 + (-2)^3 = (-2)^8$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) $(-5)^7 : (-5)^3 = (-5)^4$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) $9^{10} : 3^2 = 3^8$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

10 . Να υπολογίσετε την τιμή του x ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $2^x \cdot 2^5 = 2^9$ (β) $2^x : 2^3 = 2^7$

(γ) $(-3{,}1)^4 : (-3{,}1)^x = -3{,}1$ (δ) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

(ε) $(-3)^2 \cdot (-3)^x \cdot (-3) = (-3)^8$

11 . Σε ένα κάλαθο αχρήστων τα μικρόβια διπλασιάζονται καθημερινά. Αν σήμερα το πλήθος των μικροβίων είναι 2^{40}, ποιο ήταν το πλήθος τους πριν από δύο μέρες;

12 . Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $25 \cdot (+5)^3$ (β) $4 \cdot 16 \cdot (+2)^7$

(γ) $(-2)^3 \cdot (+2)^4$ (δ) $(-3)^5 \cdot (+3)^2 \cdot (-3)^4$

(ε) $(-8) \cdot 16 \cdot 4$ (στ) $(-3) \cdot 9 \cdot (-27)$

13 . Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

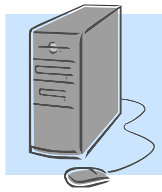
(α) $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$

(β) $2^7 : 2^2 + 2 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^5 - 2^2 \cdot 2^3$

(γ) $3 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^3 - 7^3$

(δ) $3^{12} : 3^4 + (3^4)^2 + 2 \cdot 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2 - 3^8$

14 . Η ταχύτητα επεξεργασίας εντολών ενός υπολογιστή είναι 10^{11} ανά δευτερόλεπτο, ενώ ενός άλλου είναι 10^4 φορές γρηγορότερος. Πόσες εντολές ανά δευτερόλεπτο μπορεί να εκτελέσει ο δεύτερος υπολογιστής;



15 . Το pH ενός διαλύματος περιγράφει την οξύτητά του. Για κάθε μονάδα που μειώνεται το pH σε ένα διάλυμα, αυξάνεται η οξύτητά του κατά 10 φορές. Το pH του αποσταγμένου νερού είναι 7, ενώ το pH του χυμού λεμονιού είναι 3. Να συγκρίνετε πόσο πιο οξύ είναι ο χυμός λεμονιού από το νερό.

16 . Να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή μιας δύναμης:

(α) $(3^2)^7$ (β) $(0{,}1^2)^3$

(γ) $[\,(-2)^2\,]^4$ (δ) $\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^4$

(ε) $(x^2 \cdot x^3)^4$ (στ) $(\alpha^4)^2 \cdot (\alpha^2)^3$

(ζ) $9^2 \cdot (+3)^3 \cdot 27^2$ (η) $(+16) \cdot 4^2 \cdot (-2)^5$

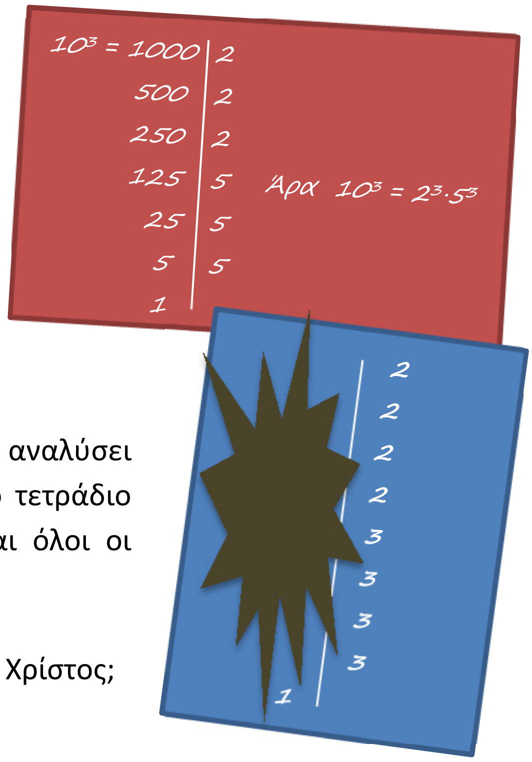
17 . Η καθηγήτρια ζήτησε από τους μαθητές να σκεφτούν έναν αριθμό και να τον υψώσουν στο τετράγωνο.

- *Η Μαρίνα βρήκε απάντηση ίση με τον αρχικό αριθμό που είχε σκεφτεί.*
- *Ο Ιωάννης βρήκε απάντηση το δεκαπλάσιο από τον αρχικό αριθμό που είχε σκεφτεί.*
- *Η Ισμήνη βρήκε έναν αριθμό μικρότερο από τον αρχικό αριθμό που είχε σκεφτεί.*

Να βρείτε τον αριθμό που μπορεί να σκέφτηκε το κάθε παιδί.

Ιδιότητες Δυνάμεων (ΙΙ) – Δυνάμεις Ρητών με Ακέραιο Εκθέτη

Διερεύνηση (1)



Έχουμε μάθει πως μπορεί ένας αριθμός να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- ✓ Να αναλύσετε το 10^4 με αντίστοιχο τρόπο και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

- ✓ Μπορείτε να βρείτε πώς θα αναλυθεί το 10^5 χωρίς να κάνετε την πιο πάνω διαδικασία;

Ο Χρίστος ακολούθησε τα πιο πάνω βήματα, για να αναλύσει τη δύναμη που τους ζήτησε ο καθηγητής του. Στο τετράδιο του όμως, χύθηκε μελάνι και τώρα δεν φαίνονται όλοι οι αριθμοί.

- ✓ Μπορείτε να βρείτε ποια δύναμη έχει αναλύσει ο Χρίστος;

Διερεύνηση (2)

Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Γινόμενο σε δύναμη	Γινόμενο παραγόντων		Δύναμη
$(7 \cdot x)^4$	$7 \cdot x \cdot 7 \cdot x \cdot 7 \cdot x \cdot 7 \cdot x$	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$	$7^4 \cdot x^4$
$(3 \cdot x \cdot y)^2$			
$(\alpha \cdot \beta)^\nu$			

Πηλίκο σε δύναμη	Γινόμενο κλασμάτων	Πηλίκο	Δύναμη
$\left(\frac{3}{5}\right)^4$	$\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$	$\frac{3^4}{5^4}$
$\left(\frac{2}{x}\right)^3$			
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$			

Διερεύνηση (3)

Το Ινστιτούτο Γενετικής συμμετέχει σε ένα ερευνητικό πρόγραμμα στο οποίο μελετούν την εξέλιξη ενός είδους βακτηριδίων. Παρατηρούν ότι κάθε μέρα ο όγκος της καλλιέργειας περίπου διπλασιάζεται. Στις 19 Σεπτεμβρίου ένας γενετιστής άρχισε να παρατηρεί και να καταγράφει τις μετρήσεις στον πιο κάτω πίνακα.

Το μικρόμετρο (μm) είναι ίσο με $0{,}001\ mm$

Ημερομηνία	Όγκος καλλιέργειας	Δύναμη
⋮		
15 Σεπτεμβρίου		
16 Σεπτεμβρίου		
17 Σεπτεμβρίου		
18 Σεπτεμβρίου		
19 Σεπτεμβρίου	$1\ \mu m^3$	2^0
20 Σεπτεμβρίου		
21 Σεπτεμβρίου		
22 Σεπτεμβρίου		
22 Σεπτεμβρίου		
23 Σεπτεμβρίου		
24 Σεπτεμβρίου		
25 Σεπτεμβρίου		
26 Σεπτεμβρίου		
⋮		

- ✓ Αν στις 19 Σεπτεμβρίου ο όγκος της καλλιέργειας ήταν $1\ \mu m^3$, να βρείτε πόσος θα είναι ο όγκος ύστερα από τρείς μέρες.

- ✓ Να υπολογίσετε πότε ο όγκος θα γίνει $128\ \mu m^3$ για να είναι έτοιμη η καλλιέργεια να δεχτεί αντιβίωση.

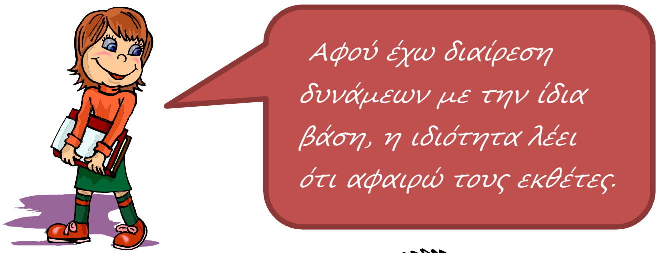
- ✓ Να υπολογίσετε πόσος ήταν ο όγκος της καλλιέργειας στις 17 Σεπτεμβρίου που ξεκίνησε η έρευνα.

Διερεύνηση (4)

Ο Νικόλας και η Αριάνα έχουν να κάνουν τη διαίρεση, $7^3 : 7^6 =$ ...
Η άσκηση ζητά να γράψουν την παράσταση σε μορφή μιας δύναμης. Αφού τελείωσαν την άσκηση έλεγξαν το αποτέλεσμα και διαπίστωσαν ότι έχουν βρει διαφορετική απάντηση και με διαφορετικό τρόπο. Μπορείτε να ελέγξετε τον τρόπο που εργάστηκαν;

Αριάνα:

$$7^3 : 7^6 = 7^{3-6} = 7^{-3}$$



Νικόλας:

$$7^3 : 7^6 = \frac{7^3}{7^6} = \frac{\cancel{7 \cdot 7 \cdot 7}}{\cancel{7 \cdot 7 \cdot 7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^3}$$

Αλλά ισχύει, $\frac{1}{7^3} = \frac{1^3}{7^3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3$ Άρα, $7^3 : 7^6 = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

Μαθαίνω

- Το γινόμενο ρητών αριθμών που είναι υψωμένο σε δύναμη είναι ίσο με το γινόμενο του **κάθε παράγοντα** της αρχικής βάσης υψωμένου στον αρχικό εκθέτη.
$$(\boldsymbol{\alpha \cdot \beta})^{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha^\nu \cdot \beta^\nu}, \quad \text{όπου} \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \alpha, \beta \neq 0$$

- Το πηλίκο ρητών αριθμών που είναι υψωμένο σε δύναμη είναι ίσο με το πηλίκο των δυνάμεων που προκύπτουν αν υψώσουμε τον **κάθε όρο** του πηλίκου στον αρχικό εκθέτη.
$$\left(\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}}, \quad \text{όπου} \quad \nu \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \beta \neq 0$$

- Τα σύμβολα α^0, α^1 και $\alpha^{-\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, δεν προκύπτουν από τον ορισμό της δύναμης.
Ορίζεται:
  - $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{Q}$
  - $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$, όπου $\alpha \in \mathbb{Q}$ και $\alpha \neq 0$
  - $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}}$, όπου $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\alpha \neq 0$

Παρατήρηση: Το 0^0 δεν ορίζεται.

- Μια δύναμη με **ακέραιο εκθέτη** είναι ίση με τη δύναμη που έχει βάση τον **αντίστροφο** της αρχικής βάσης και εκθέτη τον **αντίθετο** του αρχικού εκθέτη.

$$\boldsymbol{\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{Q},\ \mu \in \mathbb{Z} \text{ και } \alpha \neq 0$$

Παραδείγματα: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ *και* $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$

*Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό αριθμό, που είδαμε προηγουμένως, ισχύουν και στις περιπτώσεις που ο εκθέτης είναι οποιοσδήποτε **ακέραιος αριθμός**.*

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

(α) 4^{-2} (β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Λύση:

(α) $4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

(β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = +\frac{9}{4}$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot 5^{10}$ (β) $\frac{36^4}{(-2)^6 \cdot (-3)^6}$

Λύση:

(α) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot 5^{10} = \left(-\frac{1}{5} \cdot 5\right)^{10} = (-1)^{10} = +1$

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες για να μπορεί να γίνει πιο εύκολα ο υπολογισμός των δυνάμεων.

(β) $\frac{36^4}{(-2)^6 \cdot (-3)^6} = \frac{(6^2)^4}{[(-2)\cdot(-3)]^6} = \frac{6^8}{(+6)^6} = 6^8 : 6^6 = 6^{8-6} = 6^2 = 36$

Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες για να μπορεί να γίνει πιο εύκολα ο υπολογισμός των δυνάμεων.

3. Να γράψετε τις παραστάσεις υπό μορφή μιας δύναμης:
   (α) $2^2 \cdot 2^{-3} : 2^2$
   (β) $(-7)^2 : (-7)^{-3}$
   (γ) $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot (-2)^{-1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Λύση:

(α) $2^2 \cdot 2^{-3} : 2^2 = 2^{2+(-3)} : 2^2 = 2^{-1} : 2^2 = 2^{-1-2} = 2^{-3}$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του γινομένου δυνάμεων με την ίδια βάση και ακολούθως την ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση.

(β) $(-7)^2 : (-7)^{-3} = (-7)^{2-(-3)} = (-7)^{2+3} = (-7)^5$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση.

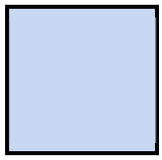
(γ) *Μετατρέπουμε τις δυνάμεις με την ίδια βάση και εφαρμόζουμε τις ιδιότητες.*

$$
\begin{aligned}
(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot (-2)^{-1} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} &= (-2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^{-1} : (-2)^{-3} \\
&= (-2)^{3+4+(-1)} : (-2)^{-3} \\
&= (-2)^{7+(-1)} : (-2)^{-3} \\
&= (-2)^6 : (-2)^{-3} \\
&= (-2)^{6-(-3)} \\
&= (-2)^{6+3} \\
&= (-2)^9
\end{aligned}
$$

Δραστηριότητες

1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων, να γράψετε τις παραστάσεις υπό μορφή μιας δύναμης ή γινόμενου δυνάμεων.
   (α) $(3^2)^3$ (β) $(\alpha^3)^2$
   (γ) $(5y^4)^7$ (δ) $(a^2\beta^3)^4$
   (ε) $(7x^2)^4 \cdot (x^6)^2$ (στ) $\left(\frac{3}{5}x^6y^4\right)^2$

2. Να εκφράσετε το εμβαδόν τετραγώνου σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων, όταν δίνεται η πλευρά:

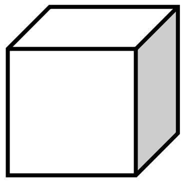


   (α) $5\ cm$

   (β) $6x^2$

   (γ) $\alpha^5\beta^2$

3. Να εκφράσετε τον όγκο κύβου σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων, όταν δίνεται η ακμή:



   (α) $7\ cm$

   (β) $2x^3y^3$

   (γ) $\frac{3\alpha^5}{2\beta^7}$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

   (α) $\frac{(-20)^3}{(-5)^3}$ (β) $\frac{8^3 \cdot 3^3}{(-6)^3}$

   (γ) $\frac{(-6)^5}{12^5}$ (δ) $\frac{(+2)^8 \cdot (+5)^8}{1000}$

   (ε) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2000} \cdot 3^{2000}$

5. Αν $\alpha = (+3)^2 \cdot (-7)^5$, $\beta = 2^3 \cdot (+3) \cdot (-7)^3$ και $\gamma = 2^2 \cdot (-7)$, να γράψετε τις παραστάσεις σε μορφή δυνάμεων:

   (α) α · β

   (β) $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$

   (γ) $(\alpha \cdot \beta)^2 : \gamma^3$

6. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

   (α) 3^{-3} (β) 1^{-5}

   (γ) $(-5)^{-2}$ (δ) $[(-2)^2]^{-2}$

   (ε) $(2\alpha)^{-3}$ (στ) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

7. Να γράψετε 5 διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους θα μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό $googol \ \ 10^{100}$ σε μορφή δύναμης.

8. Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων με μη αρνητικό εκθέτη τα πιο κάτω:

(α) $5^4 : 5^8$

(β) $\alpha^{-3} : \alpha^2$

(γ) $(-5)\cdot(-5)^4 : \ (-5)^{-3}$

(δ) $\frac{7^6 \cdot 7}{7^{-4}}$

(ε) $\frac{(0{,}25)^4}{(0{,}25)^{-3}}$

(στ) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-12}$

(ζ) $\frac{1}{9} \cdot (+3)^3$

(η) $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

(θ) $(-3)^{-4} \cdot (-3)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

9. Να συγκρίνετε τους αριθμούς 4^{-2} και $(-4)^2$;

10. Να υπολογίσετε την τιμή του x ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $(-3)^{-5} \cdot (-3)^x \cdot (-3) = (-3)^8$

(β) $(-0{,}2)^7 \cdot (-0{,}2)^x = (-0{,}2)^{-5}$

(γ) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 : \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left[\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]^3$

(δ) $\left(\frac{3}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$

11. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση για τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Ο αριθμός 4 ΔΕΝ μπορεί να γραφεί ως:

Α. $(+2)^2$ Β. $(-4)^{-1}$ Γ. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ Δ. $(-2)^2$

(β) Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$, ποια από τις ακόλουθες αριθμητικές παραστάσεις ΔΕΝ ισούται με τις υπόλοιπες;

Α. $\alpha^2 \cdot \alpha^4$ Β. $\alpha^6 : \alpha$ Γ. $\alpha \cdot \alpha^3 : \alpha^{-2}$ Δ. $(\alpha^3)^2$

12. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις ως δυνάμεις με βάση το 3:

(α) 9 (β) 1 (γ) 27^2

(δ) $\frac{1}{81}$ (ε) $(-3)^4$ (στ) $\frac{1}{9^3}$

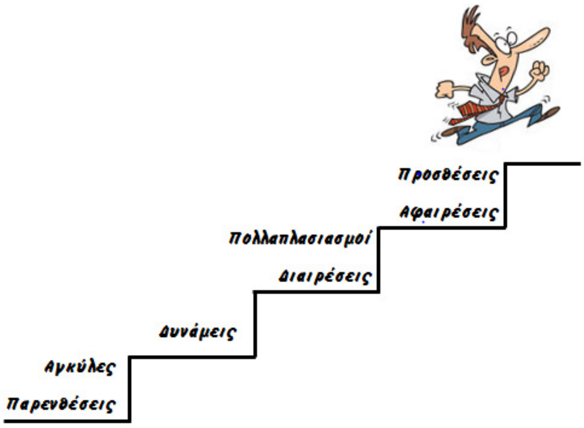
13. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $=$ ή $\neq$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $(-1756)^0$ …… $(-1)^{-8}$ (β) $(-1)^{99}$ …….. $(+1)^{-99}$

(γ) $x^{11} + x^{-3}$ …… $x^8, \;\; x \neq 0$ (δ) $\frac{15^5}{5^5}$ ……… $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

14. Να επιλέξετε τρία κλάσματα μεταξύ του 0 και του 1. Να βρείτε την τιμή του κάθε κλάσματος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη -1. Ποια είναι η σχέση μεταξύ του αρχικού κλάσματος και του κλάσματος υψωμένου στην -1.

Αριθμητικές Παραστάσεις με Δυνάμεις Ρητών Αριθμών



Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $[-52+(-6)^2]:(-1) - (8-9)^9$

Λύση:

*Για να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης πρέπει να εφαρμόσουμε τους **κανόνες προτεραιότητας** των πράξεων.*
Υπολογίζουμε αρχικά το αποτέλεσμα στην αγκύλη (πρώτα τη δύναμη και μετά την πρόσθεση) καθώς και το αποτέλεσμα της παρένθεσης.

$$
\begin{aligned}
[-52+(-6)^2]:(-1)-(8-9)^9 &= [-52+36]:(-1)-(-1)^9 \\
&= (-16):(-1)-(-1)^9 \\
&= (+16)-(-1) \\
&= +16+1 \\
&= +17
\end{aligned}
$$

Εκτελούμε τη διαίρεση.

Εκτελούμε την αφαίρεση.

2. Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $(-2)^{10}:(-2)^7-(-3)^3+(+1)^{99}$

Λύση:

*Για να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης πρέπει να εφαρμόσουμε τους **κανόνες προτεραιότητας** των πράξεων.*
Στην άσκηση αυτή είναι πιο εύκολο να εφαρμόσουμε αρχικά την ιδιότητα του πηλίκου δυνάμεων με την ίδια βάση και ακολούθως να υπολογίσουμε τη δύναμη.

$$
\begin{aligned}
(-2)^{10}:(-2)^7-(-3)^3+(+1)^{99} &= (-2)^3-(-3)^3+(+1)^{99} \\
&= (-8)-(-27)+(+1) \\
&= -8+27+1 \\
&= -8+28 \\
&= +20
\end{aligned}
$$

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.

Εκτελούμε την πρόσθεση και την αφαίρεση.

Δραστηριότητες

1 . Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $-3(-3)^2$ (β) $6-(-2+1)^5$

(γ) $(-7)^8 : (-7)^7 + (-3)^2 + 5^0 - 1^{20}$ (δ) $(2^3-3) : (-5) + (3-5)^2$

(ε) $7{,}25 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1+2)^3 + (-3) : (-4{,}2)^0$

2 . Ο Χριστόφορος έκανε τις πιο κάτω πράξεις. Να εξετάσετε την ορθότητα των πράξεων του.

(α) $(-2)^3$ = -8

(β) $(+2)^3$ = -8

(γ) $(-1)^3$ = -3

(δ) -2^2 = +4

(ε) $-(-2)^2$ = (+2)² = +4

(στ) $-3\cdot(-2)^2$ = (+6)² = 36

(ζ) $-3-2\cdot(-2)^2$ = -5(-1)² =-5(+1)= -5

3 . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2011} + (-1)^{2012}$

4 . Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 3$, να υπολογίσετε τη τιμή των παραστάσεων:

(α) $3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 =$

(β) $(\alpha^2 - \beta) : (-1) + \alpha\beta^2 =$

5 . Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-4)^2 + 3^2 - 1^3 - \left(+\frac{1}{2}\right)^{-3}$

(β) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - (-2)^2 - (-5)^2 : \left(+2\frac{1}{2}\right) - (-2-1)^2$

(γ) $\frac{3\cdot(-2)^2+4\cdot 2^{-1}-(+5)}{5^2-2\cdot(2011-2012)^3}$

Τετραγωνική και Κυβική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Διερεύνηση (1)

Από τον 5^{o} αιώνα π.Χ. οι Αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν με τη μελέτη των αριθμών. Οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν χαλίκια τα οποία διάτασσαν με διάφορους τρόπους για να εξετάσουν τις ιδιότητες των αριθμών. Τις διατάξεις αυτές τις αναπαριστούσαν με κουκίδες.

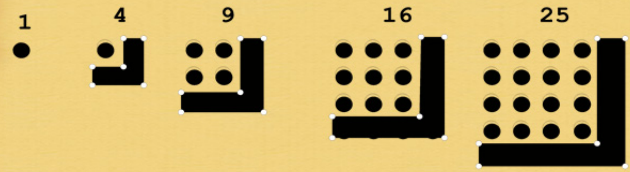
Παράδειγμα: 1 3 6 10

Τρίγωνοι αριθμοί

Η μελέτη των διαφόρων τρόπων διάταξης των αριθμών οδήγησε στην ταξινόμηση τους σε πολλές κατηγορίες: άρτιους, περιττούς, τρίγωνους, τετράγωνους, τέλειους, φίλους κ.τ.λ.

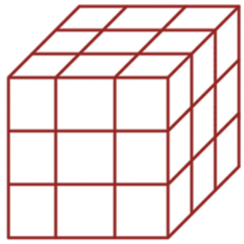
- ✓ Ποιους αριθμούς νομίζετε ότι ονόμαζαν τετράγωνους;
- ✓ Να αναπαραστήσετε σχηματικά τους πέντε πρώτους τετράγωνους αριθμούς.
- ✓ Πόσοι τετράγωνοι αριθμοί υπάρχουν μέχρι το 100;
- ✓ Να εξετάσετε αν ο αριθμός 169 είναι τετράγωνος αριθμός. Να περιγράψετε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσατε.

Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν πως κάθε 'τετράγωνος' αριθμός σχηματίζεται από τον προηγούμενο με πρόσθεση ενός 'γνώμονα'.



Διερεύνηση (2)

Στο σχήμα δίνεται ένας κύβος ο οποίος κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας 27 μικρότερους κύβους ακμής $1\ cm$.

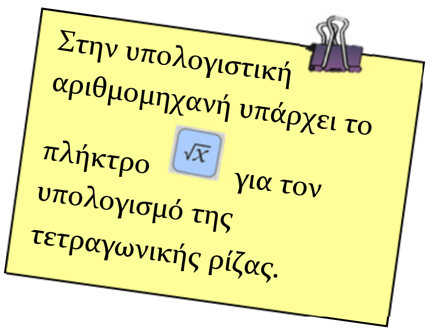


- ✓ Να υπολογίσετε το μήκος της ακμής του μεγάλου κύβου.
- ✓ Να σχεδιάσετε πώς θα είναι ο κύβος με 64 μικρούς κύβους.
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να κατασκευαστεί κύβος με 216 μικρούς κύβους. Να περιγράψετε τη μέθοδο με την οποία εργαστήκατε.
- ✓ Χρησιμοποιώντας την υπολογιστική σας, να εξετάσετε κατά πόσο μπορεί να κατασκευαστεί ένας κύβος με 300 και ένας άλλος με 343 μικρούς κύβους.

Μαθαίνω

- **Τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού α, $(\alpha > 0)$, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

- $\sqrt{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$, όπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.



Η επιγραφή αργίλου με κωδικό «YBC 7289», που ανήκει στη βαβυλώνια συλλογή του Πανεπιστημίου του Yale, και χρονολογείται μεταξύ 1800-1600 π.Χ., αποδεικνύει ότι ότι οι Βαβυλώνιοι ήξεραν να υπολογίζουν την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού με καταπληκτική ακρίβεια (την ίδια που έχει σήμερα μια υπολογιστική μηχανή).

- **Κυβική ή τρίτη ρίζα** ενός θετικού αριθμού $\alpha, (\alpha > 0)$, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, δίνει τον αριθμό α. Η κυβική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt[3]{\alpha}$.
- $\sqrt[3]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^3 = \alpha, \ \ \alpha > 0, \ \ \beta > 0$
- Επειδή, $0^3 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt[3]{0} = 0$.

Στην υπολογιστική αριθμομηχανή υπάρχει το πλήκτρο $\sqrt[3]{x}$ για τον υπολογισμό της κυβικής ρίζας.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{9}$.

   Λύση:
   $\sqrt{9} = 3, \quad \text{γιατί} \ \ 3^2 = 9.$

2. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\sqrt{8\sqrt{4}}$.

   Λύση:
   $\sqrt{4} = 2, \ \ \text{γιατί} \ \ 2^2 = 4.$
   $\sqrt{8\sqrt{4}} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{γιατί} \ \ 4^2 = 16.$

3. Να υπολογίσετε την παράσταση: $\sqrt[3]{125}$

   Λύση:
   $\sqrt[3]{125} = 5, \ \ \text{γιατί} \ \ 5^3 = 125.$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{64}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{(-11)^2}$.

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = -\sqrt{4} + 2\sqrt{16}$.

3. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις παρακάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)	$\sqrt{16} = 8$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β)	$\sqrt{16+9} = 5$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ)	$\sqrt{-9} = 3$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ)	$\left(\sqrt{36}\right)^2 = 36$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(ε)	$\sqrt{(-3)^2} = 3$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

   (α) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (β) $\sqrt{0{,}16}$ (γ) $-\sqrt{0{,}9}$ (δ) $\sqrt{0{,}0001}$

5. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετήσουν σε κάθε σειρά;

6. Η πυραμίδα των Khufu είναι η μεγαλύτερη στον κόσμο. Η βάση της πυραμίδας είναι τετράγωνη με εμβαδόν 50 625 m^2. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας.

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παρατάσεων:

   (α) $\sqrt{3\sqrt{9}}$ (β) $\sqrt{\sqrt{81}}$

8. Να υπολογίσετε την περίμετρο ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι 121 cm^2.

9. Ένας αρχιτέκτονας ετοιμάζει τα σχέδια για μια κατοικία. Με βάση το συντελεστή κάλυψης, ο οποίος καθορίστηκε από την πολεοδομία, στο συγκεκριμένο οικόπεδο μπορεί να κτιστεί σπίτι με εμβαδό βάσης 289 m^2. Αν οι ιδιοκτήτες ζήτησαν η κατοικία να έχει κάτοψη σε σχήμα τετραγώνου, ποιο θα είναι το μήκος της πλευράς του σπιτιού;

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\sqrt[3]{8}$, $-\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{0{,}001}$.

11. Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$B = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{8}}$$

12. Να δείξετε ότι:

(α) $\sqrt[3]{8} = \sqrt{4}$

(β) $\sqrt{(-3+4)^{12}} = \sqrt[3]{(9-2^3)}$

13. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Ακμή κύβου	Όγκος κύβου
	$1\ cm^3$
	$8\ m^3$
	$27\ m^3$
	$125\ cm^3$
	$216\ mm^3$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο πρόσημο:

(α) $(+1)^7 = \cdots 1$ (β) $(+1)^{21} = \cdots 1$ (γ) $(-2)^6 = \cdots 64$

(δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \cdots \frac{1}{16}$ (ε) $(-25)^1 = \cdots 25$ (στ) $(-4)^3 = \cdots 64$

2. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις υπό μορφή δύναμης ή δυνάμεων:

(α) $10 \cdot 10 \cdot 10$ (β) $(-3)(-3)(-3)(-3)$

(γ) $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)$ (δ) $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

(ε) $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \alpha$ (στ) $\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa \cdot \kappa + \kappa \cdot \kappa \cdot \nu \cdot \kappa \cdot \nu$

3. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω δυνάμεις:

(α) $(-3)^2$ (β) $(+1)^5$

(γ) -2^4 (δ) $(-2)^{-3}$

(ε) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$ (στ) $-(-2)^4$

(ζ) $(-3+2)^6$ (η) $(-6+1)^{-2}$

(θ) $(-3)^0$ (ι) $\left(+\frac{1}{2012} - \frac{1}{2012}\right)^{10}$

(ια) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^{-2}$ (ιβ) $\frac{14^5}{7^5}$

4. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, >, =$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς:

(α) $(-1)^{2010} \ldots\ldots (-2010)^0$ (β) $-2^4 \ldots\ldots (-2)^4$

(γ) $(-2)^{2009} \ldots\ldots (+2)^{2009}$ (δ) $-(-5)^2 \ldots\ldots \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$

(ε) $2^2 \cdot 4 \ldots\ldots 4 \cdot 2^{-2}$ (στ) $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10 \ldots\ldots 1\,000\,000$

5. Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες του πίνακα για να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

Δύναμη	Αποτέλεσμα
3^1	3
3^2	9
3^3	27
3^4	81
3^5	243
3^6	729
3^7	2187
3^8	6561
3^9	19683
3^{10}	59049
3^{11}	177147
3^{12}	531441

(α) $81 \cdot 243$

(β) $19683 \cdot 9$

(γ) $6561 : 81$

(δ) $\frac{531441}{59049}$

(ε) $\frac{6561^2}{2187}$

(στ) Να βρείτε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αποτελέσματος της δύναμης 3^{2000}.

6. Να συμπληρώσετε τα κενά με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $(-2)^9 \cdot (-2) \cdot (-2)^{\square} = (-2)^{12}$

(β) $(3^2)^{\square} = 3^{-12}$

(γ) $(+5)^4 \cdot (+5) \cdot (+5)^{\square} = (+5)^{-1}$

(δ) $5^{\square} \cdot 5^3 : 5^6 = 1$

(ε) $(+2)^4 \cdot (+2)^{\square} = (+2)^{-8}$

(στ) $\frac{2^{14} \cdot 2^{\square}}{2^5 \cdot 2^6} = 2^5$

(ζ) $(-3)^4 \cdot (-3)^{-6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{\square} = (-3)^2$

(η) $\left(3^{\square} \cdot 3^2\right) : 3^{-4} = 3^8$

(θ) $\left(3^{\square}\right)^{-2} \cdot 3^5 \cdot 27 = 3^{14}$

(ι) $8^2 \cdot \frac{1}{2} = 2^{\square}$

7. Η απόσταση του Ήλιου από τον πλανήτη Αφροδίτη είναι περίπου 10^8 Km. Η απόσταση του Κρόνου από τον ήλιο είναι περίπου 10^9 Km. Να συγκρίνετε πόσες φορές πιο μακριά είναι ο Κρόνος από τον Ήλιο από ότι είναι η Αφροδίτη από τον Ήλιο;

8. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να αποδείξετε τις σχέσεις:
(α) $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{-\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ (β) $\alpha^{\mu} : \alpha^{-\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

9. Αν ο κ είναι φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι:
$(-1)^{\kappa} + (-1)^{\kappa+1} + (-1)^{\kappa+2} + (-1)^{\kappa+3} = 0$

10. Να γράψετε σε μορφή δύναμης ή δυνάμεων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $4 \cdot 4^{-3} \cdot 4^{5}$

(β) $5^{6} \cdot 5 : 5^{-4}$

(γ) $(\alpha^{-2}\beta^{3}\gamma^{4})^{-3}$

(δ) $25 \cdot (-5)^{3}$

(ε) $9 \cdot 3^{-4} \cdot 27$

(στ) $\frac{1}{9} \cdot (+3)^{5}$

(ζ) $16 \cdot (-2)^{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \frac{1}{4}$

(η) $\dfrac{2^{6} \cdot 3^{6}}{36} =$

(θ) $9 \cdot 3^{5} \cdot 27 + 3^{6} : 3^{-4} + (3^{5})^{2}$

(ι) $3^{3} \cdot 27 + 2 \cdot 3^{4} : 3^{-2} + 7 \cdot \frac{3^{8}}{3^{2}} - (3^{2})^{3}$

(ια) $\dfrac{2^{26} \cdot (0,25)^{3}}{\frac{40^{3}}{5^{3}}}$

11. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-1)^{2012} - 1^{2012}$

(β) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{2} : \left(-1\frac{1}{3}\right)$

(γ) $(-2)^{2} - (+1)^{3} - 7^{0}$

(δ) $(-1)^{5} - 2 \cdot (+5 - 1)^{2}$

(ε) $2^{10} : 2^{7} + (-2)^{0} - (-3)^{3} + (-3 + 4)^{99}$

(στ) $(-4 + 2)^{3} - 4^{2} - [\,(+5) - (-3)^{2}\,] + (-2)^{4}$

(ζ) $(-3)^{19} : (-3)^{17} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$

(η) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(+\frac{1}{5}\right)^{-2} - 3^{0} \cdot (7 - 8)^{21}$

(θ) $\dfrac{5^{12} \cdot (2^{3} \cdot 5^{2})^{4}}{(5^{8} \cdot 2^{4})^{2}}$

(ι) $\dfrac{(-2)^{2} - (+2)^{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} + 3}{(-1)^{2009} + (-2 + 4)^{3} - 1^{2010}}$

12. Αν $\alpha = +2$, $\beta = -1$ και $\gamma = -\frac{1}{2}$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $3\alpha + 4(\alpha + \beta)^2$

(β) $\alpha^3 + 3\alpha^2 - \beta^5 : \alpha^0 - \gamma^{-2}$

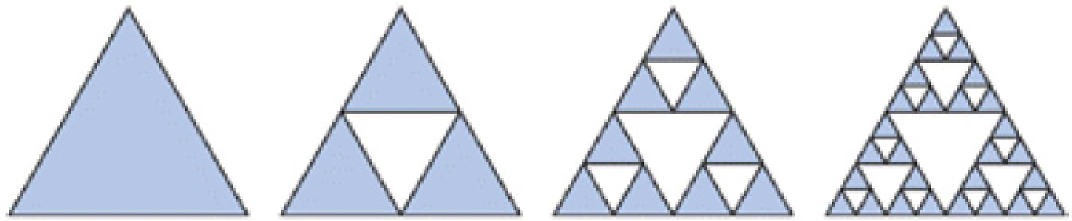
(β) $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2}$

(γ) $\sqrt[3]{\alpha + \beta}$

(γ) $\frac{\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 8}{2\alpha\beta + \gamma^{-1}}$

(δ) $\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$

13. Να υπολογίσετε πόσα σκιασμένα τρίγωνα θα έχει το δέκατο σχήμα του πιο κάτω μοτίβου, τα οποία είναι γνωστά ως ακολουθία τριγώνων Sierpinski:



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να γράψετε την παράσταση $A = 0{,}3^3 \cdot (0{,}01 \ \cdot 9)^4 \cdot \left(\frac{27}{1000}\right) \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2$ σε μορφή δύναμης.

2. Αν $x = -1$ και $y = \ 2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$A = \frac{4x^3+3y^2}{(x+y)^{2011}} + \frac{3x^2 \cdot y^3}{(3x+y)^{2012}} + \frac{-2xy+5y}{(3y+5x)^{2013}}$

3. Δίνεται η παράσταση Α= $[(x^2 \cdot y^3)^{-2} \cdot (x \cdot y^3)^4] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$
(α) Να δείξετε ότι $A = x^9 \cdot y^9$
(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$

4. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να βρεις την τιμή της παράστασης: $A = \ [\ (x^7 y^{-2}\ )^2 \ : \ (xy^7)^{-3}]^{2005}$

5. Να δείξετε τις πιο κάτω σχέσεις:
(α) $(-123)^{201} + (+123)^{201} = 0$
(β) $16^{50} \ = \ 2^{200}$
(γ) $(-25)^{500} \ = \ 5^{1000}$

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης, αν ο α είναι άρτιος αριθμός και ο β περιττός αριθμός: $(-1)^{\alpha} + (+1)^{\beta} - (-1)^{\beta} + 1 + (\alpha)^{2011} \ + (-\alpha)^{2011}$

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Γ αν:
$\mathrm{A} = 11 \cdot 12^7 + 12^4 \cdot 12 \cdot 12^2$ και
$\mathrm{B} = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot 3^2 \cdot 3^6$ και
$\Gamma = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^7$

8. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7

9. Να γράψετε την πιο κάτω παράσταση σε μορφή μιας δύναμης:

$$\mathrm{A} = \frac{(10 + 20 + 30 + \cdots + 90)^{2013}}{(1 + 2 + 3 + \cdots + 9)^{2013}}$$

10. Να περιγράψετε πώς επηρεάζεται το εμβαδόν τετραγώνου και ο όγκος του κύβου, όταν:
    (α) διπλασιαστεί η ακμή τους
    (β) τριπλασιαστεί η ακμή τους.

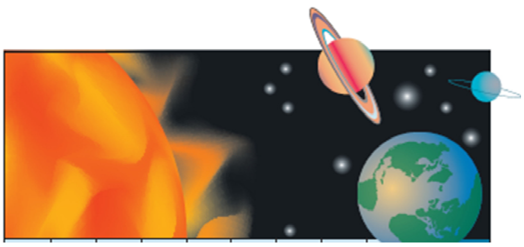
11. Ρώτησαν ένα μαθηματικό του 20^{ου} αιώνα, πόσων ετών είναι. Αυτός απάντησε ως εξής:
    «Η τετραγωνική ρίζα του έτους που γεννήθηκα είναι ακριβώς ίση με τη σημερινή μου ηλικία».
    Πόσων ετών ήταν και ποια χρονολογία έγινε η ερώτηση;

12. Να δείξετε τις πιο κάτω σχέσεις:

    (α) $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}}=3$

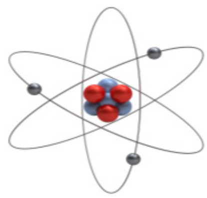
    (β) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2}+\sqrt{9}}=2$

13. Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει την απόσταση του κάθε πλανήτη από τον ήλιο.
    (α) Να τους κατατάξετε σε αύξουσα σειρά με βάση την απόστασή τους από τον Ήλιο.
    (β) Το φως στο διάστημα ταξιδεύει με ταχύτητα $300\,000\ km/sec$. Να υπολογίσετε πόσο χρόνο χρειάζεται το φως για να ταξιδεύσει από τον Ήλιο στον Πλούτωνα.



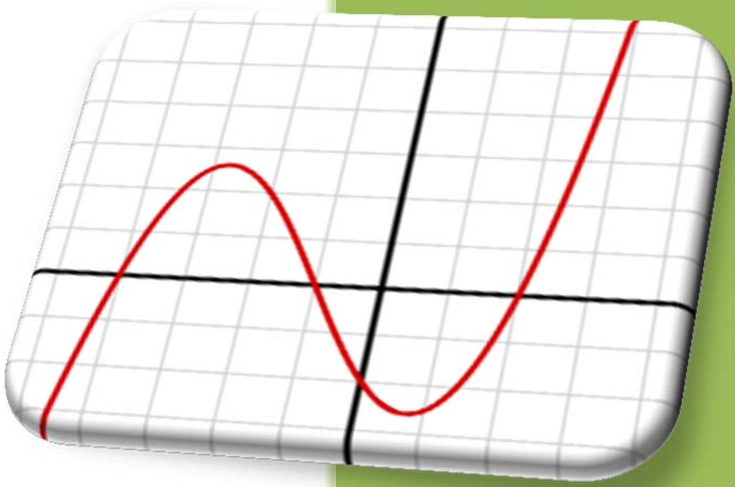
Πλανήτης	Απόσταση από τον ήλιο km
Γη	$1{,}55\cdot10^8$
Δίας	$7{,}78\cdot10^8$
Άρης	$2{,}28\cdot10^8$
Ερμής	$5{,}80\cdot10^7$
Ποσειδώνας	$4{,}50\cdot10^9$
Πλούτωνας	$5{,}90\cdot10^9$
Κρόνος	$1{,}43\cdot10^9$
Ουρανός	$2{,}87\cdot10^9$
Αφροδίτη	$1{,}08\cdot10^8$

14. Η μάζα του ατόμου του λιθίου είναι περίπου το ένα εκατοστό του ενός εκατομμυριοστού του 10^{-18} του κιλού. Να εκφράσετε σε κιλά τη μάζα του ατόμου του λιθίου.



ΕΝΟΤΗΤΑ 7

Συναρτήσεις



Α΄ Γυμνασίου

Συντεταγμένες Σημείου

Εξερεύνηση

Το αγαπημένο παιχνίδι του Σταύρου είναι η Ναυμαχία, ένα από τα πιο γνωστά επιτραπέζια και τώρα και ηλεκτρονικά παιχνίδια. Σε δύο ταμπλό 10 x 10 τετραγώνων τοποθετείται ο στόλος του κάθε παίκτη με τέτοιο τρόπο ώστε να μην είναι ορατός στον αντίπαλο. Στόχος είναι ο παίκτης να αναπτύξει τη στρατηγική του και να εξολοθρεύσει πρώτος το στόλο του αντιπάλου!

Ο Σταύρος παίζει με ένα φίλο του Ναυμαχία. Έχει τοποθετήσει τον στόλο του όπως φαίνεται στην διπλανή εικόνα.

- ✓ Να περιγράψετε μία θέση την οποία πρέπει να στοχεύσει ο φίλος του για βυθίσει ένα από τα πλοία του Σταύρου.

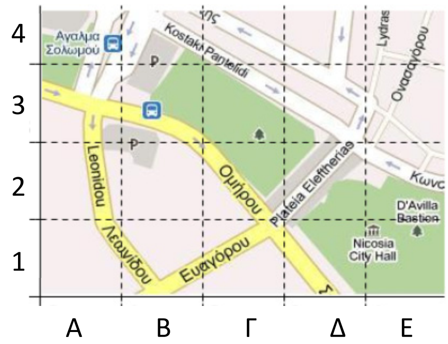
- ✓ Αν η πρώτη βολή του Σταύρου πέτυχε ένα από τα πλοία του αντιπάλου του, να εξηγήστε πώς πρέπει να αποφασίζει για την αμέσως επόμενη κίνησή του, για να πετύχει ξανά το ίδιο πλοίο.

Στις πιο κάτω φωτογραφίες μπορείτε να δείτε την οθόνη που βλέπει ο Σταύρος κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού.

Το παιχνίδι Ναυμαχία παίζεται από τη δεκαετία του 1930. Λέγεται ότι το παιχνίδι ξεκίνησε από τις φυλακές, όπου οι φυλακισμένοι φώναζαν από το ένα κελί στο άλλο τις συντεταγμένες του στόχου.

Διερεύνηση

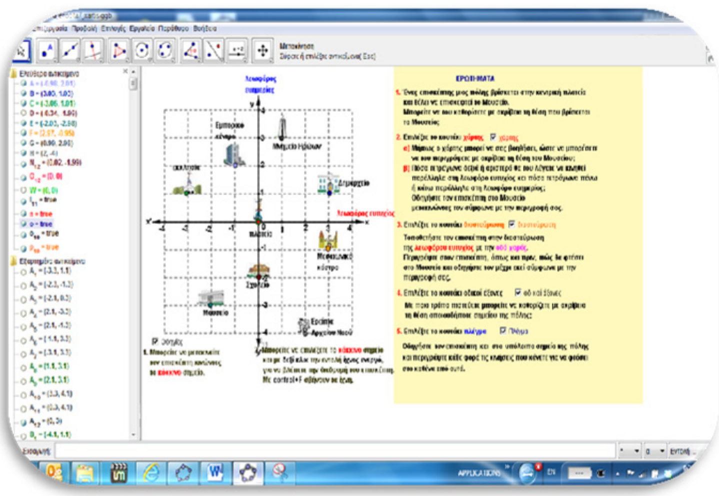
Να χρησιμοποιήσετε τα γράμματα και τους αριθμούς στο χάρτη, για να δείξετε τη συμβολή των οδών Ομήρου και Ευαγόρου.



- ✓ Πώς θα μπορούσατε να δείξετε το σταθμό αστικών λεωφορείων στο «Άγαλμα Σολωμού»;

- ✓ Ένας τουρίστας θέλει να επισκεφτεί το δημαρχείο Λευκωσίας (City Hall). Να δείξετε τη θέση στο χάρτη με τη βοήθεια των αριθμών και των γραμμάτων.

- ✓ Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En7_xartis.ggb» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες για να μετακινηθείτε στα διάφορα σημεία της πόλης. Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

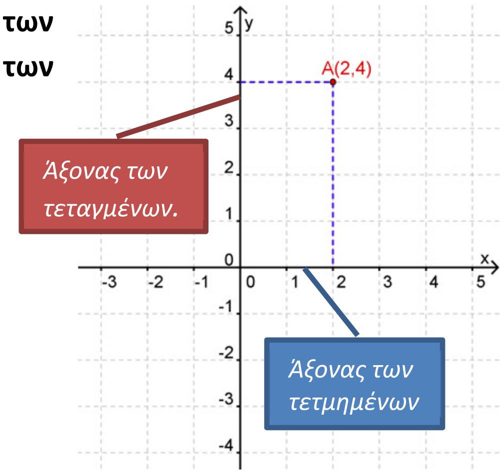


Μαθαίνω

- **Ορθογώνιο σύστημα αξόνων** ονομάζουμε δύο κάθετους αριθμημένους άξονες, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο, με σημείο τομής τους το μηδέν του κάθε άξονα. Το σημείο τομής το συμβολίζουμε με Ο και το ονομάζουμε **αρχή των αξόνων**.

- Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος **άξονας των τεταγμένων**.

- Αν επιπλέον έχει οριστεί πάνω στους άξονες η ίδια μονάδα μέτρησης, το σύστημα ονομάζεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.



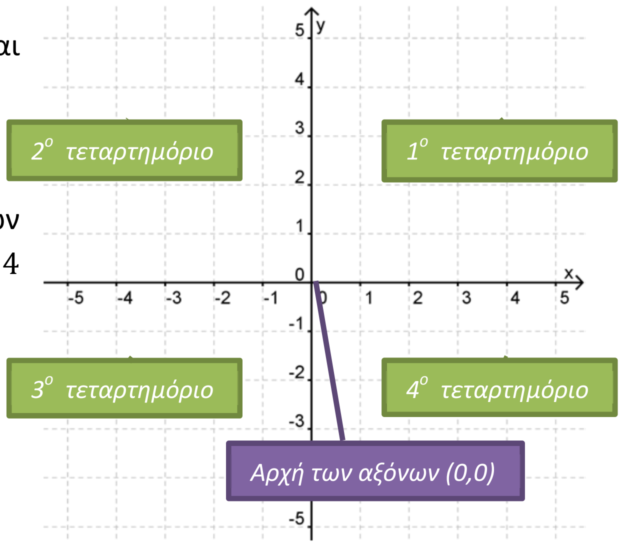
- Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο μπορεί να οριστεί από ένα **διατεταγμένο ζεύγος** αριθμών (x, y) που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου.

  Παράδειγμα:
  Στο πιο πάνω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι σημειωμένη η θέση του σημείου $A(2,4)$.

- Ο πρώτος αριθμός σε ένα διατεταγμένο ζεύγος είναι η **τετμημένη** και ο δεύτερος είναι η **τεταγμένη.**

- Το σημείο τομής των αξόνων $(0,0)$ ονομάζεται **αρχή των αξόνων.**

- Ο άξονας των τετμημένων και των τεταγμένων χωρίζουν το επίπεδο των συνταγμένων σε 4 περιοχές που ονομάζονται **τεταρτημόρια**.

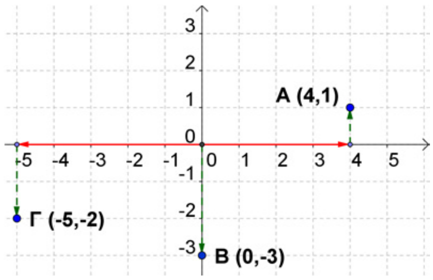


- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και αντιστρόφως κάθε διατεταγμένο ζεύγος αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Παραδείγματα

1. Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(4,1)$, $B(0,-3)$ και $\Gamma(-5,-2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να περιγράψετε τη θέση του κάθε σημείου.

   Λύση:

   <u>Σημείο Α:</u>
   Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 4 μονάδες δεξιά και μετά μια μονάδα πάνω.
   Το σημείο Α βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.
   <u>Σημείο Β:</u>
   Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων προχωρούμε 3 μονάδες κάτω.
   Το σημείο Β βρίσκεται πάνω στον άξονα των y.
   <u>Σημείο Γ:</u>
   Προχωρούμε 5 μονάδες αριστερά της αρχής των αξόνων και μετά 2 μονάδες κάτω.
   Το σημείο Γ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.

Δραστηριότητες

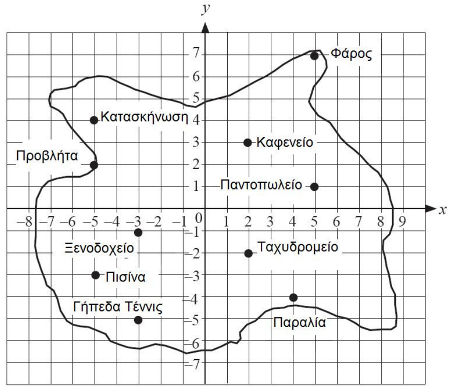
1. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να σημειώσετε τα σημεία: $A(2,1)$, $B(1,2)$, $\Gamma(4,-2)$, $\Delta(-2,-1)$, $E(4,0)$, $Z(-4,0)$, $H(0,4)$, $\Theta(0,-4)$.

2. Να γράψετε 5 διατεταγμένα ζεύγη αριθμών, των οποίων η τετμημένη τους είναι ίση με την τεταγμένη τους. Να τα τοποθετήσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

3. Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία $A(-2,5)$ και $B(6,5)$ και να βρείτε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB και να γράψετε τις συντεταγμένες του.

4. Να δώσετε τις συντεταγμένες ενός σημείου που βρίσκεται:
   (α) πάνω στον άξονα των τετμημένων
   (β) πάνω στον άξονα των τεταγμένων

5. Ο χάρτης παρουσιάζει τις θέσεις συγκεκριμένων σημείων σε ένα μικρό νησάκι.
   (α) Να δώσετε τις συντεταγμένες της θέσης:
      i. της κατασκήνωσης,
      ii. του ξενοδοχείου,
      iii. της παραλίας,
      iv. της πισίνας,
      v. του καφενείου.
   (β) Να βρείτε τρία σημεία στο χάρτη που έχουν την ίδια τετμημένη.
   (γ) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στο τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο



6. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι *πάντοτε*, *κάποτε* ή *ποτέ* αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα, για να στηρίξετε την απόφασή σας.
   (α) *Οι συντεταγμένες ενός σημείου είναι αρνητικές.*
   (β) *Η τετμημένη ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στον άξονα των x είναι μηδέν.*
   (γ) *Η τεταγμένη ενός σημείου στο τέταρτο τεταρτημόριο είναι αρνητική.*
   (δ) *Το άθροισμα της τετμημένης και της τεταγμένης ενός σημείου στο τρίτο τεταρτημόριο είναι θετικό.*

7. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$.
   (α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα και να σχηματίσετε διατεταγμένα ζεύγη (πλευρά, περίμετρος) για κάθε σχήμα

Πλευρά (x)	1	2	3	4	5
Περίμετρος (y)					
Διατεταγμένο ζεύγος (x, y)					

   (β) Να σημειώσετε σε σύστημα αξόνων τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη.
   (γ) Να ενώσετε τα σημεία με μια συνεχή γραμμή. Τι παρατηρείτε;

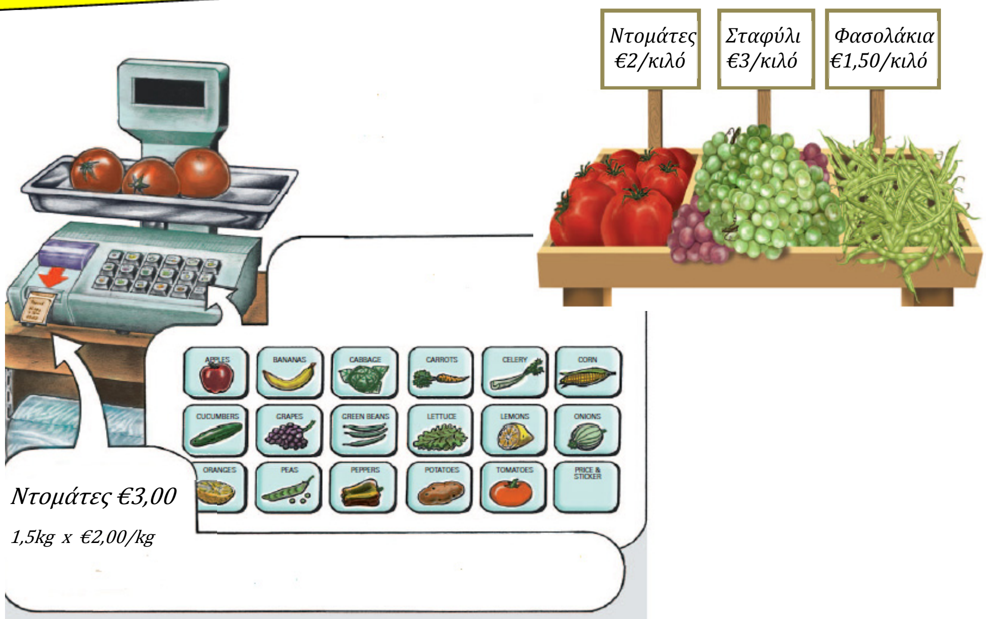
8. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να χρωματίσετε:
   (α) *με ΜΠΛΕ, την περιοχή όπου το γινόμενο των συντεταγμένων είναι αρνητικό*
   (β) *με ΚΟΚΚΙΝΟ, την περιοχή όπου το γινόμενο των συντεταγμένων είναι θετικό*
   (γ) *με ΠΡΑΣΙΝΟ, την περιοχή όπου το γινόμενο των συντεταγμένων είναι μηδέν*

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της Αντιστοιχίας – Συνάρτησης

Εξερεύνηση

Ολόφρεσκα φρούτα και λαχανικά, αυστηρά επιλεγμένα από τους καλύτερους παραγωγούς, έρχονται καθημερινά στη φρουταρία μας, ενώ για τους καταναλωτές που αρέσκονται σε κάτι διαφορετικό και εξωτικό, υπάρχει πάντα μία μεγάλη ποικιλία επιλογών.



Ο υπάλληλος στη φρουταρία βάζει στη ζυγαριά το κάθε είδος λαχανικού, η μηχανή το ζυγίζει και πατώντας το πλήκτρο που αντιστοιχεί στο κάθε λαχανικό (προϊόν) γίνεται η χρέωση στην απόδειξη του πελάτη.

- ✓ Να ερμηνεύσετε πώς υπολογίζει η μηχανή το συνολικό κόστος για κάθε ένα προϊόν που αγοράζει ο πελάτης.

<u>Απόδειξη</u>

⋮

Ντομάτες €3,00

1,50 kg x €2,00/kg

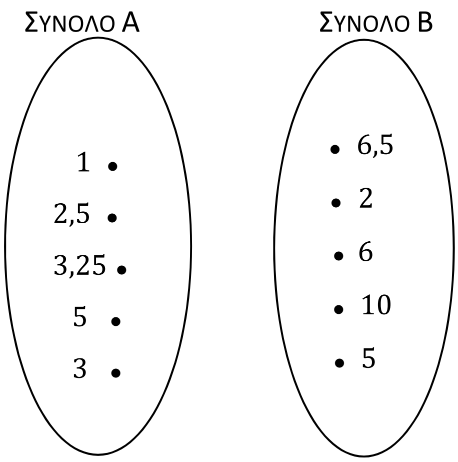
⋮

Διερεύνηση (1)

✓ Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να δείχνει πόσο θα είναι το συνολικό κόστος που θα πληρώσουμε για x κιλά ντομάτες που πωλούνται προς €$2{,}00/kg$ και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Τιμή Εισόδου *Κιλά* (x)	Τιμή Εξόδου *Συνολικό κόστος* (y)
1	
2	
3	
⋮	
x	

✓ Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία του συνόλου A (κιλά ντομάτες) με τα στοιχεία του συνόλου B (κόστος).

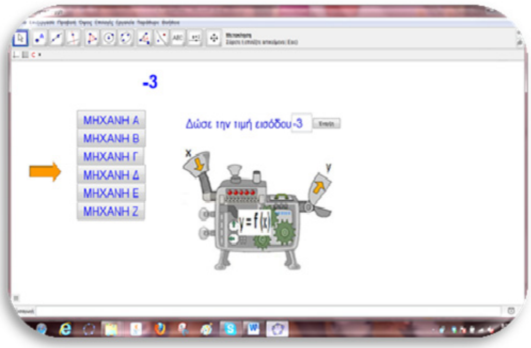


✓ Να μελετήσετε τον πιο κάτω πίνακα, να βρείτε την τιμή των μανταρινιών και ακολούθως να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν.

Μανταρίνια (kg)	5	2	3	…
Συνολικό κόστος (€)	6,50	…	3,90	9,75

Διερεύνηση (2)

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En7_michani_synartisis.ggb».



- ✓ Να επιλέξετε μια από τις 6 μηχανές. Να μελετήσετε πώς συνδέονται οι τιμές εισόδου που εισάγετε στη μηχανή με τις τιμές εξόδου.

- ✓ Να βρείτε έναν κανόνα αντιστοίχισης των στοιχείων του συνόλου A (τιμές εισόδου x) με τα στοιχεία του συνόλου B (τιμές εξόδου y) για καθεμιά από τις μηχανές.

- ✓ Με βάση τον κανόνα που έχετε ορίσει, μπορείτε να αντιστοιχίσετε δύο στοιχεία του συνόλου A με το ίδιο στοιχείο του συνόλου B;

- ✓ Με βάση τον κανόνα που έχετε ορίσει, μπορείτε να αντιστοιχίσετε κάποιο στοιχείο του συνόλου A με δύο στοιχεία του συνόλου B;

Μαθαίνω

- **Αντιστοιχία** λέγεται μια σχέση (κανόνας) που συνδέει τα στοιχεία ενός συνόλου A (σύνολο εισόδου) με τα στοιχεία ενός συνόλου B (σύνολο εξόδου).

- **Συνάρτηση** ονομάζουμε την ειδική περίπτωση αντιστοιχίας που σε **κάθε** στοιχείο του συνόλου εισόδου αντιστοιχεί **μόνο ένα** στοιχείο του συνόλου εξόδου.

- Αν τα στοιχεία του συνόλου των τιμών εισόδου (x) και τα στοιχεία του συνόλου των τιμών εξόδου (y) είναι αριθμοί και συνδέονται μεταξύ τους, μέσω μιας ισότητας στην οποία η τιμή του y εξαρτάται από την τιμή του x, τότε η ισότητα αυτή ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης**.

  Παράδειγμα: $y = 2x + 3\,,\;\; y = x^2 + 2x + 3$

Παραδείγματα

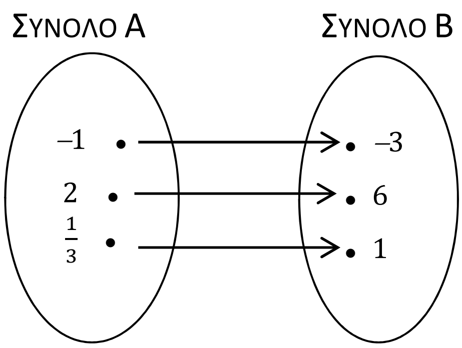
1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = x + 4$. Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών, με τρεις οποιοδήποτε τιμές εισόδου.

Λύση:

Ο τύπος της συνάρτησης είναι ο $y = x + 4$, δηλαδή προσθέτουμε 4 σε κάθε τιμή εισόδου, για να βρούμε την αντίστοιχη τιμή εξόδου.

Τιμή εισόδου x	Τιμή εξόδου y
-2	$-2 + 4 = +2$
1	$1 + 4 = 5$
4	$4 + 4 = 8$

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης:



Λύση:

Μελετούμε τη σχέση που έχουν τα στοιχεία του συνόλου Α με τα αντίστοιχα στοιχεία του συνόλου Β.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των στοιχείων του συνόλου Β είναι τριπλάσιες των αντίστοιχων τιμών των στοιχείων του συνόλου Α.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι $y = 3x$.

Δραστηριότητες

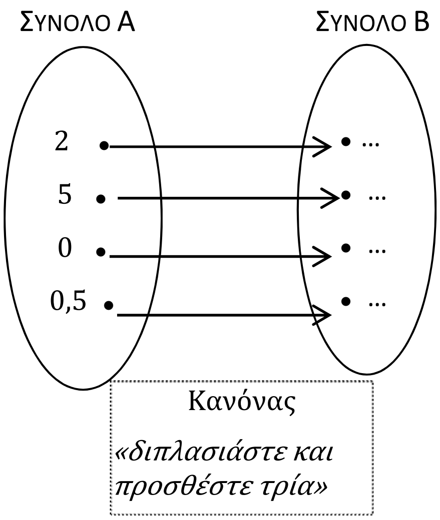
1. Να συμπληρώσετε τους πιο κάτω πίνακες:

Τύπος συνάρτησης: $y = x - 3$	
Τιμή εισόδου x	Τιμή εξόδου y
-2	…
0	…
2	…

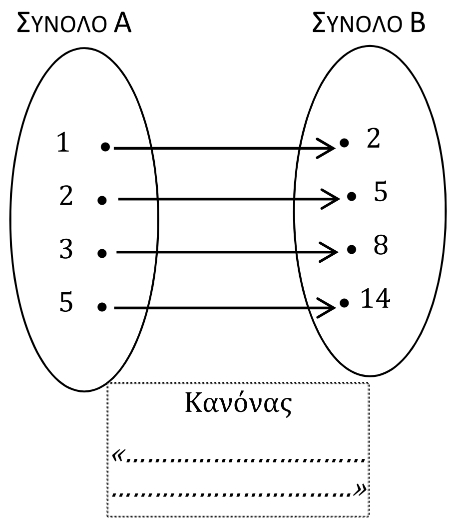
Τύπος συνάρτησης: ………………	
Τιμή εισόδου x	Τιμή εξόδου y
-3	6
1	-2
4	-8

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις:

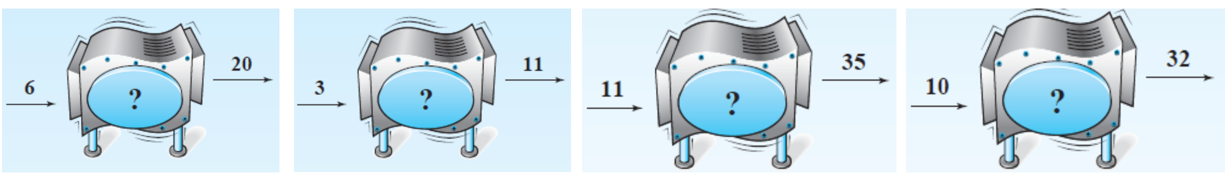
(α)



(β)



3. Να βρείτε έναν τύπο της συνάρτησης της μηχανής, μελετώντας τις τιμές εισόδου και εξόδου στις 4 διαφορετικές φάσεις που φαίνεται δίπλα.



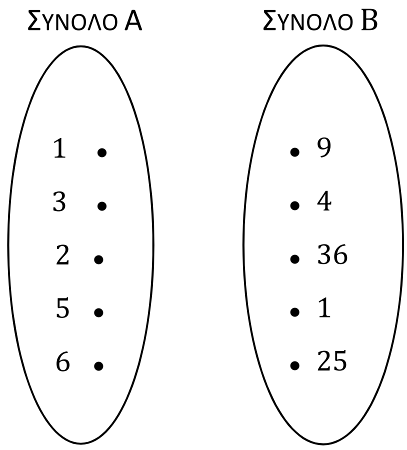
4. Σε μια συνάρτηση δίνονται οι τιμές εισόδου $-3, 0, 6$ και οι αντίστοιχες τιμές εξόδου $1, 4, 10$. Να βρείτε έναν τύπο της συνάρτησης.

5. Στο σχήμα βλέπουμε τον τρόπο που τεμαχίζεται ένα κεφαλοτύρι πριν από τη συσκευασία του. Συμβολίζουμε με τ τον αριθμό των τομών που κάνουμε κατά μήκος του κέντρου του κύκλου και με κ τον συνολικό αριθμό κομματιών τυριού που προκύπτουν κάθε φορά.

   (α) Να εκφράσετε τον αριθμό των κομματιών τυριού κ, σε σχέση με τον αριθμό των τομών τ.

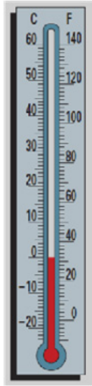
   (β) Να υπολογίσετε πόσα κομμάτια τυριού θα πάρουμε αν κάνουμε 9 τομές.

6. Να βρείτε έναν κανόνα αντιστοίχισης, ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου Α να αντιστοιχεί με ένα στοιχείο του συνόλου Β.



Γραφική παράσταση Συνάρτησης

Διερεύνηση (1)



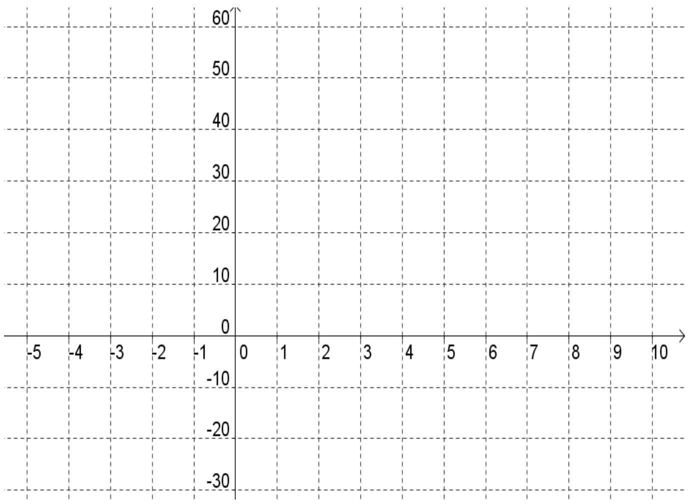
Σε κάποιες χώρες (π.χ. Η.Π.Α.) για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιείται η κλίμακα Φάρεναιτ (°F). Για τη μετατροπή της θερμοκρασίας από βαθμούς Κελσίου σε βαθμούς Φάρεναιτ, χρησιμοποιείται η συνάρτηση με τύπο: $y = \frac{9}{5}x + 32$, όπου x η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($℃$) και y η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ ($℉$).

- ✓ Να εκτιμήσετε ποια είναι η θερμοκρασία στην κλίμακα Φαρενάιτ και στην κλίμακα Κελσίου στις πιο κάτω καταστάσεις που παρουσιάζονται στις φωτογραφίες:

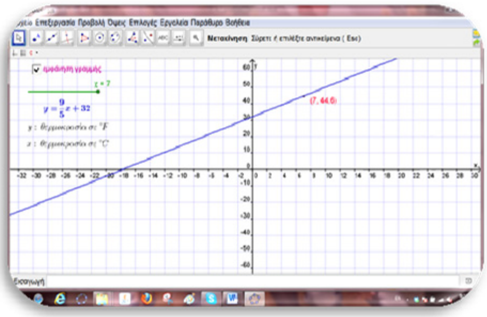



- ✓ Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης και να παραστήσετε τα διατεταγμένα ζεύγη στο σύστημα αξόνων:

x	-5	0	1	5	10
y					
(x,y)					



- ✓ Αν ενώσουμε τα σημεία τι γραμμή σχηματίζεται; Αν ο πίνακας περιείχε περισσότερα σημεία τι θα συνέβαινε;



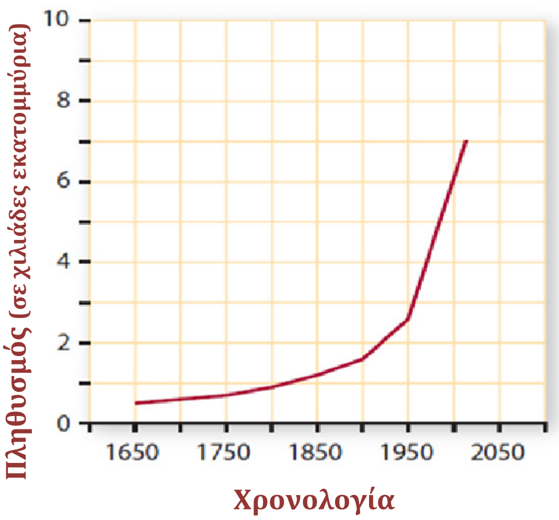
- ✓ Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En7_Synartisi.ggb» και να προσθέσετε με τη βοήθεια του δρομέα να προσθέσετε και άλλα σημεία στην συνάρτηση. Τι παρατηρείτε;

- ✓ Για ποια τιμή της κλίμακας Κελσίου η θερμοκρασία στην κλίμακα Φαρενάιτ είναι ίση με μηδέν;

- ✓ Να εξετάσετε αν το θερμόμετρο μπορεί να δείξει την ίδια ένδειξη και στις δύο κλίμακες.

Διερεύνηση (2)

Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τον πληθυσμό της γης σε χιλιάδες εκατομμύρια ανθρώπους για την περίοδο $1650-2010$.



- ✓ Να υπολογίσετε τον πληθυσμό της γης το 2000;

- ✓ Πόσος περίπου ήταν ο πληθυσμός το 1960;

- ✓ Πότε ο πληθυσμός αναμένεται να φθάσει τα 8 000 000 000 κατοίκους;

- ✓ Σε ποια εκατονταετία σημειώθηκε η μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;

Μαθαίνω

- Η αναπαράσταση σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών (x, y), που προκύπτουν μέσω του τύπου της συνάρτησης, ονομάζεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.

- Ειδικά τα σημεία που δημιουργούνται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ ανήκουν σε μια **ευθεία γραμμή**.

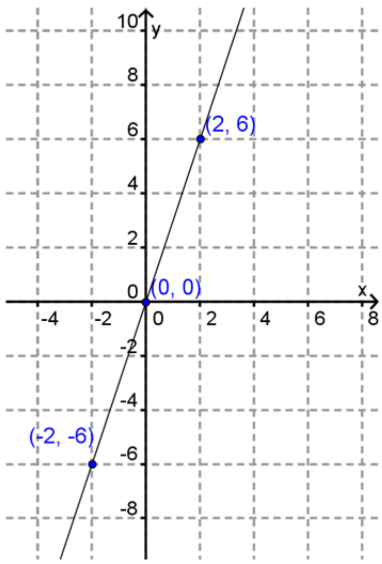
- Αν η σχέση που συνδέει τις τιμές εισόδου x με τις τιμές εξόδου y είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$, τότε έχουμε **γραμμική συνάρτηση.**

Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = 3x$, όπου x αριθμός.
   (α) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών. Ως τιμή εισόδου να χρησιμοποιήσετε τις τιμές του x και ως τιμή εξόδου τις αντίστοιχες τιμές του y.
   (β) Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

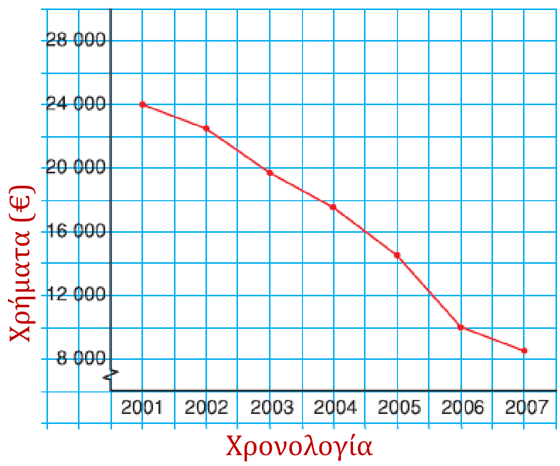
Λύση:

Τιμή Εισόδου x	Τύπος Συνάρτησης $3x$	Τιμή Εξόδου y	Διατεταγμένο Ζεύγος (x, y)
-2	$3 \cdot (-2)$	-6	$(-2, -6)$
0	$3 \cdot (0)$	0	$(0,0)$
$\frac{1}{2}$	$3 \cdot (\frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
2	$3 \cdot (2)$	6	$(2,6)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Τοποθετούμε τα σημεία στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και παρατηρούμε ότι τα σημεία της γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$ ανήκουν σε ευθεία.

2. Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τη μεταβολή της αξίας ενός αυτοκινήτου που αγοράσαμε το 2001.
   (α) Να βρείτε πόσο μειώθηκε η αξία του τα πρώτα δύο χρόνια.
   (β) Ποια χρονική στιγμή το αυτοκίνητο είχε τη μισή αξία αγοράς;
   (γ) Ποια χρονιά σημειώθηκε η μεγαλύτερη μείωση;



Λύση:

(α) *Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το* 2001 *η αξία του αυτοκινήτου ήταν* $€24.000$ *ενώ το* 2003 *ήταν* $€19.750$*. Άρα μειώθηκε* $24\,000 - 19\,750 = 4250$ *ευρώ.*

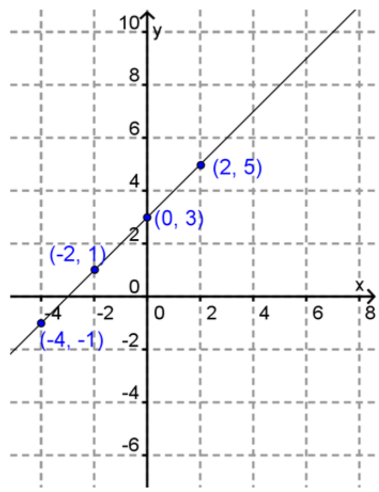
(β) *Το αυτοκίνητο είχε αξία* $€12.000$ *στα μέσα του* 2005*.*

(γ) *Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η μεγαλύτερη μείωση σημειώθηκε μεταξύ του* 2005 *και του* 2006*.*

3. Να κατασκευάσετε τον πίνακα τιμών της γραφικής παράστασης που φαίνεται στο σχήμα και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που αναπαριστά.

Λύση:

Τιμή Εισόδου x	Τιμή Εξόδου y	Διατεταγμένο Ζεύγος (x, y)
-4	-1	$(-4, -1)$
-2	1	$(-2, 1)$
0	3	$(0, 3)$
2	5	$(2, 5)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Παρατηρούμε ότι η τιμή εξόδου (y) *είναι πάντοτε* 3 *μονάδες μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή εισόδου* (x)*. Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης είναι* $y = x + 3$*.*

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = 3x - 1$, όπου x αριθμός.

   (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

   (β) Να τοποθετήσετε τα σημεία που αντιστοιχούν στα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

   (γ) Τι είδους γραμμή θα προκύψει, αν ενώσετε τα σημεία που βρήκατε;

Τιμή Εισόδου x	Τιμή Εξόδου y	Διατεταγμένα ζεύγη (x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

2. Να βρείτε την περίμετρο του τετραγώνου με πλευρά $10cm$. Ακολούθως να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που υπολογίζει την περίμετρο (y) ενός τετραγώνου σε σχέση με την πλευρά του (x).

   (α) Να συμπληρώσετε πίνακα τιμών της συνάρτησης με τιμές εισόδου 4 τιμές της πλευράς του τετραγώνου.

   (β) Να τοποθετήσετε τα σημεία αυτά σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

   (γ) Τι είδους γραμμή θα προκύψει, αν ενώσετε τα σημεία που βρήκατε;

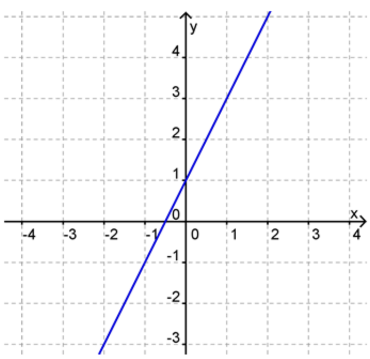
3. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται από τους πιο κάτω τύπους είναι ευθείες. Να κατασκευάσετε πίνακα τιμών και να τις παραστήσετε γραφικά.

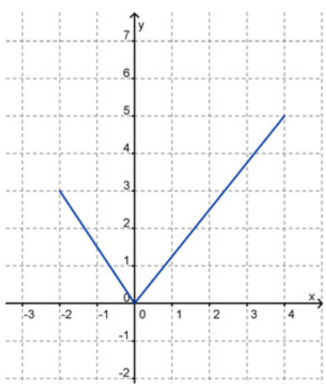
   (α) $y = 2x$

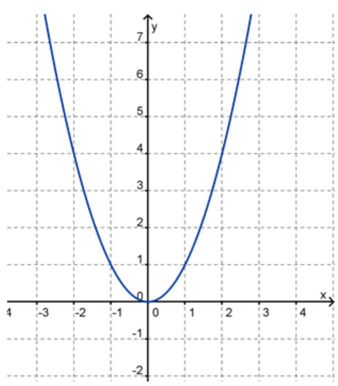
   (β) $y = 2x + 3$

4. Σε ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις ανήκουν τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) του διπλανού πίνακα τιμών;

x	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1







5. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.
   Η πιο κάτω γραφική παράσταση αναπαριστά:

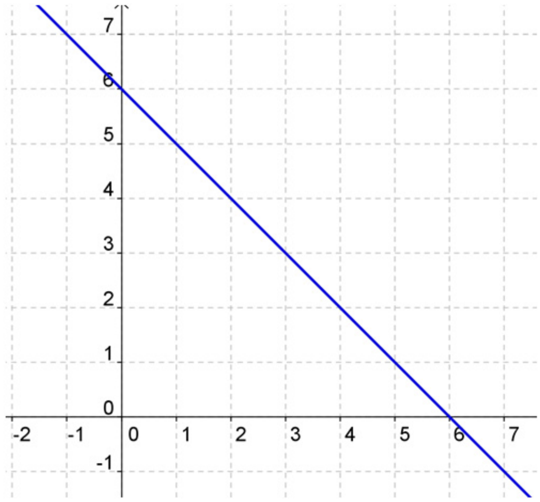
   Α. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν γινόμενο* 6.

   Β. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν άθροισμα* 6.

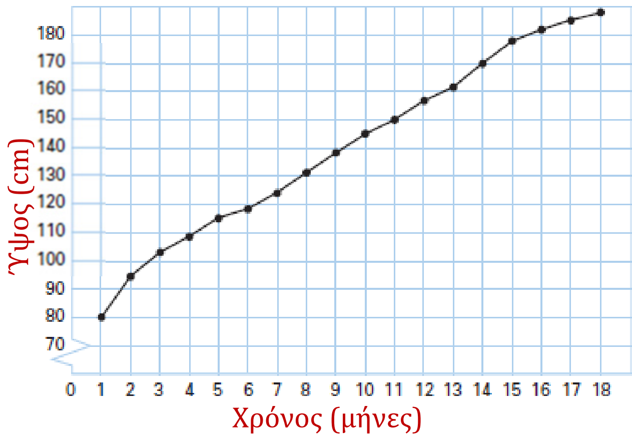
   Γ. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν πηλίκο* 6.

   Δ. *Τα ζεύγη των αριθμών που έχουν διαφορά* 6.

   Ε. *Κανένα από τα πιο πάνω.*

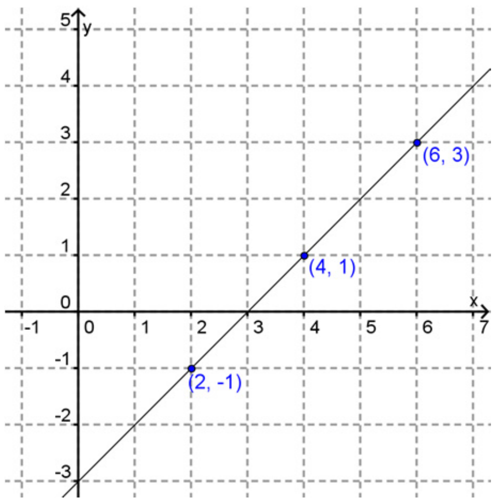


6. Στη γραφική παράσταση παρουσιάζεται το ύψος σε cm ενός φυτού για μια περίοδο 18 μηνών. Οι μετρήσεις γίνονται στην αρχή του κάθε μήνα. Να βρείτε:
   (α) Πόσο ύψος είχε στις αρχές του $7ου$ μήνα;
   (β) Σε τι ύψος έφτασε το φυτό;
   (γ) Πότε το φυτό είχε ύψος 170 cm;
   (δ) Ποιο μήνα το φυτό είχε τη μεγαλύτερη αύξηση σε ύψος;

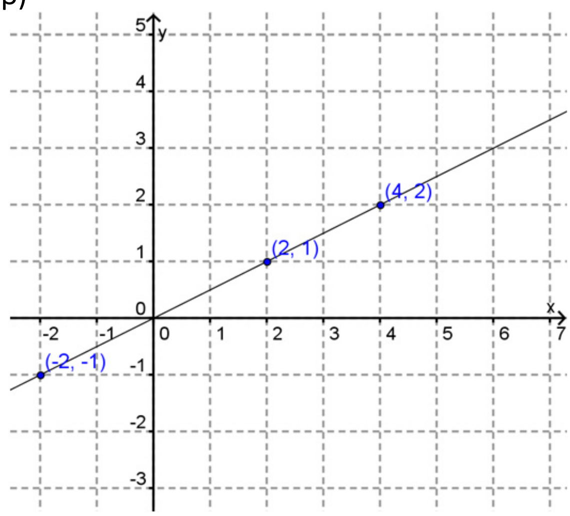


7. Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών για κάθε μια γραφική παράσταση και να βρείτε έναν τύπο για την κάθε συνάρτησης.

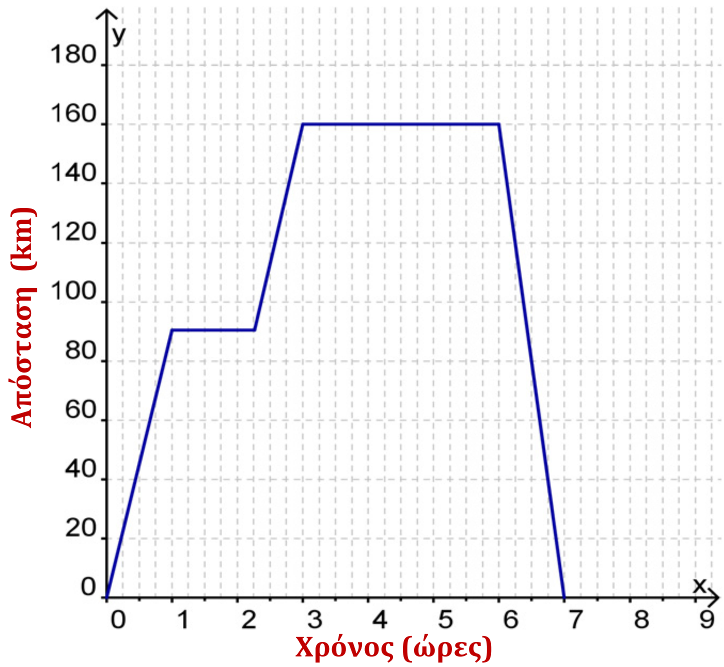
(α)



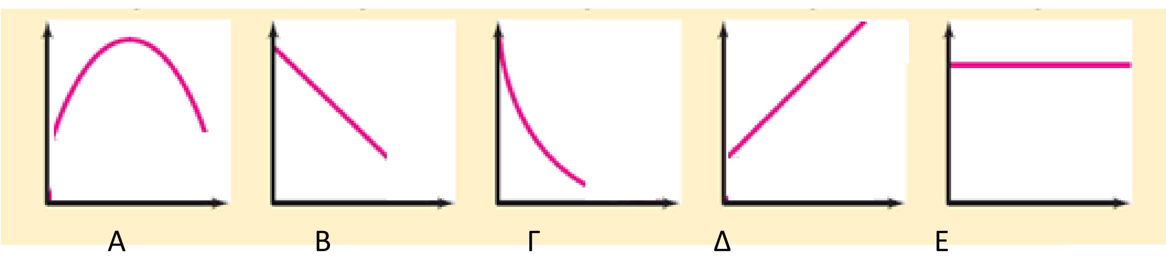
(β)



8. Η οικογένεια του κυρίου Γιάννη πραγματοποίησε την Κυριακή μια εκδρομή. Ταξίδεψαν με αυτοκίνητο από τη Λευκωσία στην Πάφο, για να δούνε τους παππούδες και γύρισαν πάλι Λευκωσία από τον ίδιο δρόμο. Η γραφική παράστασή της απόστασης από το σπίτι τους σε σχέση με το χρόνο έχει καταγραφεί στο διπλανό διάγραμμα.
   (α) Ποια ήταν η συνολική διάρκεια του ταξιδιού τους;
   (β) Πόσο απέχει το σπίτι του παππού από το σπίτι τους;
   (γ) Πόσα km ήταν όλη η διαδρομή;
   (δ) Πού έγιναν στάσεις και για πόσο χρόνο;



9. Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν την τιμή πώλησης ενός λίτρου βενζίνης σε σχέση με το χρόνο. Να αντιστοιχίσετε την κάθε γραφική παράσταση με την αντίστοιχη λεκτική έκφραση.



(α) *Η τιμή της βενζίνης αυξήθηκε στην πάροδο του χρόνου.*

(β) *Η τιμή της βενζίνης έμεινε σταθερή στην πάροδο του χρόνου.*

(γ) *Η τιμή της βενζίνης αυξήθηκε για ένα διάστημα και ακολούθως μειώθηκε.*

10. Ο Ιάσονας ζυγίζει $100\,kg$. Έχουν βάλει στόχο, με το γυμναστή και το διαιτολόγο του, να χάνει $2\,kg$ το μήνα.

(α) Να γράψετε τη σχέση που εκφράζει τη μάζα (σε κιλά) που στοχεύει να έχει κάθε μήνα σε σχέση με το χρόνο (σε μήνες).

(β) Να συμπληρώσετε έναν πίνακα τιμών και να τοποθετήσετε τα διατεταγμένα ζεύγη σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

(γ) Σε πόσους μήνες αναμένει να φθάσει στα $80\,kg$ που είναι ο στόχος του;

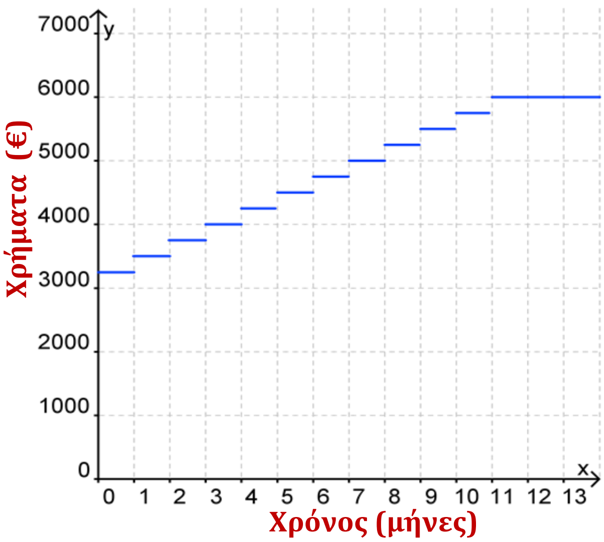
(δ) Σε 6 μήνες φθάνει καλοκαίρι, πόσο βάρος θα έχει τότε αν ακολουθήσει πιστά τη δίαιτα;

11. Ο κύριος Νικόλας έχει ανοίξει ένα λογαριασμό στην τράπεζα στον οποίο κατέθεσε €3.000. Έχει υπογράψει τραπεζική εντολή για να κατατίθενται στην αρχή κάθε μήνα ένα σταθερό ποσό. Να μελετήσετε τη γραφική παράσταση και να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

(α) Πόση είναι η μηνιαία δόση του;

(β) Πόσα θα έχει ο λογαριασμός στο τέλος του $10^{ου}$μήνα;

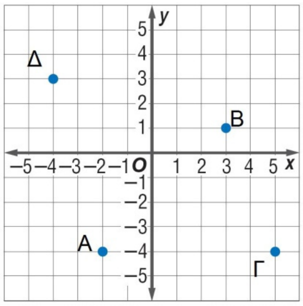
(γ) Για πόσους μήνες ίσχυε η εντολή;



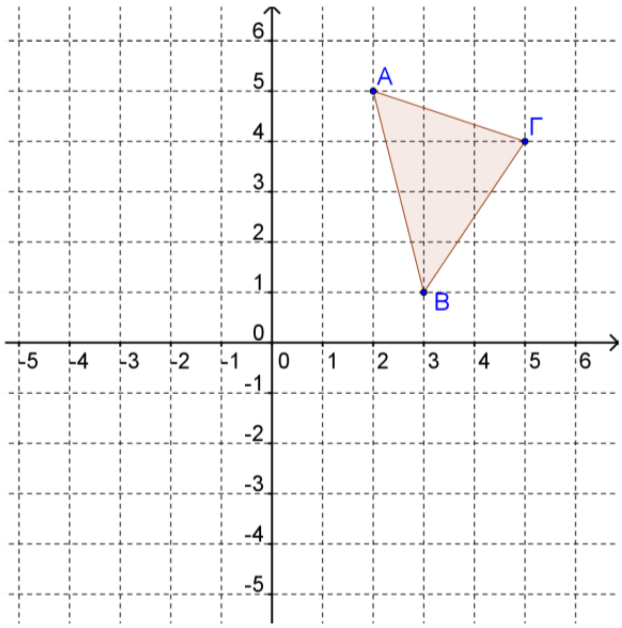
Δραστηριότητες ενότητας

1. Να τοποθετήσετε τα σημεία $A(-3,-2)$, $B(-3,6)$, $\Gamma(5,6)$, και $\Delta(5,-2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να ενώσετε τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα και να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που προκύπτει.

2. Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Δ του διαγράμματος, που φαίνεται δίπλα.



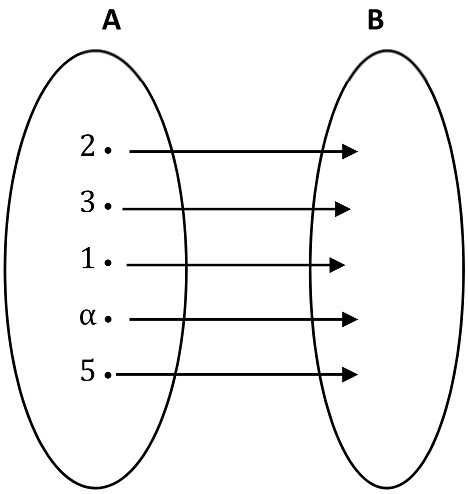
3. Στο πιο κάτω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$.
   (α) Να βρείτε τα διατεταγμένη ζεύγη, που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.
   (β) Να πολλαπλασιάσετε τόσο την τετμημένη όσο και την τεταγμένη της κάθε κορυφής του $AB\Gamma$ με -1 και να ονομάσετε τα νέα διατεταγμένα ζεύγη που θα προκύψουν, A', B' και Γ', αντίστοιχα.
   (γ) Να τοποθετήσετε τα νέα σημεία A', B' και Γ'στο σύστημα συντεταγμένων. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$;
   (δ) Να πολλαπλασιάσετε με -2 μόνο την τεταγμένη της κάθε κορυφής του $AB\Gamma$. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το νέο τρίγωνο που παράγεται;



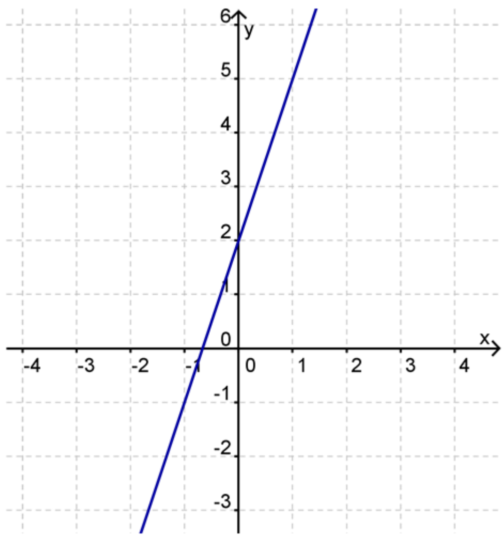
4. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιών που παραδίδει στο ελαιοτριβείο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

   (α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;
   (β) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;
   (γ) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που συνδέει την παραγωγή ελιών με την παραγωγή λαδιού.

5. Συμβολίζουμε με x το μήκος της ακμής ενός κύβου και y τον όγκο του. Το σύνολο Α περιέχει τις τιμές του x και το σύνολο Β τις αντίστοιχες τιμές του y. Να συμπληρώσετε την αντιστοιχία, αν ο όγκος δίνεται από τη σχέση $y = x^3$:



6. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x + 2$. Ποιος πίνακας τιμών περιέχει διατεταγμένα ζεύγη που αντιστοιχούν στην πιο πάνω ευθεία;



(α)

x	-1	0	2	3
y	-5	-2	4	7

(β)

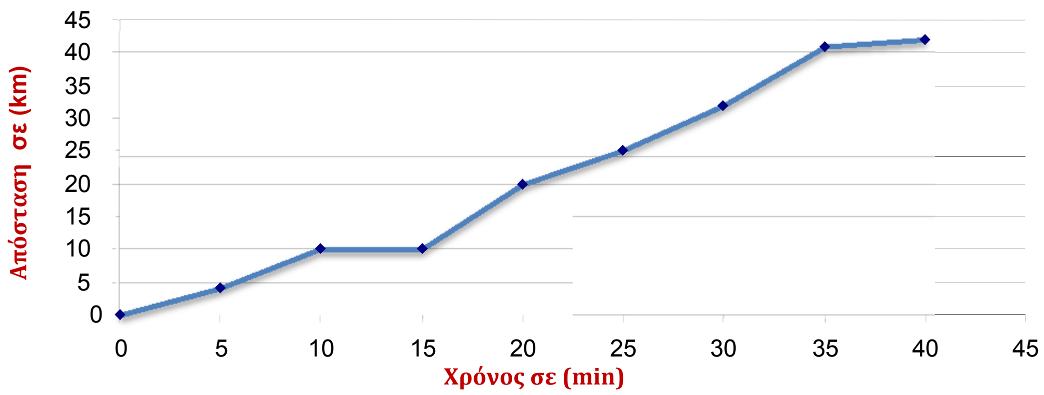
x	-6	-3	0	3
y	0	-1	2	3

(γ)

x	-3	-1	1	2
y	-7	-1	5	8

7. Η Έλενα παίρνει €4 την ημέρα από τους γονείς της για το φαγητό της και για το λεωφορείο.
   (α) Να γράψετε μια σχέση που να υπολογίζει το συνολικό ποσό (y) που θα πάρει η Έλενα ύστερα από x ημέρες.
   (β) Να γράψετε τα διατεταγμένα ζεύγη (ημέρες, συνολικό ποσό), για $0, 1, 2$ και 3 ημέρες.
   (γ) Να τοποθετήσετε τα σημεία σε σύστημα αξόνων και να τα ενώσετε με μια συνεχή γραμμή. Τι παρατηρείτε;

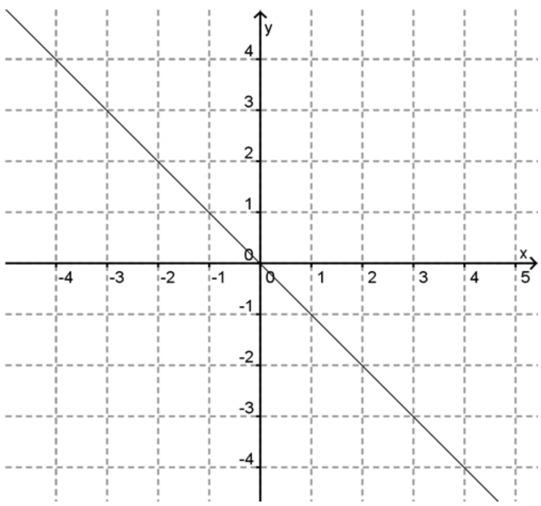
8. Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει την απόσταση σε (km) που διένυσε ένα αυτοκίνητο σε 40 λεπτά. Πότε το αυτοκίνητο παρέμεινε ακίνητο;



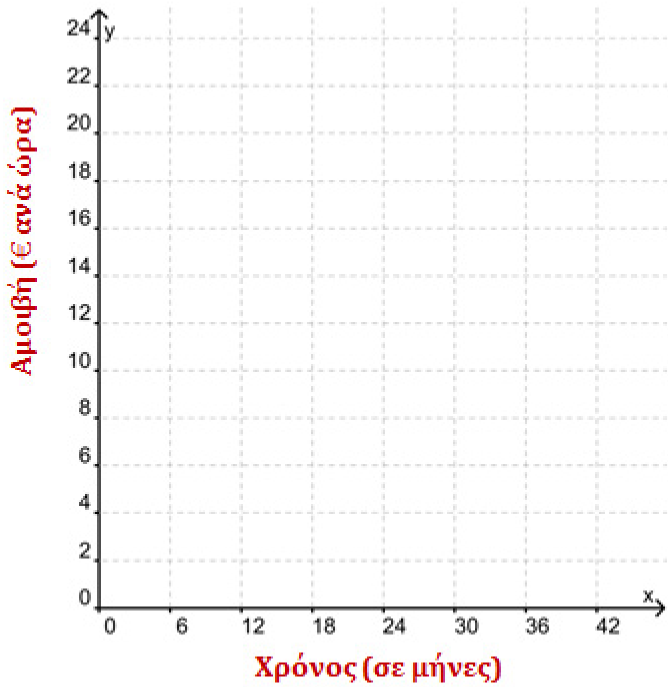
9. Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης που φαίνεται στη γραφική παράσταση;

   (α) $y = -x$ (β) $y = x$

   (γ) $y = x - 1$ (δ) $y = x - 2$

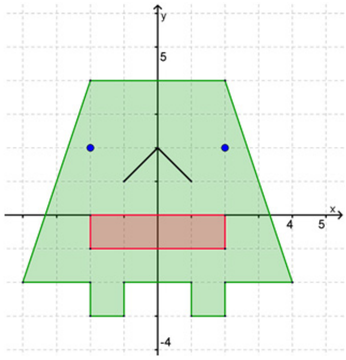


10. Ο Μενέλαος έχει προσληφθεί σε μια εταιρεία με συμβόλαιο απασχόλησης για 3 χρόνια. Το συμβόλαιο εργασίας του προνοεί αμοιβή €8 την ώρα. Μετά τους 6 μήνες προνοείται αύξηση €2 την ώρα, ενώ μετά από $1\frac{1}{2}$ χρόνο, ο μισθός του θα είναι €15 την ώρα για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της αμοιβής (€ ανά ώρα) σε σχέση με το χρόνο (μήνες).



Δραστηριότητες εμπλουτισμού

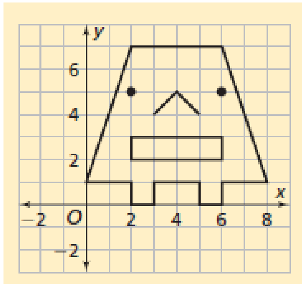
1. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων ο Αντώνης έχει σχεδιάσει μια φιγούρα.



(α) Να συμπληρώσετε τις συντεταγμένες των πιο κάτω σημείων και ακολούθως να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Κορυφές	(x, y)	$(2x, 2y)$
Μάτια		
Μύτη		
Στόμα		

(β) Να εξετάσετε πώς έχω μεταβάλει τις συντεταγμένες, ώστε η φιγούρα να εμφανιστεί όπως πιο κάτω.

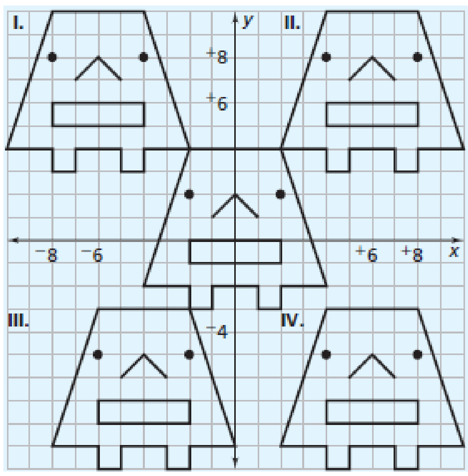


(γ) Μπορείτε να προβλέψετε πώς θα είναι το γράφημα αν τριπλασιάσω τις συντεταγμένες κάθε σημείου $(x, y) \to (3x, 3y)$;

(δ) Να εξετάσετε πως θα είναι η τελική φιγούρα:

$(x, y) \to (-x, y)$ $\qquad$ $(x, y) \to (x, -y)$ $\qquad$ $(x, y) \to (x, y - 1)$

(ε) Να εξετάσετε ποια μεταβολή πρέπει να γίνει στο σύνολο των συντεταγμένων για να προκύψουν οι πιο κάτω αλλαγές στην θέση της φιγούρας.



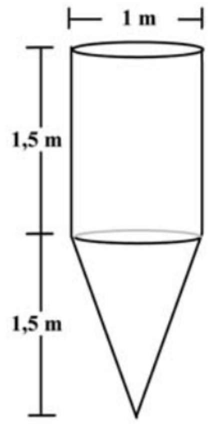
2. Ένας δύτης, για να μην προσβληθεί από τη νόσο των δυτών, κατά τη διάρκεια της ανάδυσης στην επιφάνεια της θάλασσας, θα πρέπει να ανεβεί ομαλά, έτσι ώστε να αποφύγει την απότομη αλλαγή της πίεσης. Στον πίνακα δίνεται ο χρόνος που χρειάζεται ένας δύτης ανάλογα με το βάθος που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

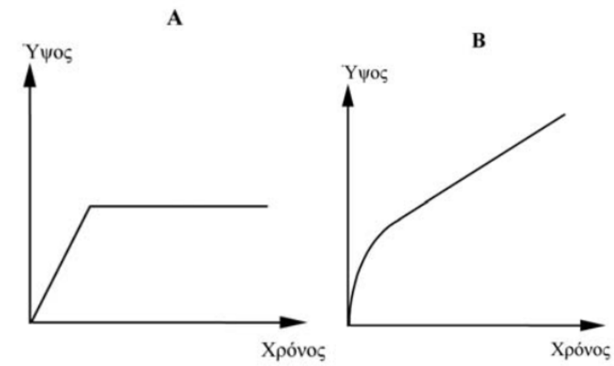
Βάθος d (m)	Χρόνος t (s)
2,3	15
4,6	30
6,9	45
9,2	60

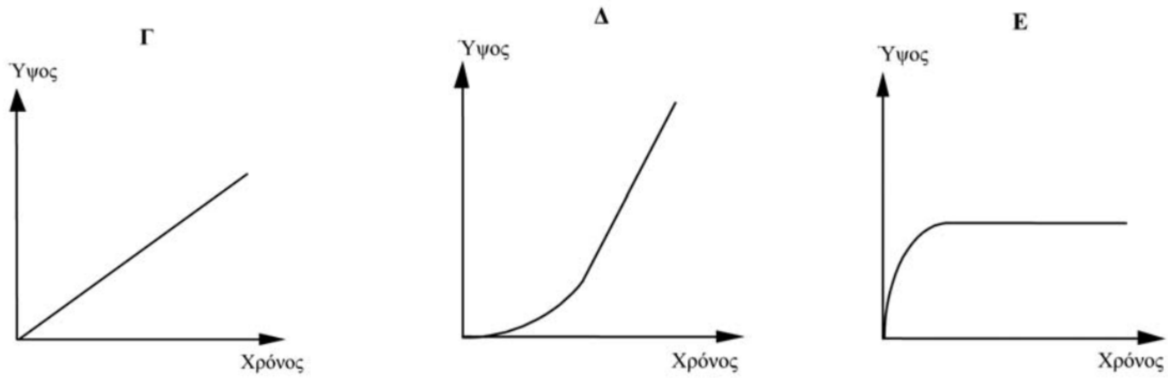
(α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης που να συνδέει το χρόνο ανάδυσης με το βάθος στο οποίο βρίσκεται ένας δύτης.

(β) Αν ένας δύτης βρίσκεται σε βάθος 13,8 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, να υπολογίσετε το χρόνο που θα χρειαστεί για να αναδυθεί.

3. Το ντεπόζιτο νερού του διπλανού σχήματος, είναι αρχικά άδειο. Μετά το γεμίζουμε νερό με ρυθμό 1 λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει πώς το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο τού χρόνου;



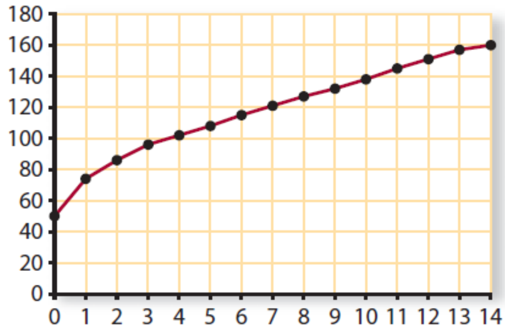




PISA 2003

4. Η πιο κάτω γραφική παράσταση παρουσιάζει το μέσο ύψος σε σχέση με την ηλικία των κοριτσιών.

Ύψος κοριτσιών

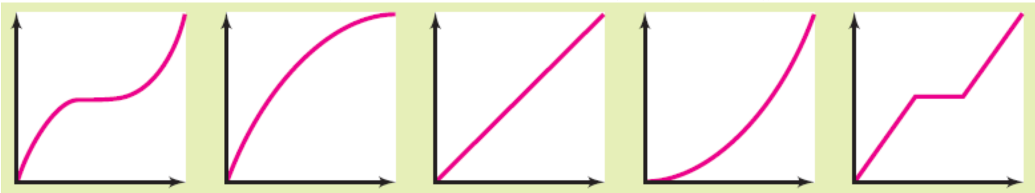


(α) Σε ποια χρονική περίοδο τα κορίτσια ψηλώνουν περισσότερο;

(β) Να εξετάσετε πώς αλλάζει το ύψος κατά τη χρονική περίοδο που τα παιδία φοιτούν στο γυμνάσιο.

(γ) Πώς πιστεύετε ότι θα είναι η γραφική παράσταση του ύψους σε σχέση με την ηλικία των κοριτσιών μέχρι την ηλικία των 25 χρονών.

5. Η Αννίτα θα πάει στο σπίτι της συμμαθήτριάς της για να διαβάσουν μαζί. Να αντιστοιχίσετε το καθένα από τα πιο κάτω σενάρια με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της απόστασης που καλύπτει σε σχέση με το χρόνο.



Α Β Γ Δ Ε

Η Αννίτα,

(α) *Περπατά με σταθερή ταχύτητα (σταθερό ρυθμό).*

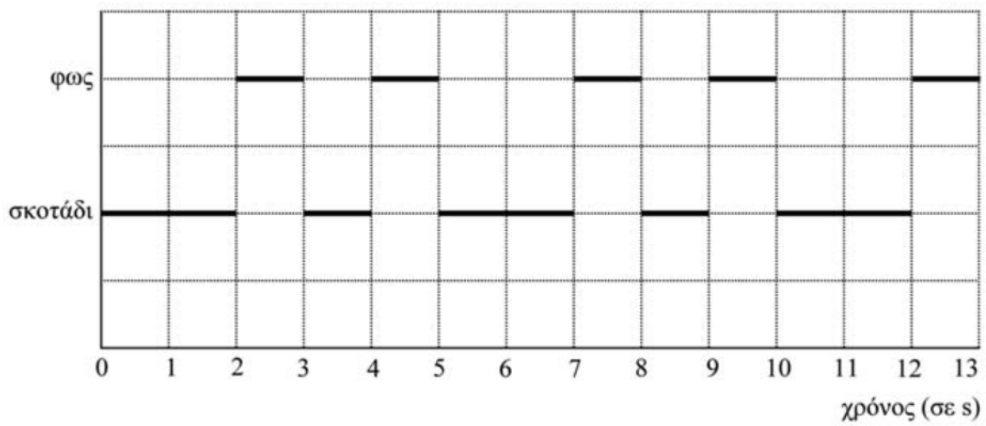
(β) *Περπατά και σταδιακά επιταχύνει (αυξάνει συνεχώς την ταχύτητα της).*

(γ) *Περπατά με σταθερή ταχύτητα, σταματά για λίγο και συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα.*

(δ) *Περπατά και σταδιακά επιβραδύνει (μειώνει συνεχώς την ταχύτητα της).*

(ε) *Περπατά και σταδιακά επιβραδύνει, σταματά για λίγο και μετά σταδιακά επιταχύνει.*

6. Ο σηματοδότης κάθε φάρου στέλλει φωτεινά σήματα με έναν καθορισμένο τρόπο. Κάθε φάρος έχει το δικό του ρυθμό που αναβοσβήνει. Στο πιο κάτω διάγραμμα βλέπετε το ρυθμό που αναβοσβήνει ένας συγκεκριμένος φάρος. Το φως ανάβει εναλλάξ ανάμεσα σε σκοτεινές περιόδους.



Αυτός είναι ένας συνηθισμένος τύπος φωτισμού. Ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα ο τύπος φωτισμού επαναλαμβάνεται. Ο χρόνος για έναν πλήρη κύκλο του τύπου φωτισμού, πριν αρχίσει να επαναλαμβάνεται, ονομάζεται *περίοδος*. Αν βρείτε την περίοδο ενός τύπου φωτισμού, είναι εύκολο να επεκτείνετε το διάγραμμα για τα επόμενα δευτερόλεπτα ή λεπτά ή ώρες.

Να επιλέξετε την ορθή απάντηση για κάθε μια από τις πιο κάτω ερωτήσεις:

(α) Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι η περίοδος (σε δευτερόλεπτα) του τύπου φωτισμού αυτού του φάρου;

Α. 2 Β. 3 Γ. 5 Δ. 12

(β) Για πόσα δευτερόλεπτα ο φάρος στέλνει φωτεινά σήματα κατά τη διάρκεια ενός λεπτού;

Α. 4 Β. 12 Γ. 20 Δ. 24

(γ) Να σχεδιάσετε σε ένα διάγραμμα για τον πιθανό τύπο φωτισμού ενός φάρου που στέλνει φωτεινά σήματα διάρκειας 30 δευτερολέπτων σε κάθε λεπτό. Η περίοδος αυτού του τύπου φωτισμού πρέπει να είναι ίση με 6 δευτερόλεπτα.

PISA 2003

7. Για λόγους υγείας, οι άνθρωποι θα πρέπει να περιορίζουν τις δυνάμεις τους, για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της άθλησης, ώστε να μην υπερβούν μια συγκεκριμένη συχνότητα καρδιακών παλμών. Για χρόνια, η σχέση ανάμεσα στην προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών ενός ατόμου και στην ηλικία του, περιγραφόταν με τον τύπο: $\textit{Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών} = 220 - \textit{ηλικία}$.

   Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι ο τύπος αυτός θα έπρεπε να τροποποιηθεί λίγο. Ο καινούριος τύπος είναι ο ακόλουθος:

   $$\textit{Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών} = 208 - 0{,}7 \cdot \textit{ηλικία}$$

   (α) Ένα άρθρο εφημερίδας αναφέρει: «*Λόγω της χρήσης του νέου τύπου αντί του παλιού, ο μέγιστος αριθμός που προτείνεται για τους καρδιακούς παλμούς ανά λεπτό, μειώνεται λίγο για τους νέους ανθρώπους και αυξάνεται λίγο για τους ηλικιωμένους*».
   Από ποια ηλικία και μετά αυξάνεται η προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών λόγω χρήσης του νέου τύπου; Να περιγράψετε τον τρόπο σκέψης σας.

   (β) Ο τύπος της *Προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας καρδιακών παλμών* χρησιμοποιείται επίσης, για να εκτιμήσει πότε η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική. Έρευνες έχουν δείξει ότι η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική, όταν οι καρδιακοί παλμοί φθάσουν στο 80% της προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας. Να γράψετε έναν τύπο που να υπολογίζει τη συχνότητα καρδιακών παλμών, ως συνάρτηση της ηλικίας, για να είναι η σωματική άσκηση πιο αποτελεσματική.

PISA 2003

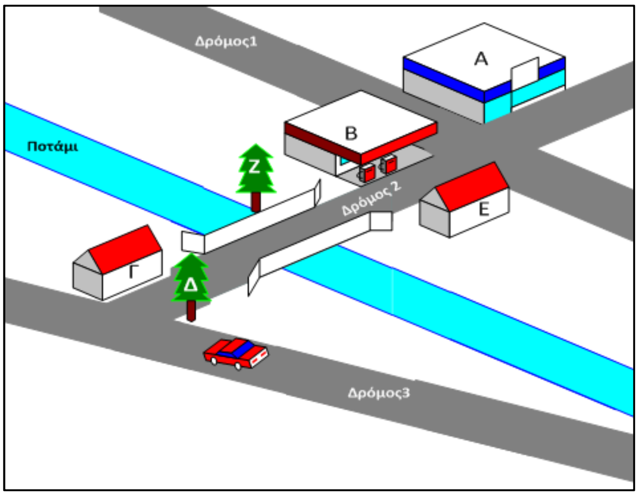
ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Α'   Γυμνασίου

Παράλληλες Ευθείες που τέμνονται από μια άλλη Ευθεία

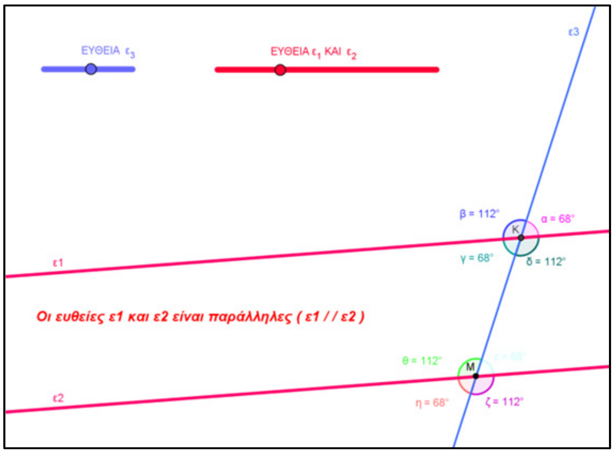
Διερεύνηση (1)

- Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται τέσσερα κτίρια και δύο δέντρα. Να περιγράψετε την θέση των A και E σε σχέση με τους δρόμους $1, 2, 3$ και το ποτάμι.



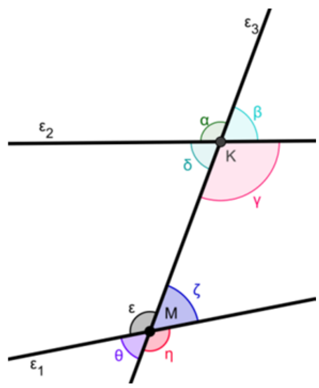
Διερεύνηση (2)

- **Τεχνολογία***: Να ανοίξετε το αρχείο «A_En8_Parallile s.ggb».*
  - ✓ Να μετακινήσετε το δρομέα «$ΕΥΘΕΙΕΣ\ \varepsilon_1\ και\ \varepsilon_2$» . Τι παρατηρείτε για τη θέση των ευθειών ε_1 και ε_2.
  - ✓ Να μετακινήσετε το δρομέα «$ΕΥΘΕΙΑ\ \varepsilon_3$» σε διαφορετικές θέσεις και να καταγράψετε το μέτρο των γωνιών σε κάθε περίπτωση.
  - ✓ Τι παρατηρείτε;



Μαθαίνω

- Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο ευθείες του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ε_3 τότε:
  - Οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών ε_1 και ε_2 ονομάζονται **«εντός»** (των ευθειών) και όλες οι άλλες **«εκτός»** .
    Για παράδειγμα οι γωνίες $\widehat{\gamma}, \widehat{\delta}, \widehat{\varepsilon}$ *και* $\widehat{\zeta}$ *ονομάζονται* ***«εντός»***, *και οι γωνίες* $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\theta}$ *και* $\widehat{\eta}$ *ονομάζονται* ***«εκτός».***

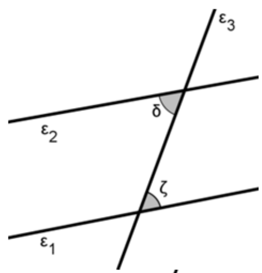


  - Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε_3 ονομάζονται **«επί τα αυτά μέρη γωνίες»** ή **«επί τα αυτά».**
    Για παράδειγμα οι γωνίες $\widehat{\theta}, \widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}$ *και* $\widehat{\alpha}$ *ονομάζονται* ***«επί τα αυτά»*** *και οι γωνίες* $\widehat{\eta}, \widehat{\zeta}, \widehat{\gamma}$ *και* $\widehat{\beta}$ *ονομάζονται* ***«επί τα αυτά».***

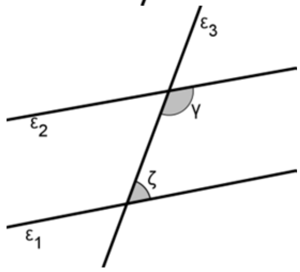
  - Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα και η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ευθείας ε_3, ονομάζονται **«εναλλάξ».**
    Για παράδειγμα οι γωνίες $\widehat{\delta}$ *και* $\widehat{\zeta}$ *ονομάζονται* ***«εναλλάξ»*** *όπως και οι γωνίες* $\widehat{\gamma}$ *και* $\widehat{\varepsilon}$.

- Αν ε_1 και ε_2 είναι δύο **παράλληλες** ευθείες οι οποίες τέμνονται από μία τρίτη ευθεία ε_3, τότε:
  α) οι **«εντός εναλλάξ»** γωνίες είναι **ίσες,**
  β) οι «**εντός και επί τα αυτά**» γωνίες είναι **παραπληρωματικές,**
  γ) οι «**εντός- εκτός και επί τα αυτά**» γωνίες είναι **ίσες.**

- Αντίστροφα
  - Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 σχηματίζουν τις **«εντός εναλλάξ»** γωνίες <u>ίσες</u>, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι <u>παράλληλες</u>.

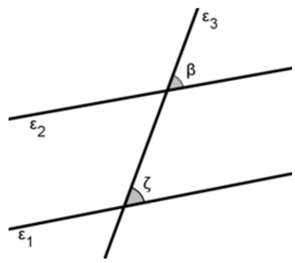


    Για παράδειγμα στο σχήμα, αν $\hat{\delta} = \hat{\zeta}$ *τότε* $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



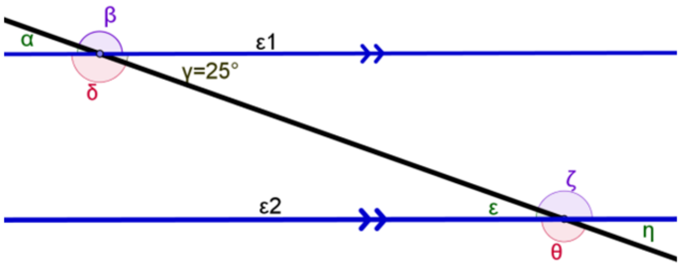
  - Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 σχηματίζουν τις «**εντός και επί τα αυτά**» <u>παραπληρωματικές</u>, τότε οι δύο ευθείεςε_1 και ε_2 είναι <u>παράλληλες</u>.
    Για παράδειγμα στο σχήμα, αν $\hat{\gamma} + \hat{\zeta} = 180°$ *τότε* $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

  - Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3 σχηματίζουν τις «**εντός- εκτός και επί τα αυτά**» γωνιών είναι <u>ίσες</u>**,** τότε οι ευθείεςε_1 και ε_2 είναι <u>παράλληλες</u>.
    Για παράδειγμα στο σχήμα, αν $\hat{\beta} = \hat{\zeta}$ *τότε* $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Αν $\hat{\gamma} = 25°$, να υπολογίσετε τις γωνίες: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, \hat{\eta}$ και $\hat{\theta}$.

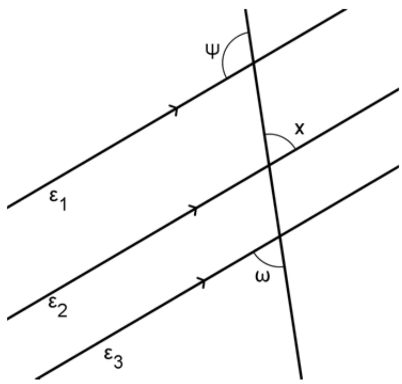


Λύση:

$\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 25°$ (κατακορυφήν γωνίες)
$\hat{\beta} = 180° - 25° = 155°$ (παραπληρωματικές γωνίες)
$\hat{\delta} = \hat{\beta} = 155°$ (κατακορυφήν γωνίες)
$\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} = 25°$ (εντός εναλλάξ γωνίες)
$\hat{\zeta} = 180° - \hat{\gamma} = 180° - 25° = 155°$ (εντός επί τα αυτά)
$\hat{\theta} = \hat{\delta} = 155°$ (εντός − εκτός και επί τα αυτά)
$\hat{\eta} = \hat{\varepsilon} = 25°$ (κατακορυφήν γωνίες).

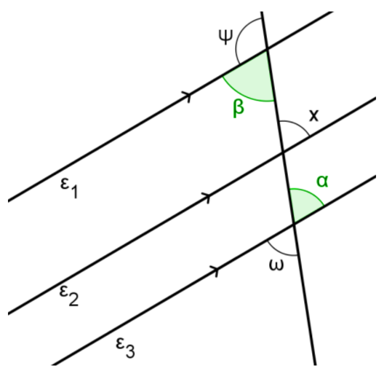
Μπορείτε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικό τρόπο;

2. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Αν $\hat{\omega} = 68°$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\psi}$ και $\hat{x}$.

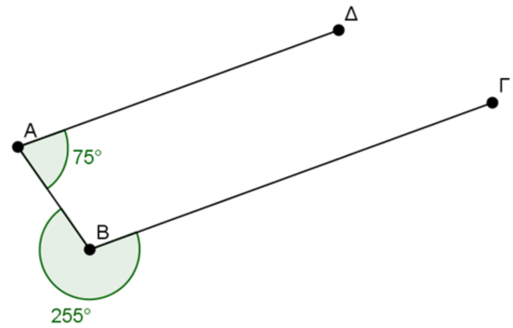


Λύση:

Σημειώνω τις βοηθητικές γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.
$\hat{\alpha} = \hat{\omega} = 68°$ (κατακορυφήν γωνίες)
$\hat{x} = \hat{\alpha} = 68°$ (εντός − εκτός και επί τα αυτά)
$\hat{\beta} = \hat{x} = 68°$ (εντός εναλλάξ γωνίες)
$\hat{\psi} = 180° - \hat{\beta} = 180° - 68° = 112°$
(παραπληρωματικές γωνίες)



3. Να εξετάσετε αν η $ΑΔ$ είναι παράλληλη της $ΒΓ$, με βάση το διπλανό σχήμα.

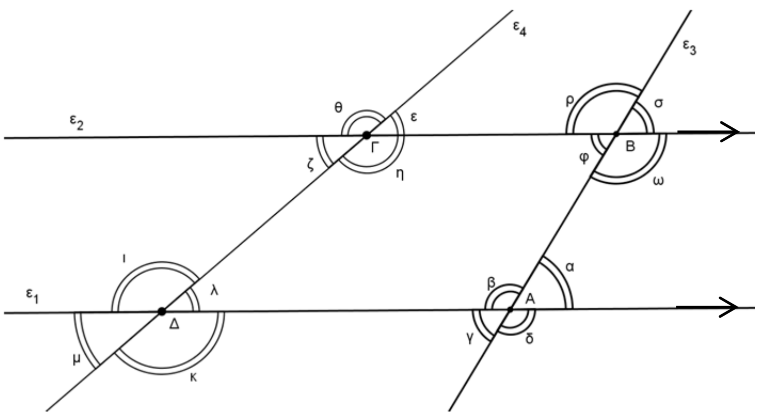


Λύση:
$Γ\hat{Β}Α = 360° - 255° = 105°$
$Β\hat{Α}Δ + Γ\hat{Β}Α = 75° + 105° = 180°$
$\Rightarrow Β\hat{Α}Δ$ και $Γ\hat{Β}Α$ είναι παραπληρωματικές.
Οι γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Γ\hat{Β}Α$ είναι εντός και επί τα αυτά και παραπληρωματικές.
Από αυτό συνεπάγεται ότι $ΑΔ \parallel ΒΓ$.

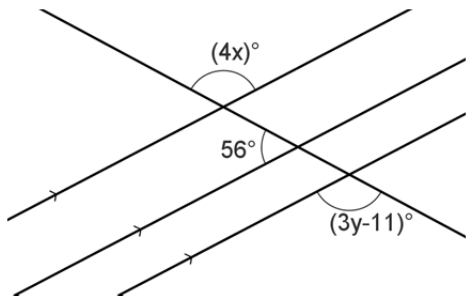
Δραστηριότητες

1. Με βάση το πιο κάτω σχήμα να γράψετε δύο ζεύγη γωνιών που είναι:
   α) Εντός εναλλάξ
   β) Εντός και επί τα αυτά
   γ) Εντός εκτός και επί τα αυτά

   Ως προς τις ευθείες
   i. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3
   ii. $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ και ε_2

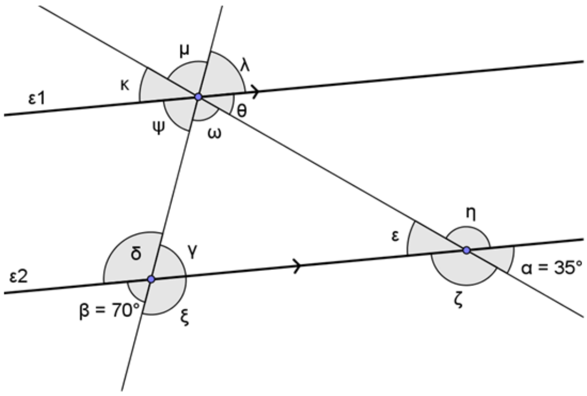


2. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y, στο σχήμα.

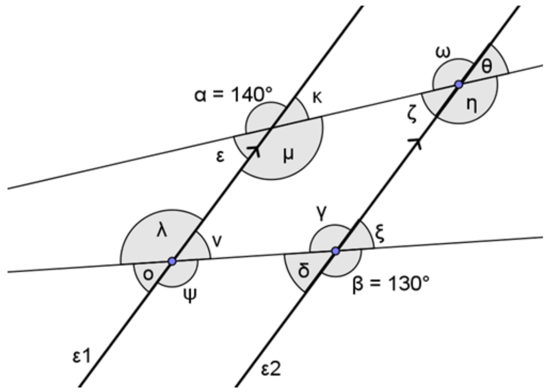


3. Να υπολογίσετε τις γωνίες που ονομάζονται με μικρά γράμματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

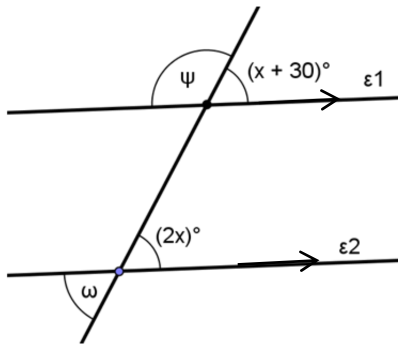
α)



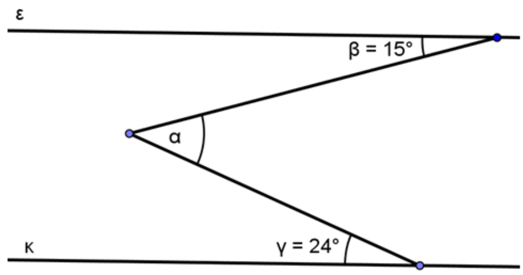
β)



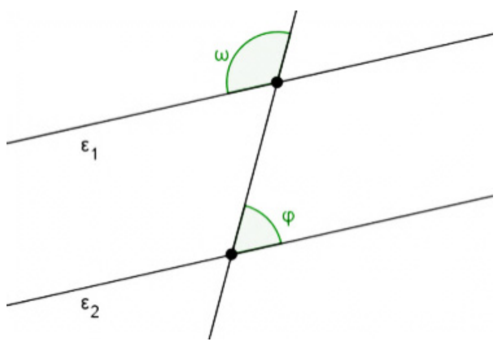
4. Στο διπλανό σχήμα η $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε το x και το μέτρο των γωνιών $\widehat{\omega}$ $\kappa\alpha\iota$ $\widehat{\psi}$.



5. Στο σχήμα $\varepsilon \parallel \kappa$. Αν $\hat{\beta} = 15°$ και $\hat{\gamma} = 24°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\alpha}$.



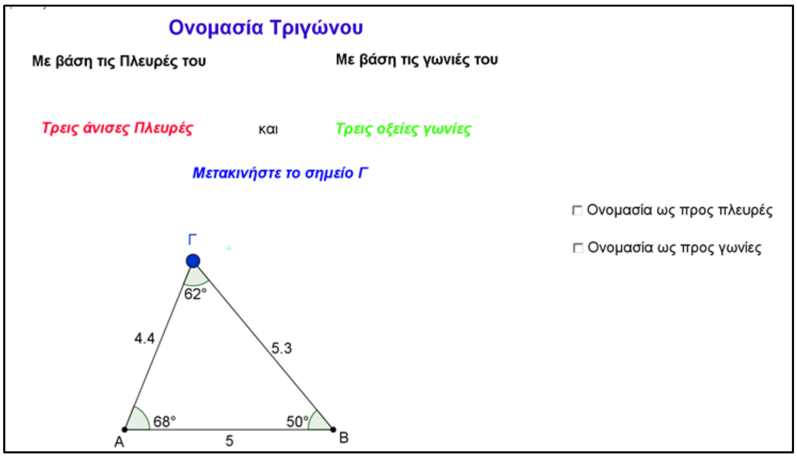
6. Στο διπλανό σχήμα η $\widehat{\omega} = 120° - \widehat{\theta}$ και η $\widehat{\varphi} = 60° + \widehat{\theta}$. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



Κύρια Στοιχεία Τριγώνου – Είδη Τριγώνων – Άθροισμα Γωνιών Τριγώνου

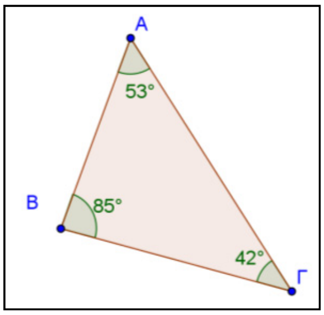
Διερεύνηση (1)

- **Τεχνολογία:** *Να ανοίξετε το αρχείο "A_En8_Eidi_Trigonon.ggb"*.
  - ✓ Να μετακινήσετε την κορυφή Γ και να καταγράψετε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς μεταξύ των σχέσεων των πλευρών και των γωνιών του τριγώνου που μπορείτε να παρατηρήσετε.

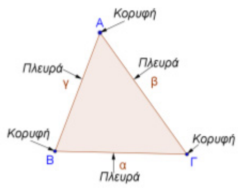
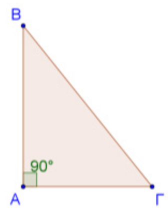
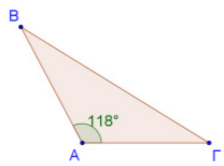
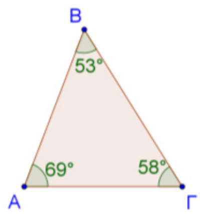
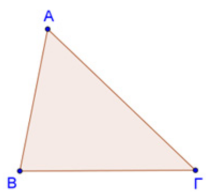


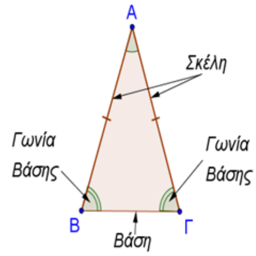
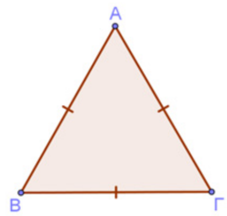
Διερεύνηση (2)

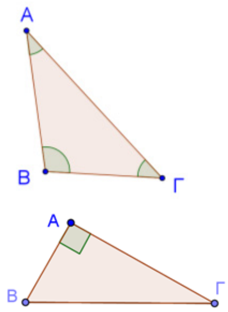
- **Τεχνολογία:** *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus ή το αρχείο "A_En8_Athrisma_GonionTrig.ggb", για τις πιο κάτω δραστηριότητες:*
  - ✓ *<u>Βήμα 1:</u>* Να κατασκευάστε τρίγωνο $\Delta\ AB\Gamma$ και να βρείτε το μέτρο των τριών γωνιών του.
  - ✓ *<u>Βήμα 2:</u>* Να μετακινήσετε μια από τις κορυφές και να βρείτε το άθροισμα των τριών γωνιών του τριγώνου.
  - ✓ *<u>Βήμα 3:</u>* Να επαναλάβετε τη διαδικασία (*Βήμα 2*) αρκετές φορές. Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου κάθε φορά;



Μαθαίνω

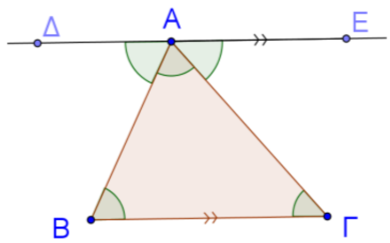
Κύρια στοιχεία τριγώνου	**Τρίγωνο** είναι το πολύγωνο που έχει τρεις πλευρές . Κάθε τρίγωνο έχει: ➢ τρεις **κορυφές**, π.χ. A, B, Γ ➢ τρεις **πλευρές,** π.χ. $AB, B\Gamma, \Gamma A$ ή γ,α,β αντίστοιχα ➢ τρεις **γωνιές,** π.χ. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ Το τρίγωνο με κορυφές A, B και Γ συμβολίζεται ως: $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ή $\triangle\,\mathrm{AB\Gamma}$	
Είδη τριγώνων με βάση τις γωνίες τους		
Ορθογώνιο	**Ορθογώνιο** είναι το τρίγωνο που έχει μια ορθή γωνία. π.χ. $\hat{A} = 90°$	
Αμβλυγώνιο	**Αμβλυγώνιο** είναι το τρίγωνο που έχει μια γωνία μεγαλύτερη της ορθής γωνίας. Δηλαδή το τρίγωνο που έχει μία αμβλεία γωνία. π.χ. $\hat{A} > 90°$	
Οξυγώνιο	**Οξυγώνιο** είναι το τρίγωνο που όλες οι γωνίες του είναι μικρότερης της ορθής γωνίας. Δηλαδή το τρίγωνο που έχει τρεις οξείες γωνίες. π.χ. $\hat{A} < 90°$, $\hat{B} < 90°$ και $\hat{\Gamma} < 90°$	
Είδη τριγώνων με βάση τις πλευρές τους		
Σκαληνό	**Σκαληνό** είναι το τρίγωνο που έχει τις πλευρές του άνισες. π.χ. $\mathrm{AB} \neq \mathrm{B\Gamma} \neq \mathrm{A\Gamma}$	

Ισοσκελές	**Ισοσκελές** είναι το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. π.χ. $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Σε ισοσκελές τρίγωνο οι δύο ίσες πλευρές του ονομάζονται **σκέλη** του ισοσκελούς τριγώνου και η τρίτη πλευρά ονομάζεται **βάση** του ισοσκελούς τριγώνου. Οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση ονομάζονται **παρά την βάση γωνίες.** π.χ. $\hat{B}, \hat{\Gamma}$: παρά την βάση γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. ▪ *Οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Αντίστροφα αν σε τρίγωνο δύο γωνίες είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.* π.χ. Σε $\triangle\, AB\Gamma$ αν ισχύει $AB = A\Gamma$, τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα.	
Ισόπλευρο	**Ισόπλευρο** είναι το τρίγωνο που έχει τρεις ίσες πλευρές. π.χ. $AB = A\Gamma = B\Gamma$. ▪ *Σε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Αντίστροφα αν σε τρίγωνο και οι τρεις γωνίες είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.* π.χ. Σε $\triangle\, AB\Gamma$ αν ισχύει $AB = A\Gamma = B\Gamma$, τότε $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ και αντίστροφα.	

Άθροισμα γωνιών τριγώνου	Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με $180°$. π.χ. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ Σε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών είναι ίσο με $90°$. π.χ. Δηλαδή, σε $\triangle\, AB\Gamma$ όπου $\hat{A} = 90°$, τότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$	

Απόδειξη

Σε πολλές αποδείξεις της γεωμετρίας θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε βοηθητικές ευθείες.
Για αυτή την απόδειξη θα φέρουμε βοηθητική ευθεία $\Delta E \parallel B\Gamma$ που περνά από την κορυφή A.



$\Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}\Gamma = 180^0$ *(1)* *(γωνίες σε ευθεία γραμμή).*
$\hat{B} = \Delta\hat{A}B$ *(εντός εναλλάξ γωνίες).*
$\hat{\Gamma} = E\hat{A}\Gamma$ *(εντός εναλλάξ γωνίες).*
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:
$\hat{B} + B\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + E\hat{A}\Gamma$ *(2).* *Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι* $\hat{B} + B\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o$, *δηλαδή το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι* $180°$.

Παράδειγμα

- Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με γωνίες $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = (x + 30)°$ $και$ $\hat{Γ} = (2x)°$.
  α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του.
  β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

Λύση:

α) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180°$

$\Rightarrow 30° + x + 30° + 2x = 180° \Rightarrow 3x + 60° = 180°$

$\Rightarrow 3x = 180° - 60° \Rightarrow 3x = 120° \Rightarrow x = 120° : 3$

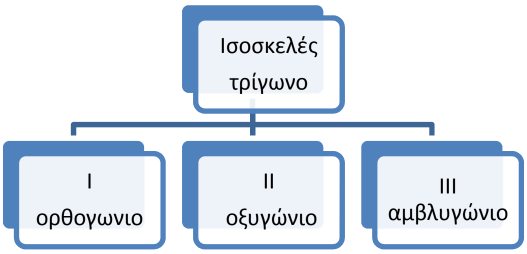
$\Rightarrow x = 40°$

Άρα $\widehat{\mathrm{B}} = x + 30° = 40^o + 30^o = 70°$ $και$ $\widehat{\Gamma} = 2x = 2 \cdot 40° = 80°$

β) Το τρίγωνο έχει τρείς οξείες γωνίες επομένως το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

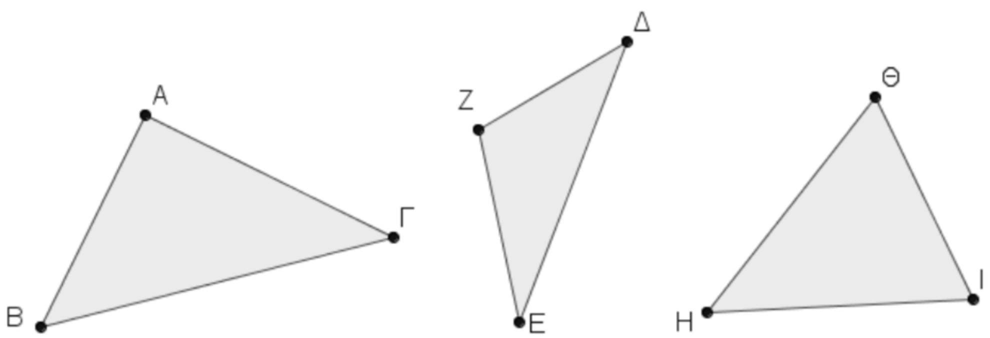
Δραστηριότητες

1. Στο πιο κάτω διάγραμμα ταξινομούνται τα ισοσκελή τρίγωνα ως προς τις γωνίες τους.

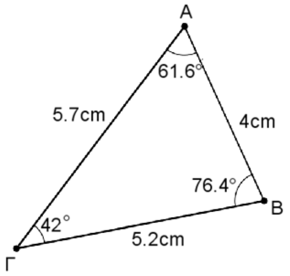
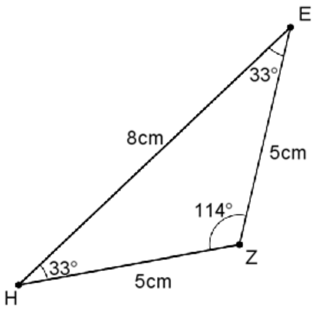
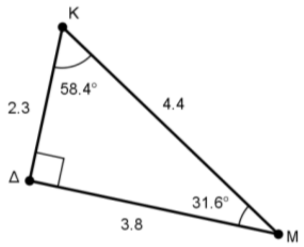


α) Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο για καθεμιά από τις περιπτώσεις I, II και III.
β) Να ταξινομήσετε τα ορθογώνια τρίγωνα ως προς τις πλευρές σε ένα διάγραμμα όπως το πιο πάνω.

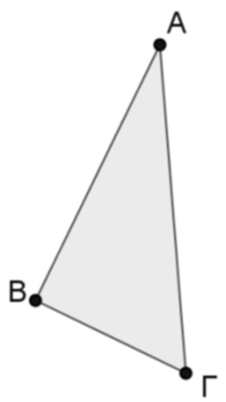
2. Με τη χρήση του γνώμονα ή του μοιρογνωμονίου, να χαρακτηρίσετε το είδος κάθε τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

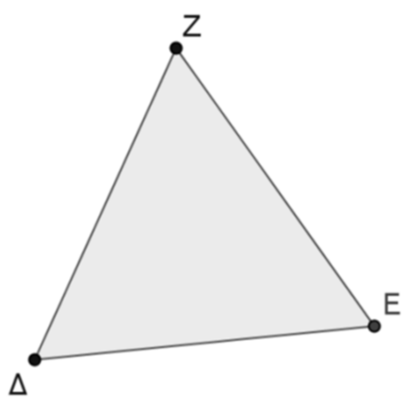


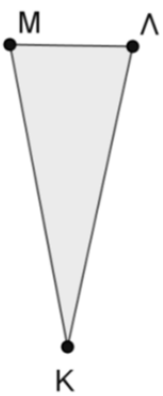
3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, βάζοντας ✓ στο ορθό.

	ΤΡΙΓΩΝΟ	Ονομασία ως προς γωνίες	Ονομασία ως προς πλευρές
α)		☐ Οξυγώνιο ☐ Αμβλυγώνιο ☐ Ορθογώνιο	☐ Σκαληνό ☐ Ισοσκελές ☐ Ισόπλευρο
β)		☐ Οξυγώνιο ☐ Αμβλυγώνιο ☐ Ορθογώνιο	☐ Σκαληνό ☐ Ισοσκελές ☐ Ισόπλευρο
γ)		☐ Οξυγώνιο ☐ Αμβλυγώνιο ☐ Ορθογώνιο	☐ Σκαληνό ☐ Ισοσκελές ☐ Ισόπλευρο

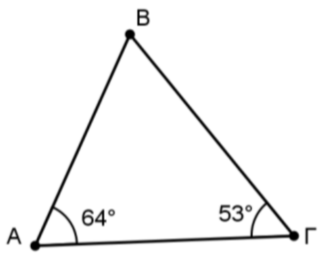
4. Με τη χρήση του διαβήτη, να χαρακτηρίσετε το είδος κάθε τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

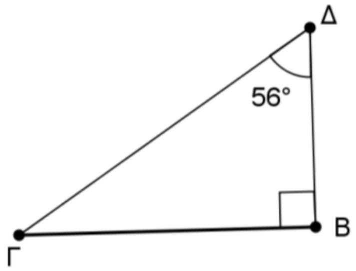


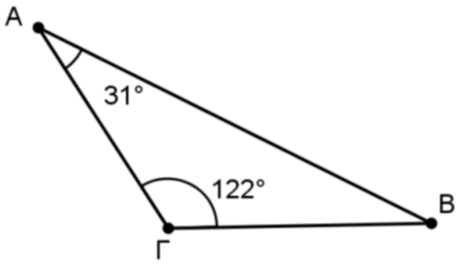




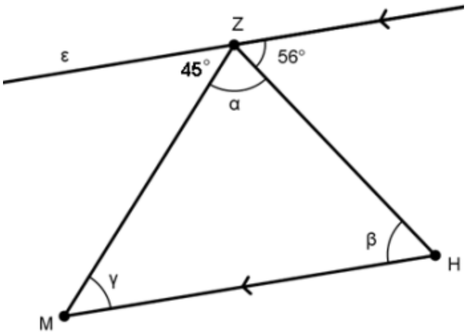
5. Να υπολογίσετε τις γωνίες κάθε τριγώνου:

(α) 

(β) 

(γ) 

6. Στο σχήμα ε ∥ ΜΗ. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



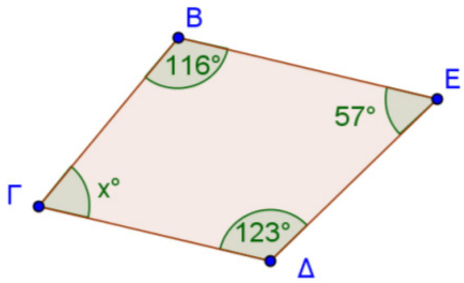
7. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου έχει μέτρο 60°.

8. Να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος η πρόταση: *"Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές άρα και κάθε ισοσκελές τρίγωνο είναι και ισόπλευρο".*

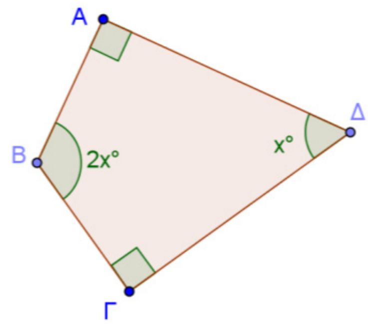
9. Να εξετάσετε την ορθότητα καθεμιάς από τις πιο κάτω προτάσεις:
   α) Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει δύο ορθές γωνίες.
   β) Σε ισοσκελές τρίγωνο, αν η μια γωνία είναι οξεία, τότε το τρίγωνο είναι σίγουρα οξυγώνιο.

10. Σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε την τιμή του x.

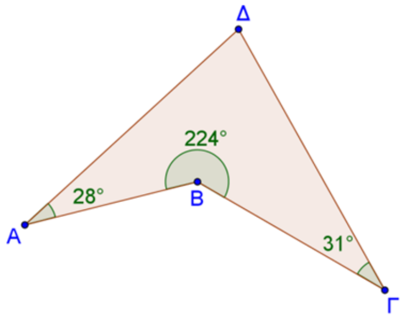
α)



β)



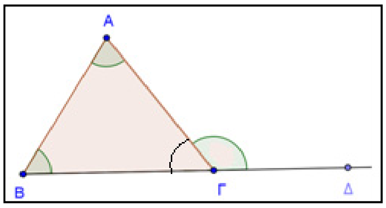
11. Στο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ δίνεται $\hat{A} = 28°, \hat{B} = 224°\ και\ \hat{Γ} = 31°$. Να βρείτε τη γωνία $\hat{Δ}$.



Εξωτερική γωνία τριγώνου

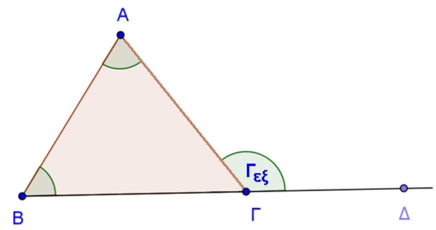
Διερεύνηση

Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus ή το αρχείο «A_En8_Exoteriki_GoniaTrig.ggb»*



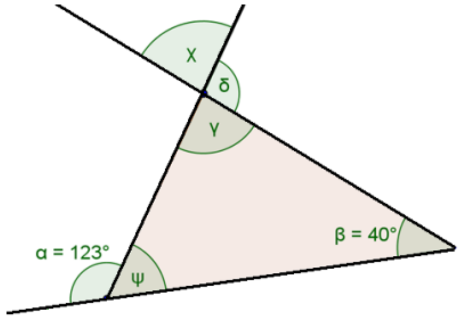
- ✓ Να κατασκευάσετε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$.
- ✓ Να φέρετε ημιευθεία B, σημείο Δ εκτός τριγώνου, που έχει ως αρχή το B και περνά από την κορυφή Γ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- ✓ Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και της εξωτερικής γωνιάς $A\hat{\Gamma}\Delta$.
- ✓ Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει την εξωτερική $A\hat{\Gamma}\Delta$ με τις γωνίες του τριγώνου.
- ✓ Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου, για να διερευνήσετε κατά πόσο η σχέση ισχύει και σε άλλα τρίγωνα.

Μαθαίνω

Εξωτερική γωνία	Κάθε γωνιά του τριγώνου σχηματίζεται από δύο πλευρές του. Η γωνία που σχηματίζεται από την μια πλευρά του και την προέκταση της άλλης, ονομάζεται **εξωτερική γωνία** του τριγώνου. π.χ. $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ▪ *Σε τυχαίο τρίγωνο η κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.* *π.χ.* $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}$	

Παράδειγμα

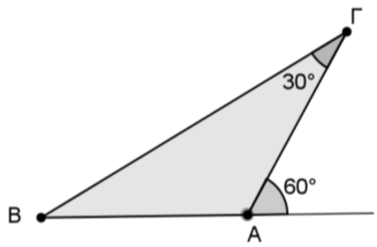
- Να υπολογίσετε τις γωνίες του διπλανού σχήματος που αναγράφονται με μικρά γράμματα.



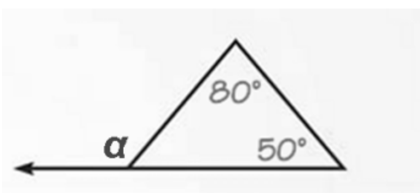
Λύση:
$\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ $(\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha) \Rightarrow$
$123° = 40° + \hat{\gamma} \Rightarrow \hat{\gamma} = 123° - 40° = 83°$
$\hat{x} = \hat{\gamma} = 83°$ $(\kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma)$
$\hat{\psi} + \hat{\alpha} = 180°$ $(\varepsilon\upsilon\theta\varepsilon\acute{\iota}\alpha\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha) \Rightarrow$
$\hat{\psi} = 57^o$
$\hat{\delta} = \hat{\beta} + \hat{\psi}$ $(\varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha)$
$\Rightarrow \hat{\delta} = 40° + 57° = 97°$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

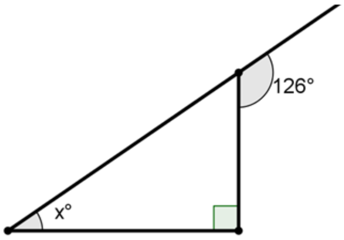


2. Με δεδομένο το σχήμα, ένας μαθητής έγραψε την σχέση $\hat{\alpha} + 80° + 50° = 180°$. Να εξετάσετε κατά πόσο ο συλλογισμός είναι ορθός και σε περίπτωση λάθους και να δώσετε την ορθή απάντηση.

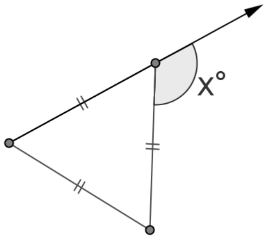


3. Να υπολογίσετε τις τιμές των x , y με βάση τα πιο κάτω σχήματα.

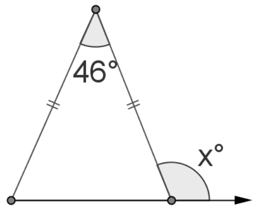
α)



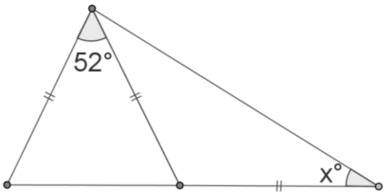
β)



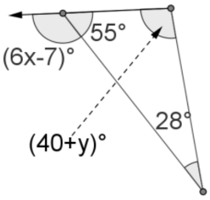
γ)



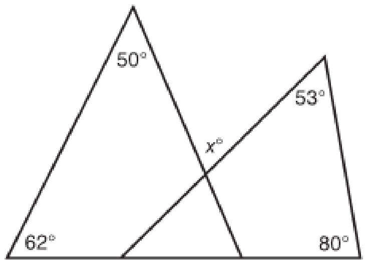
δ)



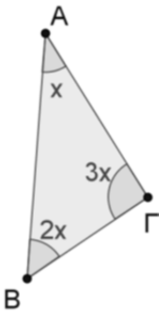
ε)



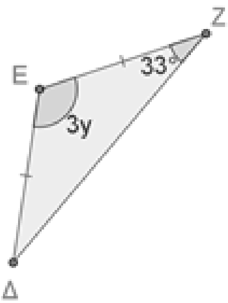
στ)



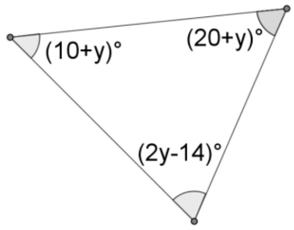
ζ)



η)



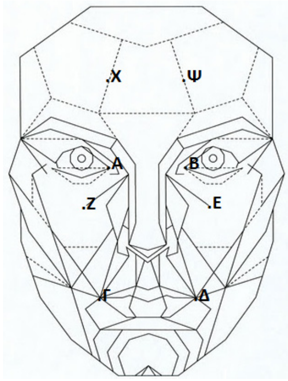
θ)



Συμμετρία

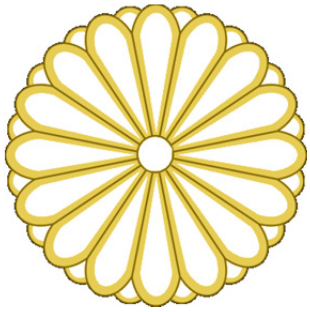
Εξερεύνηση (1)

- Δίπλα φαίνεται ένα σκίτσο ενός γλύπτη που θα τον βοηθήσει να κατασκευάσει μια προτομή. Τι παρατηρείτε για τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, X$ και Ψ;



Εξερεύνηση (2)

- Να παρατηρήσετε το διπλανό σχήμα. Να φέρετε ευθεία (ε) που να χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε αν διπλώσουμε το χαρτί στο οποίο είναι σχεδιασμένο κατά μήκος της ευθείας ε, τα δυο μέρη αυτά θα ταυτιστούν. Πόσες τέτοιες ευθείες μπορείτε να βρείτε;

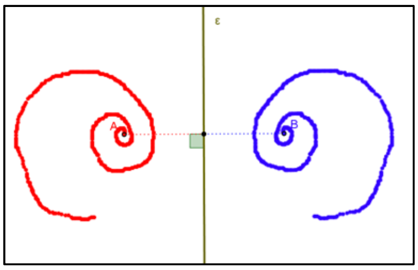


Εξερεύνηση (3)

- **Χρήση Τεχνολογίας:**

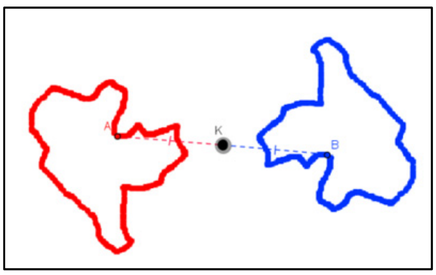
I. *Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En8_Symetria1. ggb»*

Να μετακινήστε το σημείο Α και να σχηματίσετε ένα τυχαίο σχήμα.
Τι σχέση έχει το αρχικό σχήμα (χρώματος κόκκινου) με αυτό (χρώματος μπλε) που σχηματίζεται συγχρόνως;

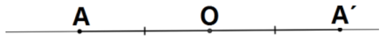
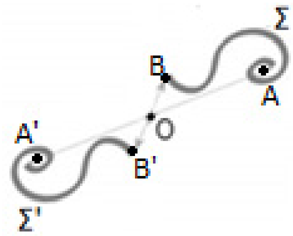
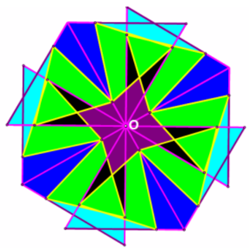


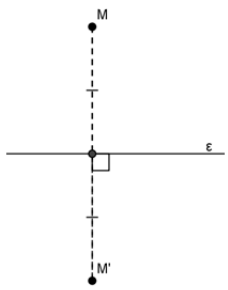
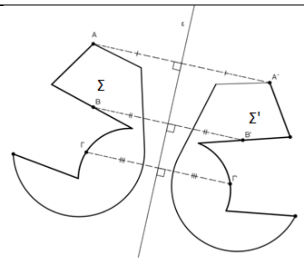
II. *Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En8_Symetria2. ggb»*

Να επαναλάβετε τις προηγούμενες οδηγίες.



Μαθαίνω

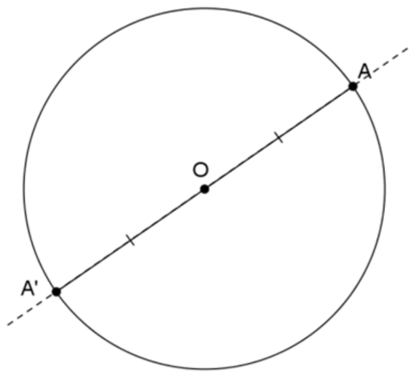
Συμμετρικό σημείου ως προς σημείο	**Συμμετρικό του σημείου** $\boldsymbol{A}$, ως προς σημείο Ο **(κέντρο συμμετρίας),** ονομάζεται το σημείο A' που ανήκει στην ευθεία AO με $AO = OA'$. ▪ *Όταν τα σημεία A και A' είναι συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας O, τότε το κέντρο συμμετρίας είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AA'.*	
Συμμετρικό σχήματος	**Συμμετρικό του σχήματος** $\boldsymbol{\Sigma}$ ως προς κέντρο συμμετρίας O ονομάζεται το σχήμα Σ' που δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του Σ, ως προς το O.	
Κέντρο συμμετρίας	**Κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος** είναι το σημείο, ως προς το οποίο <u>όλα</u> τα σημεία του σχήματος έχουν συμμετρικό σημείο πάνω στο ίδιο σχήμα.	

Συμμετρικό σημείου ως προς άξονα	**Συμμετρικό του σημείου** $\boldsymbol{M}$ ως προς μια ευθεία ε (**άξονας συμμετρίας**) ονομάζεται το σημείο M', όταν τα M και M' ισαπέχουν από την ευθεία ε και $MM' \perp \varepsilon$. ▪ *Όταν τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας ε, τότε ο άξονας συμμετρίας είναι η <u>μεσοκάθετη</u> του ευθύγραμμου τμήματος MM'.*	
Συμμετρικά σχήματα	**Συμμετρικό του σχήματος** $\boldsymbol{\Sigma}$ ως προς άξονα συμμετρίας ε ονομάζεται το σχήμα Σ' που δημιουργείται από το σύνολο των συμμετρικών σημείων του Σ, ως προς τον ε. ➢ *Τα σχήματα Σ και Σ' λέμε ότι παρουσιάζουν* ***αξονική συμμετρία****.*	

Παραδείγματα

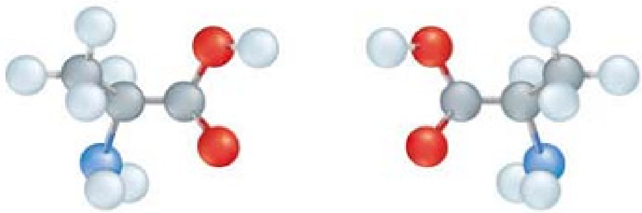
1. Να δείξετε ότι κάθε σημείο του κύκλου είναι συμμετρικό ως προς ένα άλλο σημείο του, με κέντρο συμμετρίας το κέντρο του κύκλου.

Λύση:
Αρκεί να αποδείξουμε τον πιο πάνω ισχυρισμό για ένα τυχαίο σημείο A του κύκλου. Τότε θα μπορούμε να πούμε ότι ισχύει για κάθε σημείο του κύκλου.
Πράγματι, αν κατασκευάσουμε ένα κύκλο (O, ρ) και πάρουμε ένα τυχαίο σημείο του A, τότε η ευθεία που περνά από το A και το O, θα τέμνει τον κύκλο σε ένα άλλο σημείο A'.
Το A' είναι συμμετρικό του A ως προς το κέντρο συμμετρίας το O, αφού AA' διάμετρος του κύκλου και $\mathrm{OA} = \mathrm{OA}' = \rho$.

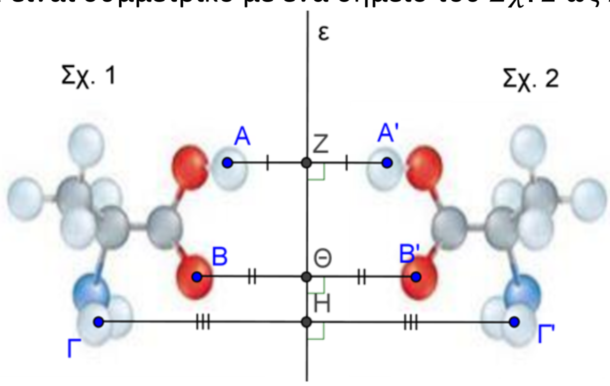


2. Ένα από τα αμινοξέα ή σολανίνη (amino acid alanine) έχει δύο μορφές $\Sigma\chi. 1$ (laevo) και $\Sigma\chi. 2$ (dextro). Να εξετάσετε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζουν οι δύο μοριακές τους δομές όπως φαίνονται στο επίπεδο:

Σχ.1 Σχ.2



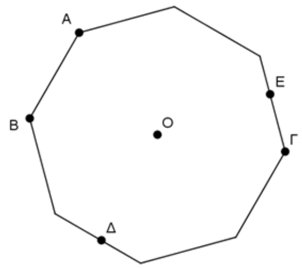
Λύση:
Οι δύο μοριακές δομές παρουσιάζουν αξονική συμμετρία ως προς την ευθεία ε, αφού <u>κάθε</u> σημείο του $\Sigma\chi. 1$ είναι συμμετρικό με ένα σημείο του $\Sigma\chi. 2$ ως προς την ευθεία ε.



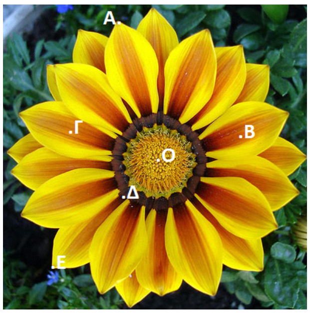
Δραστηριότητες

1. Για κάθε ένα από τα πιο κάτω σχήματα να βρείτε ποίο είναι το κέντρο συμμετρίας του.

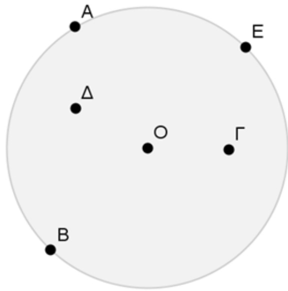
α)



β)

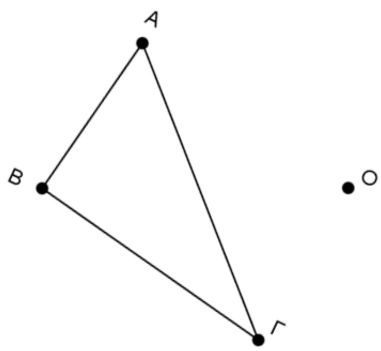


γ)



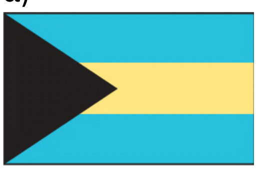
2. Πάνω στον άξονα των ρητών αριθμών να τοποθετήσετε:
   α) δυο αριθμούς α και β που να είναι συμμετρικοί ως προς τη θέση τους με κέντρο συμμετρίας τη θέση του -3.
   β) έναν αριθμό γ που να είναι συμμετρικός με τον α με κέντρο συμμετρίας το μηδέν.
   γ) τη θέση του κέντρου συμμετρίας των αριθμών β και γ.

3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου $ΑΒΓ$ με κέντρο συμμετρίας το σημείο O που βρίσκεται εκτός του τρίγωνου.



4. Πιο κάτω δίνονται διάφορες σημαίες κρατών. Να βρείτε, όπου υπάρχουν, άξονες συμμετρίας για την κάθε μια.

α)

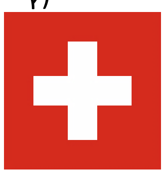


Μπαχάμες

β)

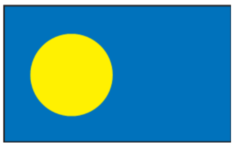
Ελλάδα

γ)



Ελβετία

δ)

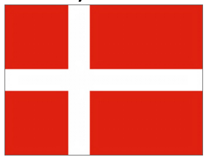


Παλαού

ε)

Κύπρος

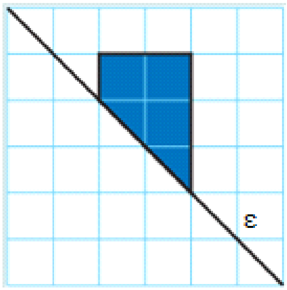
στ)



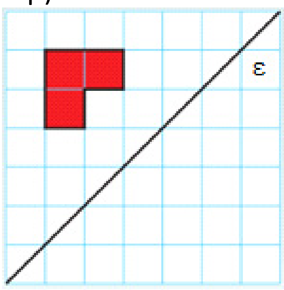
Δανία

5. Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά σχήματα των σκιασμένων σχημάτων για κάθε περίπτωση ως προς τον άξονα συμμετρίας (ε):

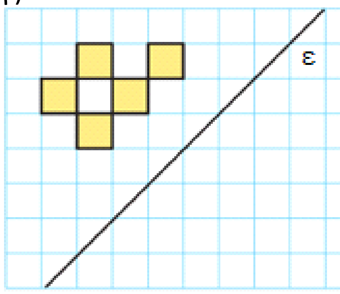
α)



β)



γ)



Δευτερεύοντα Στοιχεία Τριγώνου
Χαρακτηριστικά Σημεία Τριγώνου

Διερεύνηση (1)

Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για τις πιο κάτω δραστηριότητες:*

(α) *Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$.*

(β) *Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα με αρχή την κορυφή Α του τριγώνου και τέλος το μέσο της απέναντι πλευράς του.*

(γ) *Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα με αρχή την κορυφή Β του τριγώνου και τέλος το μέσο της απέναντι πλευράς του.*

(δ) *Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα με αρχή την κορυφή Γ του τριγώνου και τέλος το μέσο της απέναντι πλευράς του.*

(ε) *Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε;*

☑ *Η υλοποίηση της πιο πάνω διερεύνησης υπάρχει στο αρχείο “A_En8_Diamesos_trigonou_Kentro_Varous”.*

Διερεύνηση (2)

Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II για τις πιο κάτω δραστηριότητες:*

(α) *Να κατασκευάσετε τρεις ευθείες οι οποίες να τέμνονται ανά δύο.*

(β) *Να κατασκευάσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ που ορίζεται από τα σημεία τομής των ευθειών και να βρείτε το μέτρο των γωνιών του.*

(γ) *Να κατασκευάσετε ευθεία που να διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου και να είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.*

(δ) *Να κατασκευάσετε ευθεία που να διέρχεται από την κορυφή Β του τριγώνου και να είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.*

(ε) *Να κατασκευάσετε ευθεία που να διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου και να είναι κάθετη στην απέναντι πλευρά.*

(στ) *Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε;*

☑ *Η υλοποίηση της πιο πάνω διερεύνησης υπάρχει στο αρχείο “A_En8_Ypsos_trigonou_Orthokentro ”.*

Διερεύνηση (3)

Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για τις πιο κάτω δραστηριότητες:*

(α) *Να κατασκευάσετε τρεις ευθείες οι οποίες να τέμνονται ανά δύο.*
(β) *Να κατασκευάσετε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ που ορίζεται από τα σημεία τομής των ευθειών.*
(γ) *Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της γωνίας Α του τριγώνου.*
(δ) *Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της γωνίας Β του τριγώνου.*
(ε) *Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο της γωνίας Γ του τριγώνου.*
(στ) *Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε;*

☑ *Η υλοποίηση της πιο πάνω διερεύνησης υπάρχει στο αρχείο "A_En8_dixotomos_trigonou_egkentro"*

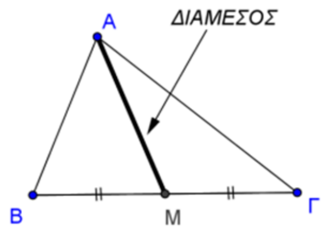
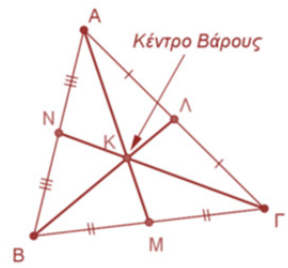
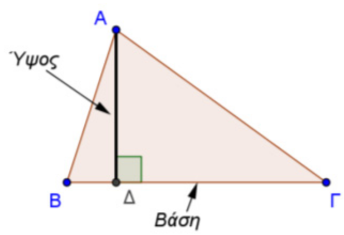
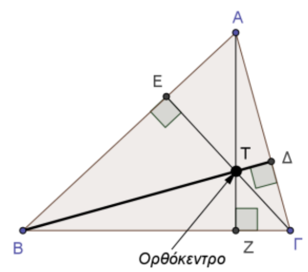
Διερεύνηση (4)

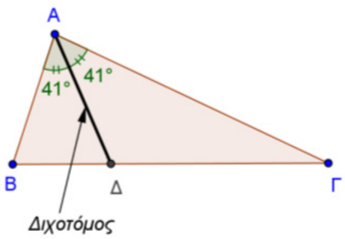
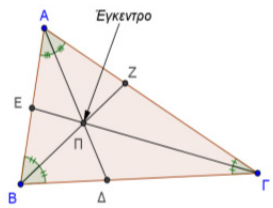
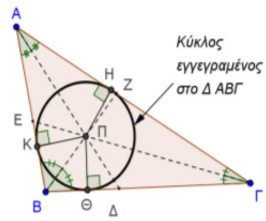
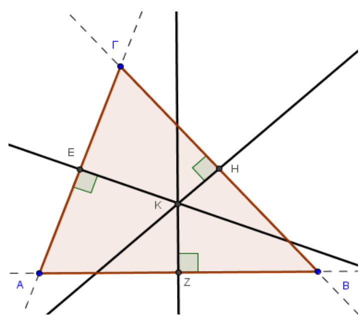
Τεχνολογία: *Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό Geogebra ή Capri II plus για τις πιο κάτω δραστηριότητες:*

(α) *Να κατασκευάσετε τρεις ευθείες οι οποίες να τέμνονται ανά δύο.*
(β) *Να κατασκευάσετε το τρίγωνο $ΑΒΓ$ που ορίζεται από τα σημεία τομής των ευθειών και να βρείτε το μέτρο των γωνιών του.*
(γ) *Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ του τριγώνου.*
(δ) *Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου.*
(ε) *Να κατασκευάσετε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΓ του τριγώνου.*
(στ) *Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε;*

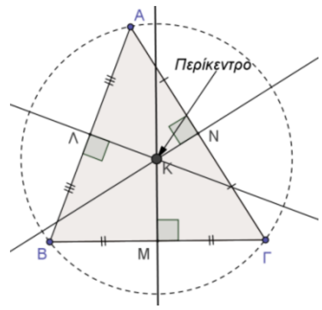
☑ *Η υλοποίηση της πιο πάνω διερεύνησης υπάρχει στο αρχείο "A_En8_mesokathetos_trigonou_Perikentro".*

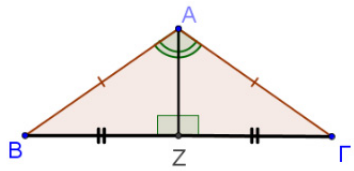
Μαθαίνω

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου **Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου**		
Διάμεσος	**Διάμεσος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. *π.χ. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος, γιατί το σημείο $Α$ είναι κορυφή του τριγώνου και το $Μ$ είναι μέσο της απέναντι πλευράς $ΒΓ$.*	 $\mathbf{BM = M\Gamma}$
Κέντρο βάρους ή **Βαρύκεντρο**	**Κέντρο βάρους** ή **Βαρύκεντρο** ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του. ➢ *Η απόσταση του κέντρου βάρους από το μέσο μιας πλευράς είναι ίση με το* $\frac{1}{3}$ ***του μήκους της διαμέσου.*** *π.χ. Το σημείο Κ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου $ΑΒΓ$.*	 $\mathbf{KM = \frac{1}{3}\ AM}$
Ύψος	**Ύψος** τριγώνου ονομάζεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του. Η πλευρά αυτή ονομάζεται βάση του τριγώνου ως προς το συγκεκριμένο ύψος. *π.χ. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $ΑΔ$ είναι ύψος του τριγώνου γιατί το σημείο $Α$ είναι κορυφή του τριγώνου και $ΑΔ \perp ΒΓ$.*	 $\mathbf{A\Delta \perp B\Gamma}$ $\mathbf{\widehat{\Delta} = 90^0}$
Ορθόκεντρο	**Ορθόκεντρο** είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου. *π.χ. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΖ, ΒΔ$ και $ΓΕ$ είναι τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$. Το σημείο $Τ$ είναι το ορθόκεντρο.*	

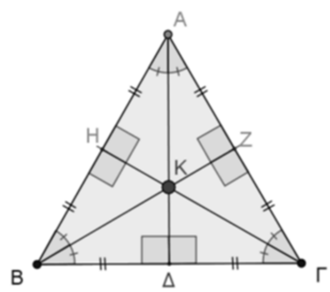
Διχοτόμος	**Διχοτόμος** τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνιά του τριγώνου, ξεκινά από μια κορυφή του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά. *π.χ. Στο τρίγωνο* $AB\Gamma$ *η* $A\Delta$ *είναι διχοτόμος γιατί χωρίζει την γωνία* $B\hat{A}\Gamma$ *σε δύο ίσα μέρη,* $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$. *Το σημείο* A *είναι κορυφή του τριγώνου και το* Δ *είναι σημείο της απέναντι πλευράς* $B\Gamma$.	 $\mathbf{B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma}$
Έγκεντρο	**Έγκεντρο** είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου. ➢ *Ισαπέχει από όλες τις πλευρές του τριγώνου.* *Είναι το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου (εγγεγραμμένος κύκλος).* *π.χ. Στο τρίγωνο* $AB\Gamma$ *τα ευθύγραμμα τμήματα* $A\Delta, BZ$ *και* ΓE *είναι οι διχοτόμοι του τριγώνου* $AB\Gamma$. *Ο εγγεγραμμένος κύκλος έχει κέντρο το σημείο* Π *και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα* ΠZ $(\Pi Z = \Pi\Delta = \Pi E)$	 
Μεσοκάθετος	**Μεσοκάθετος** τριγώνου ονομάζεται η μεσοκάθετη της πλευράς ενός τριγώνου. *π.χ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Κ και είναι κάθετες στα μέσα Ε, Ζ, Η αντίστοιχα των τριών πλευρών του τριγώνου είναι οι μεσοκάθετες του τριγώνου.*	

<table>
<tr>
<td>Περίκεντρο</td>
<td>Περίκεντρο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου.
➢ Το περίκεντρο ισαπέχει από όλες τις κορυφές του τριγώνου.
Είναι το κέντρο του κύκλου που περνά από τις κορυφές του τριγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος).

π.χ. Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ η ευθεία $ΚΛ$ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $ΑΒ$, η ευθεία $ΚΝ$ μεσοκάθετη της πλευράς $ΑΓ$ και $ΚΜ$ μεσοκάθετη της πλευράς $ΒΓ$.
Ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $Κ$ και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΑ$ $(ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ)$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">• Σε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διχοτόμος και διάμεσος.

π.χ. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ)$ το ύψος $ΑΖ$ που φέρουμε στην ΒΓ είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου.</td>
<td>

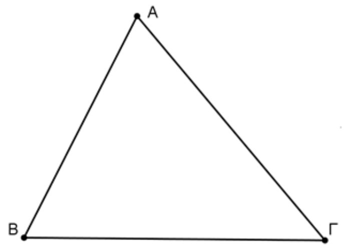
$\boldsymbol{Β\widehat{Α}Ζ = Γ\widehat{Α}Ζ}$,
$\boldsymbol{ΑΖ \perp ΒΓ}$,
$\boldsymbol{ΒΖ = ΖΓ}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">• Σε ισόπλευρο τρίγωνο το ορθόκεντρο, το έγκεντρο, το κέντρο βάρους και το περίκεντρο συμπίπτουν.

Π.χ. Στο ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα $ΑΔ$, $ΒΖ$ και $ΓΗ$ είναι ύψος, διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου. Το σημείο $Κ$ είναι το ορθόκεντρο, το έγκεντρο, το κέντρο βάρους και το περίκεντρο του τριγώνου.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

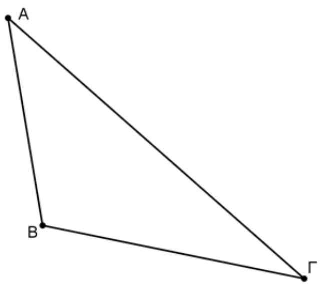
Παραδείγματα

1. Να κατασκευάσετε τα ύψη στα πιο κάτω τρίγωνα.

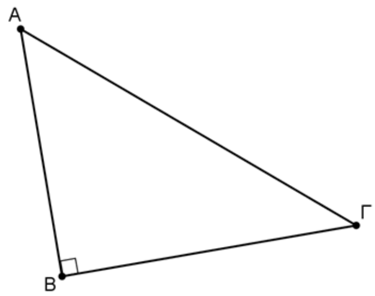
(α)



(β)

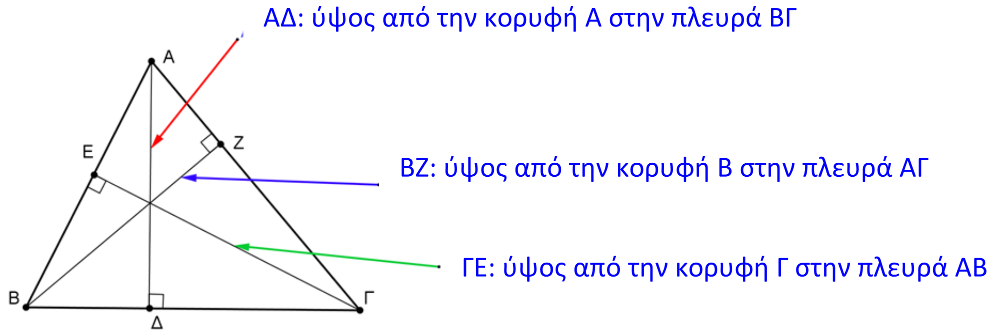


(γ)

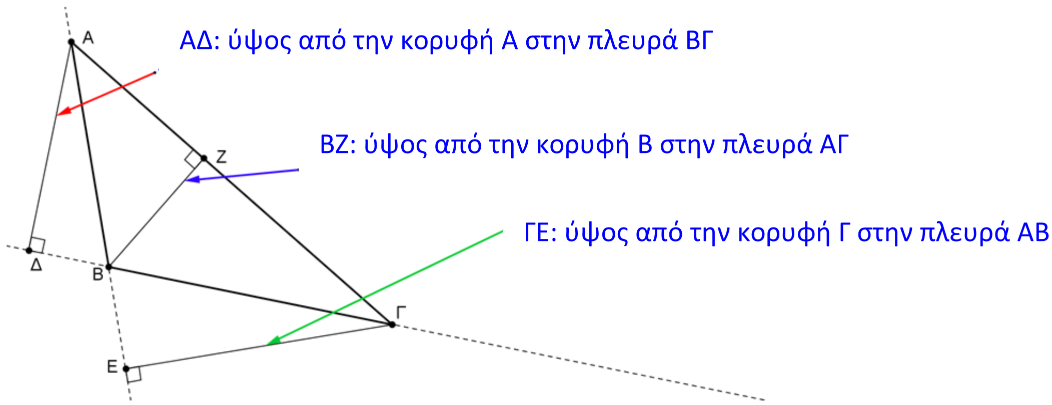


Λύση:

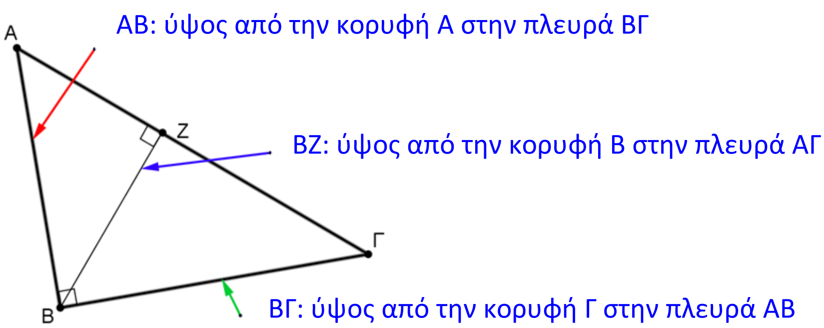
(α)



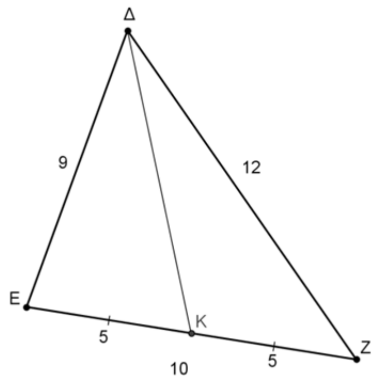
(β)



(γ)



2. Σε τρίγωνο ΔΕΖ, $\mathrm{\Delta E = 9\ cm}$, $\mathrm{EZ = 10\ cm}$ και $\mathrm{\Delta Z = 12\ cm}$. Αν η ΔΚ είναι διάμεσος του τριγώνου να υπολογίσετε το μήκος των ΚΕ και ΚΖ.



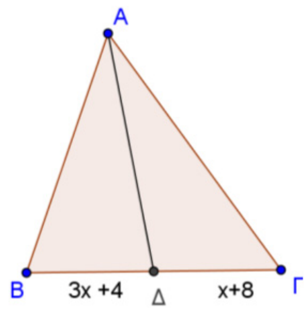
Λύση:

ΔK *διάμεσος* $\Rightarrow K$ *μέσο του* $EZ \Rightarrow KE = KZ$.

$EZ = 10\,cm \Rightarrow KE + KZ = 10\,cm$

$\Rightarrow 2 \cdot KE = 10\,cm \Rightarrow KE = 5\,cm$.

3. Να υπολογίσετε την τιμή του x, αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

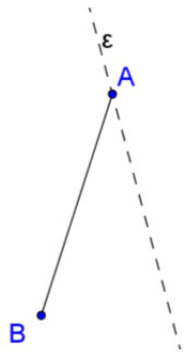


Λύση:

$A\Delta$ διάμεσος $\Rightarrow B\Delta = \Delta\Gamma$

$$3x + 4 = x + 8$$
$$\Rightarrow 3x - x = 8 - 4$$
$$\Rightarrow 2x = 4$$
$$\Rightarrow x = 4 : 2$$
$$\Rightarrow x = 2$$

4. Στο διπλανό σχήμα να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα AB', ώστε να είναι συμμετρικό του τμήματος AB ως προς την ευθεία (ε).



(α) Να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα BB' και να ονομάσετε Μ το σημείο τομής της BB' με την ευθεία (ε).

(β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ABB';

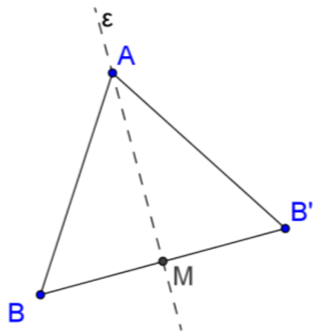
(γ) Ποια είναι η θέση του σημείου Μ σε σχέση με τα σημεία B και B' και τι στοιχείο του τριγώνου ABB' είναι το τμήμα AM;

(δ) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας $A\widehat{M}B$ και τι στοιχείο του τρίγωνου AB' είναι το τμήμα AM;

(ε) Να εξετάσετε αν η AM είναι διχοτόμος του τριγώνου ABB'.

Λύση

(α)



(β) Το AB' είναι συμμετρικό του AB άρα $AB = AB'$ και το τρίγωνο ABB' είναι ισοσκελές.

(γ) Το M είναι το μέσο του BB' άρα η AM είναι η διάμεσος του τριγώνου.

(δ) $BB' \perp AM$ άρα AM ύψος του τριγώνου.

AM ύψος $\Rightarrow A\widehat{M}B = A\widehat{M}B' = 90°$

(ε) $AB = AB' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$

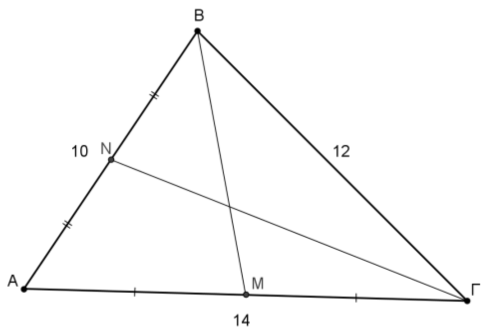
$B\hat{A}M + \hat{B} + A\widehat{M}B = B'\hat{A}M + \hat{B}' + A\widehat{M}B' = 180°$

$\Rightarrow B\hat{A}M + \hat{B} + 90° = B'\hat{A}M + \hat{B} + 90°$

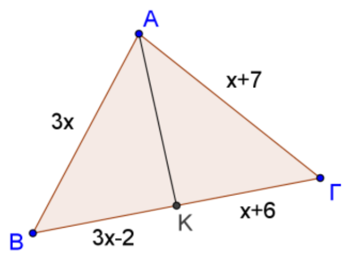
$\Rightarrow B\hat{A}M = B'\hat{A}M \Rightarrow AM$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Δραστηριότητες

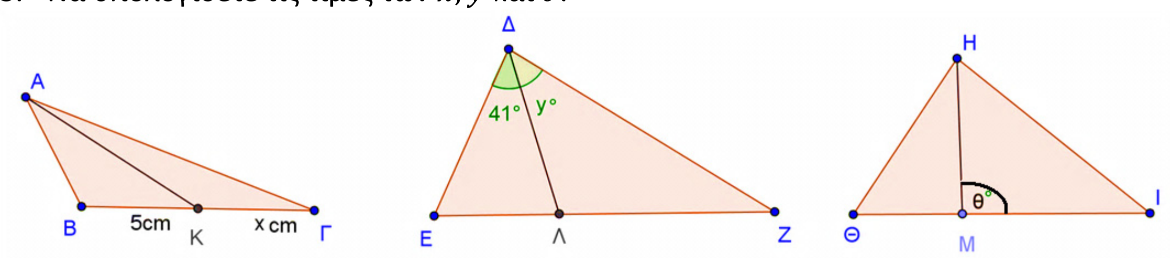
1. Τρίγωνο $ABΓ$ έχει πλευρές $AB = 10\ cm, BΓ = 12\ cm$, $AΓ = 14\ cm$. Αν BM και $ΓN$ είναι διάμεσοι του τριγώνου, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $AM, ΓM, AN, BN$.



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου, αν η AK είναι διάμεσος του τριγώνου.



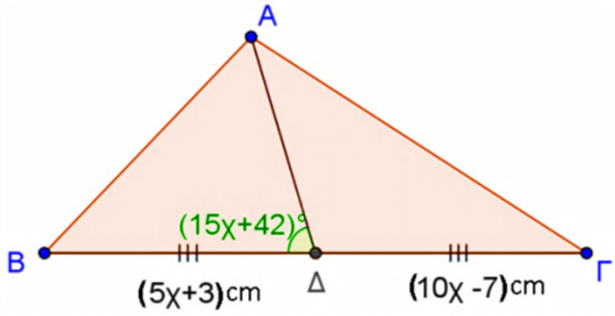
3. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y και θ.



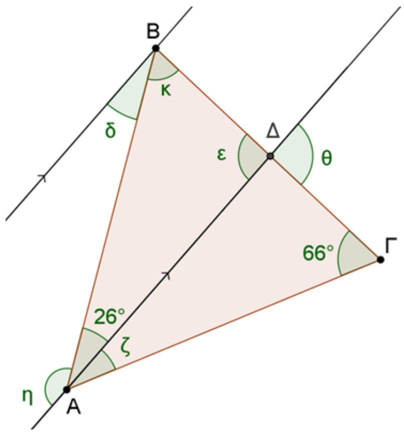
ΑΚ Διάμεσος ΔΛ Διχοτόμος ΗΜ Ύψος

4. Να κατασκευάσετε τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και να φέρετε το ύψος $ΑΔ$, τη διάμεσο $ΒΜ$ και τη διχοτόμο $ΓΕ$.

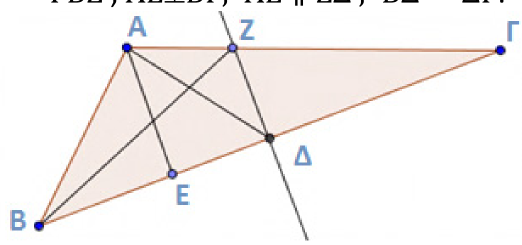
5. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του x και το μέτρο της $Α\hat{Δ}Γ$.



6. Στο πιο κάτω σχήμα $ε_1 \parallel ε_2$, $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$ και $\hat{κ} = 62°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες που αναγράφονται με μικρά γράμματα. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. Στο πιο κάτω σχήμα $Α\hat{Β}Ζ = Γ\hat{Β}Ζ$, $ΑΕ \perp ΒΓ$, $ΑΕ \parallel ΖΔ$, $ΒΔ = ΔΓ$.



8. Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθύγραμμο τμήμα της στήλης $Α$ με μια πρόταση της στήλης $Β$.

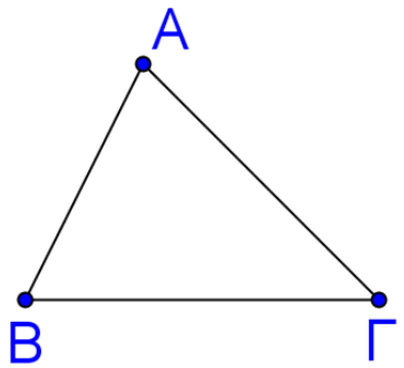
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1) $ΑΕ$	α) Μεσοκάθετος της πλευράς $ΒΓ$
2) $ΑΔ$	β) Διχοτόμος της $\hat{Α}$
3) $ΖΔ$	γ) Ύψος του τριγώνου $ΑΒΓ$
4) $ΒΖ$	δ) Διχοτόμος γωνίας $Β$
	ε) Διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$

9. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

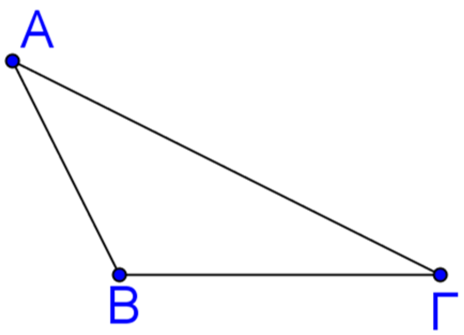
(α)	Διάμεσος τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζει μια γωνία του σε δύο ίσα μέρη.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β)	Σε ισόπλευρο τρίγωνο το ύψος είναι και άξονας συμμετρίας του τριγώνου.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ)	Το κέντρο βάρους βρίσκεται στο μέσο κάθε διαμέσου.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ)	Οι μεσοκαθέτοι ενός τριγώνου μπορεί να τέμνονται σε μια από τις κορυφές του τριγώνου.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(ε)	Το ορθόκεντρο μπορεί να συμπίπτει με μια από τις κορυφές του τριγώνου.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(στ)	Το σημείο τομής των διαμέσων βρίσκεται πάντοτε εντός του τριγώνου.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

10. Να σχεδιάσετε τις διαμέσους των παρακάτω τριγώνων.

α)

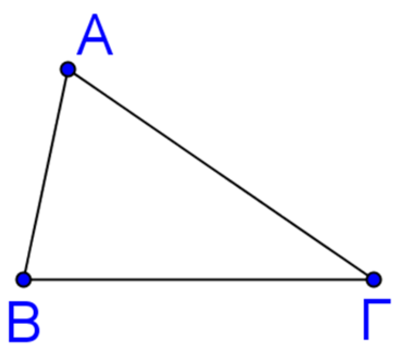


β)

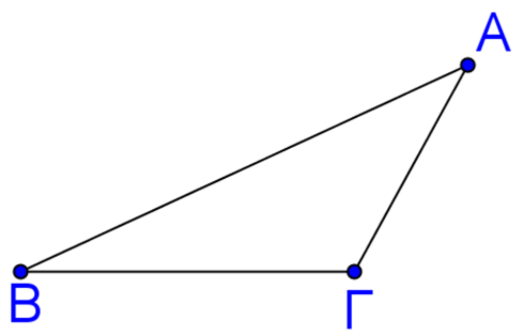


11. Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους των παρακάτω τριγώνων.

α)

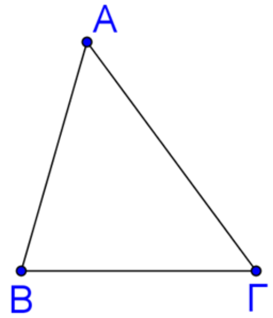


β)

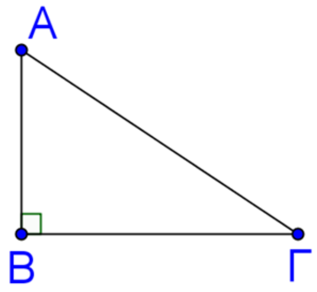


12. Να σχεδιάσετε τα ύψη των πιο κάτω τριγώνων.

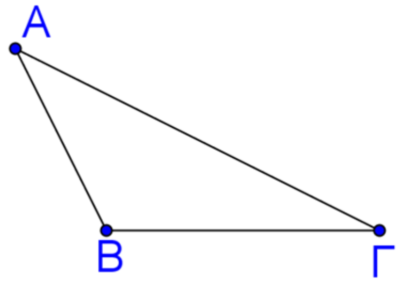
α)



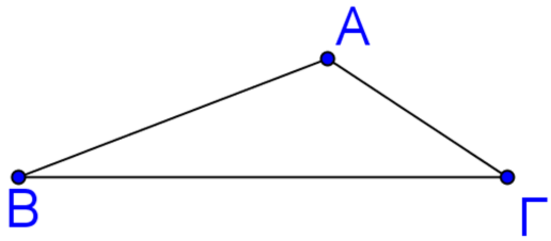
β)



γ)

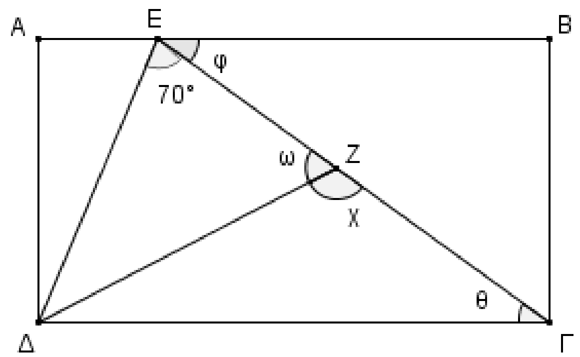


δ)



13. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ = 5cm$ και $\hat{A} = 120°$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τα ύψη $ΒΔ$ και $ΓΕ$ και να τα συγκρίνετε με τη βοήθεια του διαβήτη.

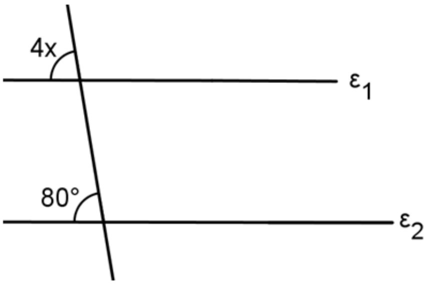
14. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο. Αν $ΔΕ = ΔΖ$ και η $ΔΖ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΔΕΓ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\widehat{\omega}$, $\hat{x}$, $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$.



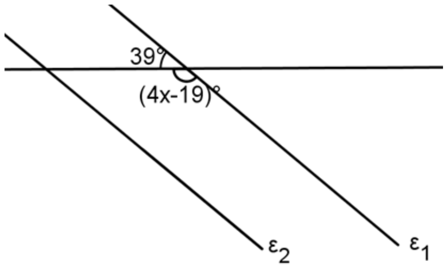
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να υπολογίσετε την τιμή του x, σε κάθε περίπτωση, έτσι ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

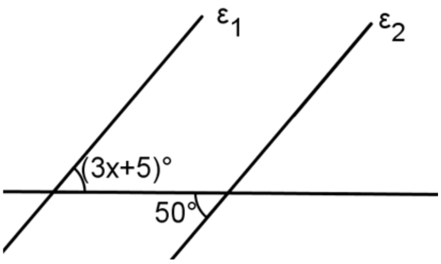
(α)



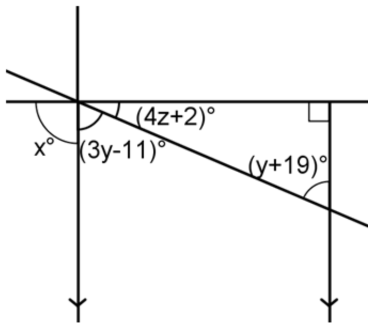
(β)



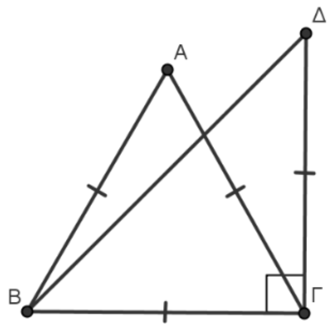
(γ)



2. Να υπολογίσετε τις τιμές των $x, y\ και\ z$ στο διπλανό σχήμα:

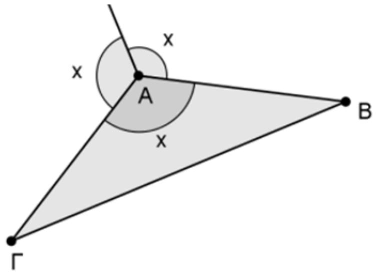


3. Στο διπλανό σχήμα $AB = B\Gamma = A\Gamma = \Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma \perp B\Gamma$. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ ως προς τις πλευρές του και ως προς τις γωνίες του.

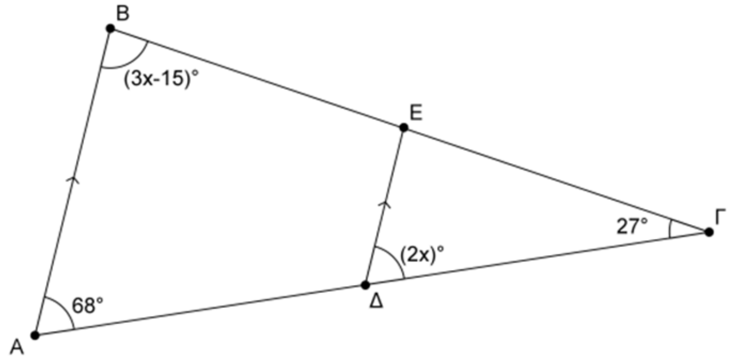


4. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει τρίγωνο με γωνίες:
   (α) $45°, 55°, 100°$
   (β) $37°, 82°, 61°$
   (γ) $50°, 50°, 50°$.

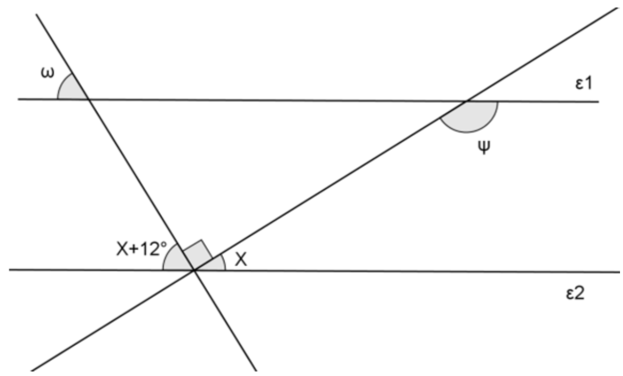
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές. Να υπολογίσετε την τιμή του x και τις γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$.



6. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του x.

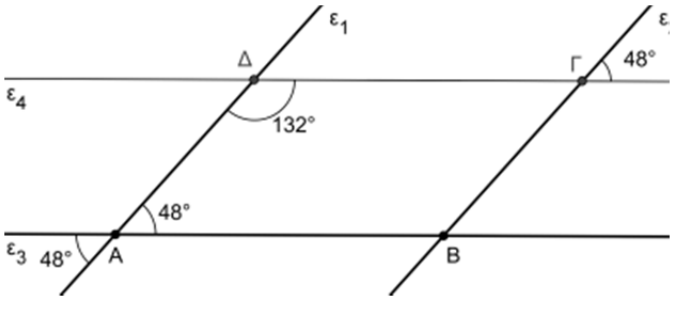


7. Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις τιμές των x, ψ και ω και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

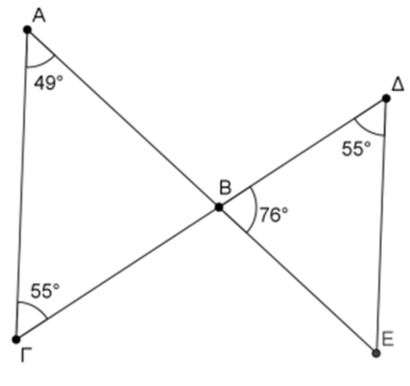


8. Να βρείτε ζεύγη παραλλήλων ευθειών στα πιο κάτω σχήματα, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

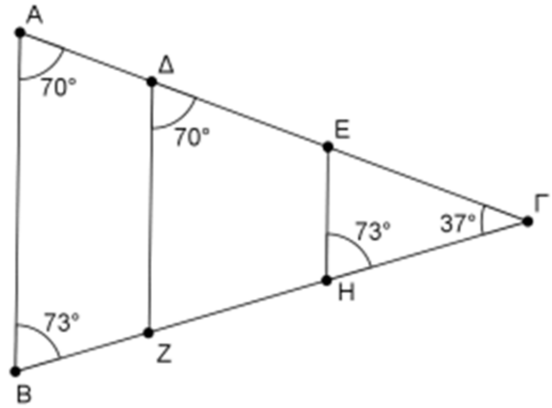
(α)



(β)



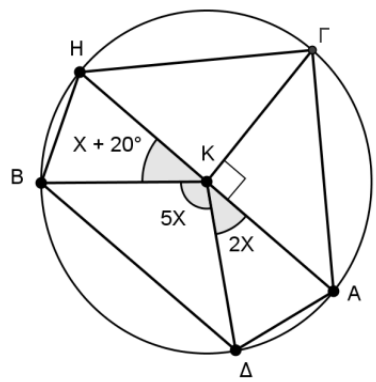
(γ)



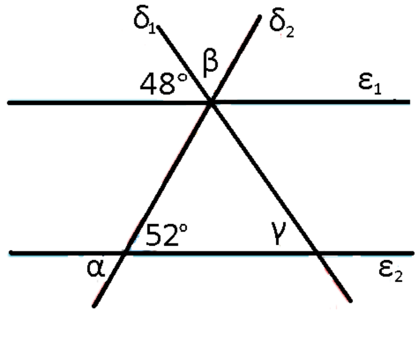
9. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο γωνίες τους αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε και οι τρίτες γωνιές είναι αντίστοιχα ίσες μεταξύ τους.

10. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ η γωνία $\hat{A}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $125°$ και η γωνία $\hat{B} = \frac{3}{5}\hat{A}$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου.

11. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος με κέντρο K και διάμετρο HA. Να υπολογίσετε την τιμή του x και τις γωνίες $KHB, KΓH, KAΔ$ και $BKΔ$.

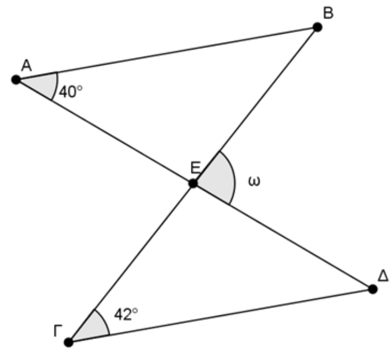


12. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.



13. Να χαρακτηρίσετε ορθή ή λανθασμένη καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις:
    (α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του.
    (β) Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντοτε ίσες μεταξύ τους.
    (γ) Ένα σκαληνό τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο.

14. Αν $AB \parallel \Gamma\Delta$ να υπολογίσετε τη γωνία ω.



15. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(1,1)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(4,4)$. Να τοποθετήσετε τα σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να εξετάσετε το είδος του τρίγωνου $AB\Gamma$ που σχηματίζεται ως προς τις γωνιές του και ως προς τις πλευρές του.

16. Να αντιστοιχίσετε κάθε πρόταση της Στήλης A με μια πρόταση της Στήλης B:

Στήλη Α	**Στήλη Β**
i. Διχοτόμος τριγώνου	α) είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.
ii. Ύψος τρίγωνου	β) είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του τριγώνου προς την ευθεία που περιέχει την απέναντι πλευρά του.
iii. Διάμεσος τριγώνου	γ) είναι το ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί μια γωνιά του τριγώνου, ξεκινά από μια κορυφή του και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

17. Να κατασκευάσετε τρίγωνο του οποίου το ορθόκεντρο να βρίσκεται έξω από το τρίγωνο.

18. Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα, για να δικαιολογήσετε ότι η πρόταση «*Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντοτε και ύψος του τριγώνου*», δεν ισχύει πάντοτε.

19. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1,-2), B(3,-1)$ και $\Gamma(1,6)$. Να τοποθετήσετε τα σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και στην συνέχεια να φέρετε τη διάμεσο $B\Delta$ και τη διχοτόμο AE του τριγώνου $AB\Gamma$.

20. Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $5\,cm$ με χάρακα και διαβήτη. (*Πρόταση Ι.1, Ευκλείδη*)

Οι ασκήσεις 21 και 22 να γίνουν με τη βοήθεια του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

21. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$.
    (α) Να βρείτε το μέσο $Δ$ του $ΒΓ$.
    (β) Να φέρετε την μεσοκάθετο του $ΒΓ$.
    (γ) Να τοποθετήσετε σημείο $Α$ στη μεσοκάθετο και να σχεδιάσετε το τρίγωνο $ΑΒΓ$.
    (δ) Να μετρήσετε το μήκος των πλευρών του τριγώνου.
    (ε) Να βρείτε το μέτρο των $Β\hat{Α}Δ$ και $Γ\hat{Α}Δ$.
    (στ) Να μετακινήσετε το σημείο $Α$ στη μεσοκάθετο.
    (ζ) Τι είδος τριγώνου είναι το $ΑΒΓ$;
    (η) Ποια είναι η σχέση των $Β\hat{Α}Δ$ και $Γ\hat{Α}Δ$;

22. Να κατασκευάσετε τυχαίο τρίγωνο $ΑΒΓ$.
    (α) Να φέρετε το ύψος $ΑΔ$.
    (β) Να φέρετε τη διχοτόμο $ΑΕ$.
    (γ) Να φέρετε τη διάμεσο $ΑΜ$.
    (δ) Να μετακινήσετε τις κορυφές $Α, Β$ και $Γ$ και να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:
        i. Σε ποιο είδος τριγώνου τα τρία τμήματα $ΑΔ$, $ΑΕ$ και $ΑΜ$ συμπίπτουν;
        ii. Σε ποιο είδος τριγώνου το ύψος του μπορεί να βρίσκεται εκτός τριγώνου;
        iii. Να εξετάσετε τη θέση των υψών ενός ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με τις πλευρές του;

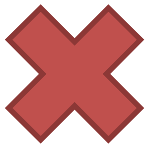
23. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις.

α)	Δυο σημεία $Α$ και $Β$ είναι συμμετρικά ως προς κέντρο $Ο$ αν το $Ο$ ανήκει στην μεσοκάθετη του $ΑΒ$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β)	Το κέντρο συμμετρίας του τετραγώνου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ)	Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι ο μοναδικός άξονας συμμετρίας.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ)	Αν δυο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς άξονα τότε κάθε σημείο τους είναι συμμετρικό ως προς τον ίδιο άξονα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ε)	Ο κύκλος έχει μόνο δύο άξονες συμμετρίας .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

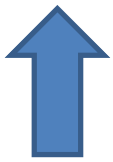
24. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $Κ$ το σημείο τομής των διαγωνίων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Να αναφέρετε τα συμμετρικά σημεία των κορυφών $Α, Β, Γ$ και $Δ$ με κέντρο συμμετρίας το $Κ$.

25. Να βρείτε το κέντρο συμμετρίας, οπού υπάρχει για τα πιο κάτω σχήματα:

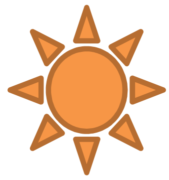
(α)



(β)

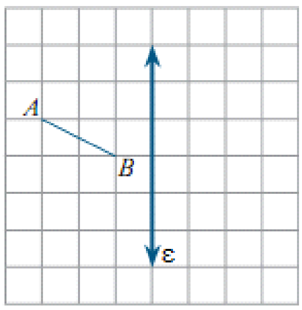


(γ)

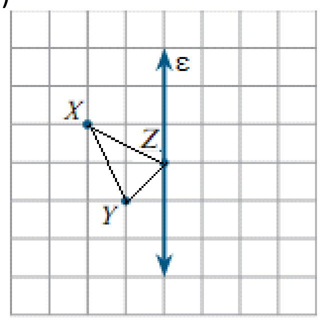


26. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα ως προς τον άξονα συμμετρίας (ε), σε κάθε περίπτωση.

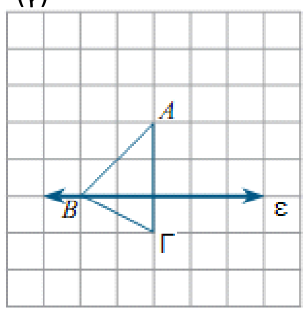
(α)



(β)

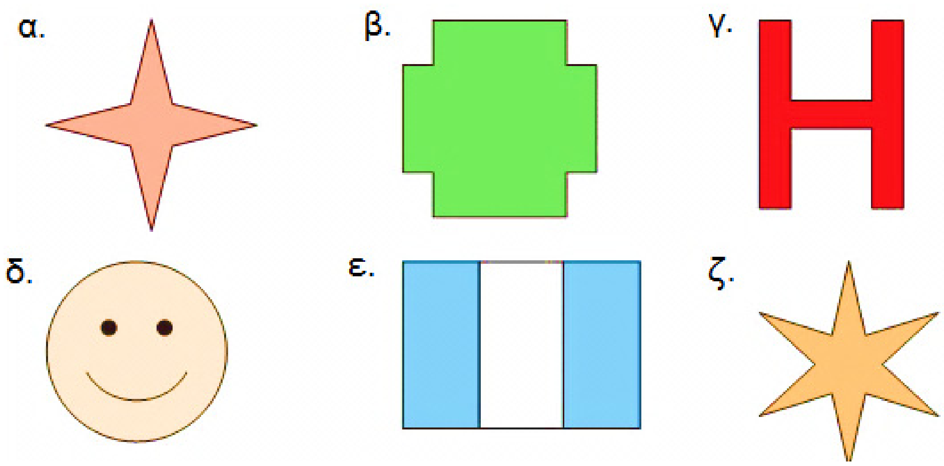


(γ)

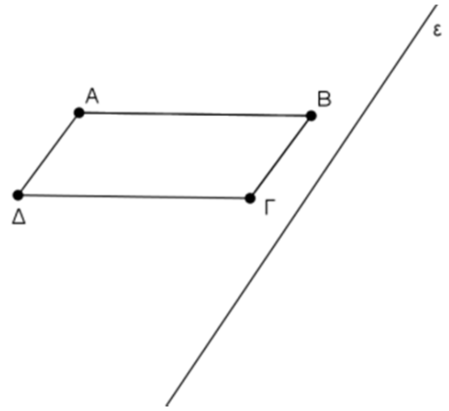


27. Αν η ευθεία (ε) είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB να δικαιολογήστε γιατί τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς την (ε).

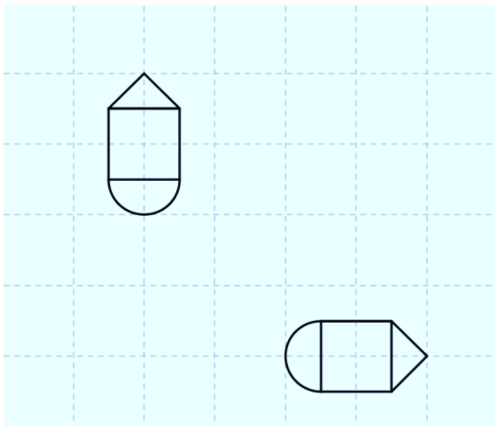
28. Να φέρετε ένα άξονα συμμετρίας για κάθε ένα από τα πιο κάτω σχήματα.



29. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$ ως προς τον άξονα ε, όπως φαίνεται στο σχήμα.



30. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας για τα πιο κάτω συμμετρικά σχήματα:



31. Να δώσετε ένα παράδειγμα σχήματος που έχει μόνο έναν άξονα συμμετρίας και ένα παράδειγμα σχήματος που να έχει περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας.

32. Τα σημεία $Α, Β, Γ, Δ$ και $Ε$ βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία έτσι ώστε να ισχύουν όλες οι πιο κάτω συνθήκες:
    - Το σημείο $Α$ είναι συμμετρικό ως προς το $Β$ με κέντρο συμμετρίας το $Γ$.
    - Το $Α$ και το $Γ$ είναι συμμετρικά με κέντρο συμμετρίας το $Δ$.
    - Το $Ε$ είναι το κέντρο συμμετρίας των $Γ$ και $Β$.

    Ποιά από τις πιο κάτω προτάσεις είναι ορθή και γιατί;

    Α. Τα $Α$ και $Ε$ είναι συμμετρικά με κέντρο συμμετρίας το $Δ$.

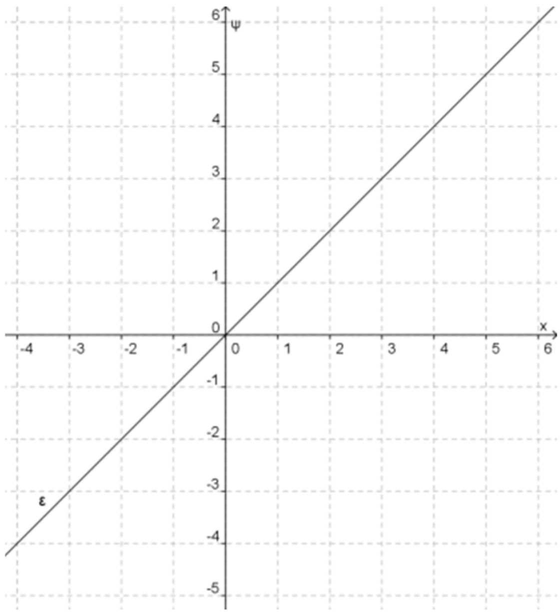
    Β. Τα $Δ$ και $Ε$ είναι συμμετρικά με κέντρο συμμετρίας το $Γ$.

    Γ. Το $Γ$ είναι κέντρο συμμετρίας για τα $Δ$ και $Β$.

    Δ. Δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

33. Τα α , β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, όπου $\alpha = 3x - 5$, $\beta = x + 1$ και $\gamma = 2x - 2$,
   (α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου, όταν $x = 4$.
   (β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το τρίγωνο να είναι ισόπλευρο.
   (γ) Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να υπάρξει τρίγωνο, όταν $x = 0$.

34. Στο διπλανό σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τα σημεία $A(-1,3)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(1,2)$.
   (α) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα $A'B'\Gamma'$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία ε.
   (β) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό σχήμα ΔEZ του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ ως προς ως προς το σημείο $(0,0)$.
   (γ) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι συμμετρικά.



Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Να αποδείξετε ότι:
   (α) οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες
   (β) δυο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

2. Αν $\varepsilon, \kappa\ \kappa\alpha\iota\ \lambda$ είναι τρείς ευθείες έτσι ώστε $\varepsilon \parallel \kappa$ και $\lambda \perp \varepsilon$, να δείξετε ότι $\kappa \perp \varepsilon$.

3. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.

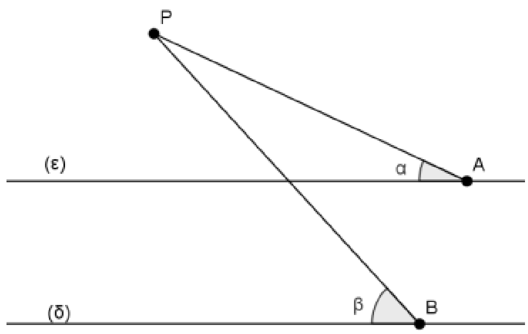
4. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

5. Δυο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι:

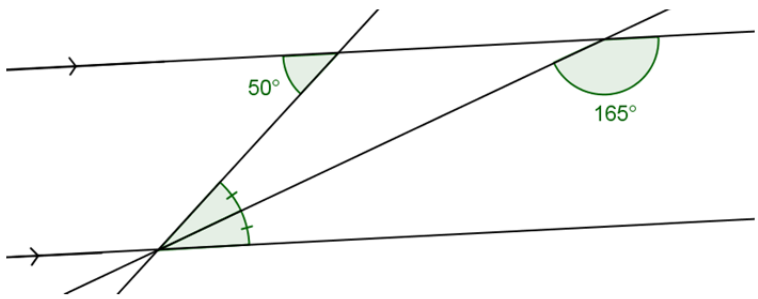
Α.	Β.	Γ.	Δ.
Συμπληρωματικές	Ίσες	Παραπληρωματικές	Κανένα από τα προηγούμενα

Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

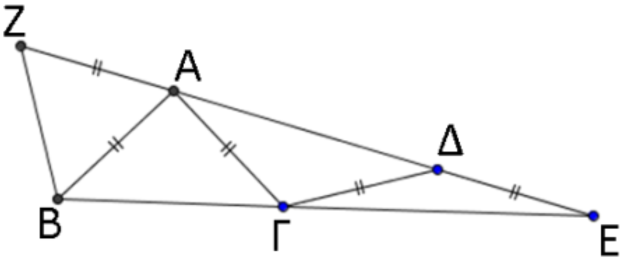
6. Στο διπλανό σχήμα αν $\varepsilon \parallel \delta$.
   (α) Να δικαιολογήσετε γιατί πρέπει να είναι η γωνιά β να είναι μεγαλύτερη από τη γωνιά α.
   (β) Να εκφράσετε τη γωνία P, συναρτήσει των α και β.



7. Στο πιο κάτω σχήμα να βρείτε το λάθος που υπάρχει και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



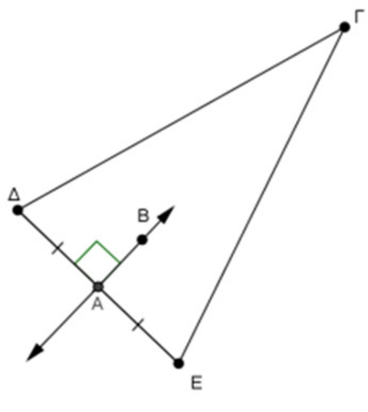
8. Στο πιο κάτω σχήμα $\mathrm{AZ} = \mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{\Delta E}$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου AZB, αν $\hat{E} = 10°$.



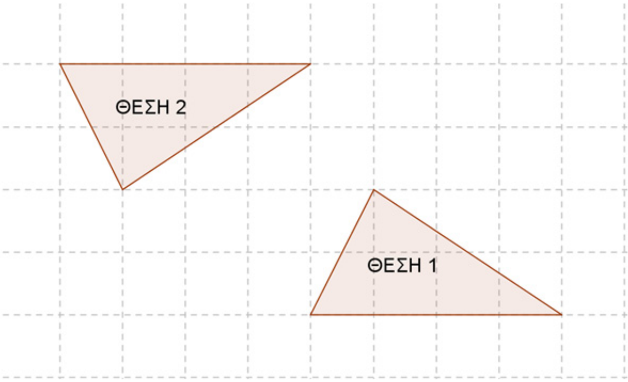
9. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τρίγωνο $P\Sigma T$ με κορυφές $P(4,3)$, $\Sigma(1,6)$ και $T(1,8)$. Να φέρετε την διάμεσο $P\Delta$ του τριγώνου $P\Sigma T$.
   (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
   (β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου $P\Delta$.
   (γ) Να εξετάσετε κατά πόσο το ευθύγραμμο τμήμα $P\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $K\Lambda M$ ($K = 90°$) με $\hat{\Lambda} = 30°$, $\widehat{M} = 60°$. Να κατασκευάσετε,
   (α) Το συμμετρικό ($K\Lambda M'$) του τριγώνου $K\Lambda M$ με άξονα συμμετρίας την ευθεία $K\Lambda$ και να βρείτε το είδος του τριγώνου $M\Lambda M'$.
   (β) Το συμμετρικό ($KM\Lambda'$) του τριγώνου $K\Lambda M$ με άξονα συμμετρίας την ευθεία KM και να βρείτε το είδος του τριγώνου $\Lambda M\Lambda'$.

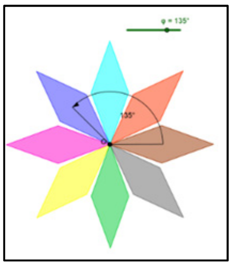
11. Με βάση το σχήμα να εντοπίσετε το λάθος στον ισχυρισμό:
«η AB διέρχεται από το σημείο Γ»,.



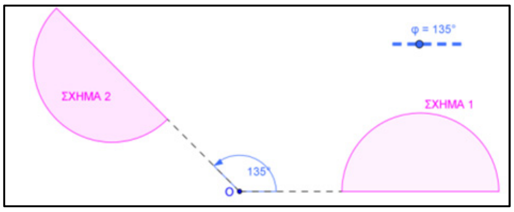
12. Ο Γιώργος εφαρμόζει διαδοχικά συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα για το τρίγωνο στην $ΘΕΣΗ\ 1$ και τελικά προκύπτει το τρίγωνο στην $ΘΕΣΗ\ 2$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.
Να βρείτε πόσες φορές εφάρμοσε, ο Γιώργος, τη συμμετρία ως προς σημείο ή άξονα και με ποιά σειρά για να πάει το αρχικό σχήμα από τη $θέση\ 1$ στη $θέση\ 2$.



13. **Χρήση Τεχνολογίας**: Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«A_En8_Symetria3. ggb»*
Να μελετήσετε το σχήμα κατά την περιστροφή του.
(α) Ποια είναι η σχέση της θέσης του αρχικού σχήματος με την τελική του θέση.
(β) Να εξετάσετε αν το σχήμα παρουσιάζει συμμετρία ως προς το O.

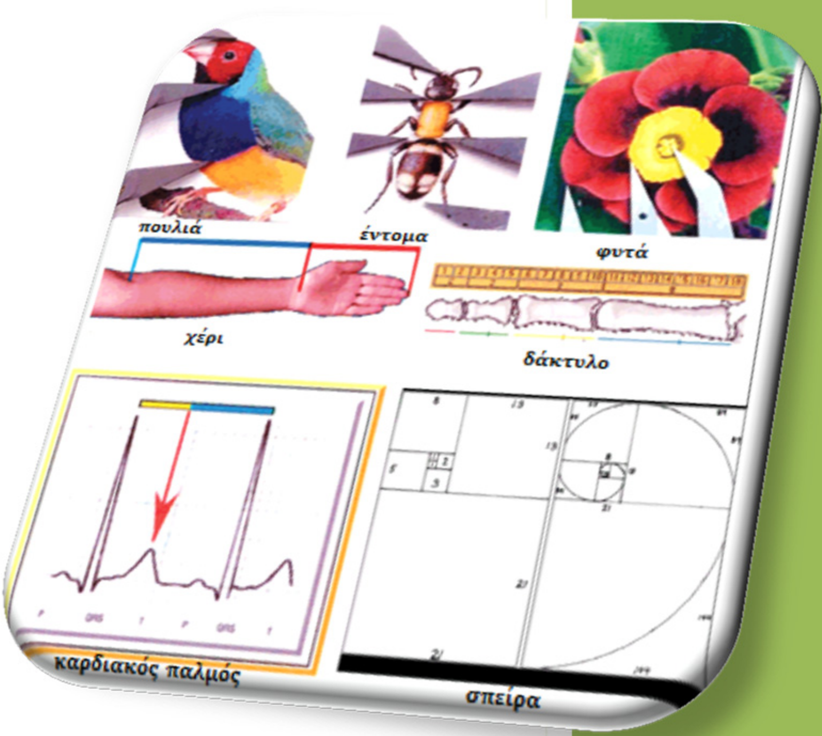


14. **Χρήση Τεχνολογίας:** *Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En8_Symetria4. ggb»*
(α) Να μετακινήσετε τον δρομέα $φ$.
(β) Να παρατηρήσετε τις διάφορες θέσεις του $σχήματος\ 1$ σε σχέση με το $σχήμα\ 2$.



ΕΝΟΤΗΤΑ 9

Λόγοι – Αναλογίες



Α’ Γυμνασίου

Λόγοι - Αναλογίες

Εξερεύνηση

Στον πιο κάτω πίνακα φαίνονται τα στοιχεία τριών ζωολογικών κήπων στην Ευρώπη.

Ζωολογικός κήπος	Έκταση σε εκτάρια	Αριθμός ζώων	Είδη ζώων
Λονδίνου	90	16800	750
Βερολίνου	30	17000	1500
Πράγας	45	5000	600

✓ Να μελετήσετε τα στοιχεία του πίνακα και να συγκρίνετε τους ζωολογικούς κήπους ως προς την έκταση τους, τον αριθμό των ζώων και τα είδη των ζώων.

Διερεύνηση (1)

Η τροχαία θέλει να τοποθετήσει μια κάμερα για έλεγχο των τροχαίων παραβάσεων. Αποφάσισε να κάνει μια έρευνα στα πιο επικίνδυνα σημεία του οδικού δικτύου της πόλης. Κατέγραψαν για μια εβδομάδα τις παραβιάσεις του ορίου ταχύτητας στα διάφορα σημεία και παρουσίασαν στο διευθυντή τροχαίας τα πιο κάτω αποτελέσματα:

Α Σημείο
Παραβίασε το όριο ταχύτητας το 20% των οδηγών

Β Σημείο
1 στους 5 οδηγούς παραβίασαν το όριο ταχύτητας

Γ Σημείο
Από τους 500 οδηγούς που πέρασαν παραβίασαν το όριο ταχύτητας οι 150

Δ Σημείο
Κάθε 3 οδηγοί που οδηγούσαν εντός του ορίου, 1 άλλος οδηγός το παραβίαζε

✓ Σε ποιο σημείο πιστεύετε ότι πρέπει να τοποθετηθεί η κάμερα, λαμβάνοντας υπόψη τις πιο πάνω πληροφορίες;

Διερεύνηση (2)

Ο Ανδρέας αποφάσισε να βάψει το δωμάτιο του και έκανε μόνος του την ανάμειξη των χρωμάτων για να φτιάξει μια συγκεκριμένη απόχρωση του γαλάζιου. Ανάμιξε 6 λίτρα μπλε μπογιά με 9 λίτρα άσπρη μπογιά. Η μπογιά που έφτιαξε δεν ήταν αρκετή και έφτιαξε νέο μείγμα στο οποίο ανάμιξε 4 λίτρα μπλε μπογιά με 7 λίτρα άσπρη μπογιά.

✓ Να εξετάσετε αν ο Ανδρέας πέτυχε την δεύτερη φορά να φτιάξει την ίδια απόχρωση του γαλάζιου με την αρχική.

Μαθαίνω

- **Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών** $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι **το πηλίκο των μέτρων τους**.

  Ο λόγος του $\boldsymbol{\alpha}$ προς το $\boldsymbol{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως: $\boldsymbol{\alpha}$ προς $\boldsymbol{\beta}$ ή $\boldsymbol{\alpha : \beta}$ ή $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}$.

- Ο λόγος δύο μεγεθών που εκφράζονται με διαφορετική μονάδα μέτρησης (λόγος μη ομοειδών μεγεθών), θα ονομάζεται **ρυθμός μεταβολής** ή πιο απλά ρυθμός του ενός μεγέθους ως προς το άλλο.

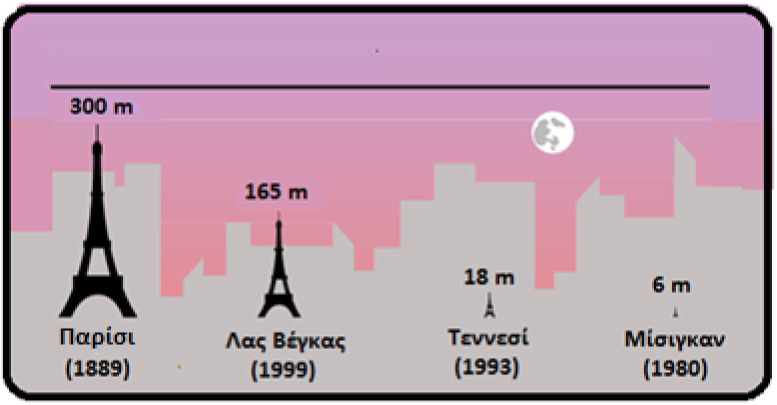
- **Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}}$

- Οι $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ και $\boldsymbol{\delta}$ λέγονται **όροι** της αναλογίας.

  - Οι $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\delta}$ λέγονται **άκροι όροι** της αναλογίας.
  - Οι $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ λέγονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.
  - Οι $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ λέγονται **ηγούμενοι όροι** της αναλογίας.
  - Οι $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\delta}$ λέγονται **επόμενοι όροι** της αναλογίας.

Παραδείγματα

1. Ο πύργος του Άιφελ κτίστηκε το 1889 και πήρε το όνομα του από τον μηχανικό που τον σχεδίασε, το Γουστάβο Άιφελ. Εκείνη τη χρονική περίοδο ήταν το ψηλότερο κτίριο στο κόσμο, με ύψος $300\ m$. Σήμερα παραμένει το ψηλότερο κτίριο στο Παρίσι. Στη συνέχεια κατασκευάστηκαν αντίγραφα του πύργου του Άιφελ σε άλλες περιοχές του κόσμου. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζονται διάφορες κατασκευές του πύργου, διαφορετικού μεγέθους. Να βρεθεί ο λόγος του ύψους του πύργου στο Παρίσι ως προς το ύψος κάθε ενός από τους υπόλοιπους.



Λύση:

<u>Ύψος πύργου Παρισιού προς ύψος πύργου Μίσιγκαν:</u> $300:6$ ή $\frac{300}{6}=\frac{50}{1}$

Άρα ο πύργος του Παρισιού είναι πενήντα φορές ψηλότερος από αυτόν του Μίσιγκαν.

<u>Ύψος πύργου Παρισιού προς ύψος πύργου Λας Βέγκας:</u> $300:165$ ή $\frac{300}{165}=\frac{20}{11}$

<u>Ύψος πύργου Παρισιού προς ύψος πύργου Τεννεσί:</u> $300:18$ ή $\frac{300}{18}=\frac{50}{3}$

2. Δύο σημεία στο χάρτη που βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, απέχουν $10\ cm$. Να υπολογίσετε την κλίμακα του χάρτη, αν η πραγματική απόσταση των δύο σημείων είναι $2\ km$.

Λύση:

Μετατρέπουμε τις αποστάσεις στην ίδια μονάδα μέτρησης:

$$2\ km = 2 \cdot 100\,000 = 200\,000\ cm$$

$\frac{Απόσταση\ χάρτη}{Πραγματική\ απόσταση}=\frac{10}{200\,000}=\frac{1}{20\,000}$ *Η κλίμακα του χάρτη είναι* $1:20\,000$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται μια συνταγή για κέικ γεωγραφίας, να γράψετε:
   (α) το λόγο της ποσότητας του λαδιού προς τη ποσότητα του γάλακτος
   (β) το λόγο της ποσότητας της ζάχαρης προς την ποσότητα του αλευριού
   (γ) το λόγο της ποσότητας του λαδιού προς την ποσότητα της ζάχαρης.

2. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $2\ cm$ και πλάτος $6\ cm$. Να βρείτε το λόγο του πλάτους προς το μήκος του ορθογωνίου.

3. Σε ένα καλαθοσφαιρικό αγώνα, ο καλαθοσφαιριστής A ευστόχησε στις 10 από τις 15 ελεύθερες βολές που πραγματοποίησε, ενώ ο καλαθοσφαιριστής B ευστόχησε στις 10 από τις 13 βολές. Να γράψετε το λόγο των εύστοχων βολών προς τον αριθμό των ελεύθερων βολών που έριξε ο κάθε καλαθοσφαιριστής. Ποιος καλαθοσφαιριστής είχε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

4. Να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω αναλογίες:

   (α) $\frac{2}{5} = \frac{....}{15}$ (β) $\frac{4}{7} = \frac{16}{....}$

   (γ) $\frac{15}{20} = \frac{....}{4}$ (δ) $\frac{2}{6} = \frac{...}{...}$

5. Να χρησιμοποιήσετε τους λόγους $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{15}, \frac{8}{14}, \frac{2}{6}, \frac{6}{18}$ για να σχηματίσετε τέσσερεις αναλογίες.

6. Στη διπλανή φωτογραφία φαίνονται έξι διαφορετικά μοντέλα τρένων. Το καθένα έχει κατασκευαστεί με συγκεκριμένη κλίμακα όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα. Να βρείτε το λόγο που αντιστοιχεί στο μικρότερο τρένο της φωτογραφίας.

Μοντέλο	Κλίμακα
A	$1 : 220$
B	$1 : 160$
$Γ$	$1 : 87$
$Δ$	$1 : 64$
E	$1 : 48$
$ΣT$	$1 : 30$

7. Ένα ζαχαροπλαστείο κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο είδος τούρτας με βάση τετράγωνο, όπως φαίνεται πιο κάτω:

τούρτα A
με πλευρά $20\ cm$

τούρτα B
με πλευρά $40\ cm$

(α) Να βρείτε το λόγο της πλευράς της βάσης της τούρτας A προς την πλευρά της βάσης της τούρτας B.

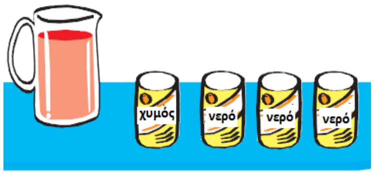
(β) Αν γύρω από κάθε τούρτα τοποθετείται διακοσμητική κορδέλα, ποιος είναι ο λόγος του μήκους της κορδέλας της τούρτας A προς το μήκος της κορδέλας της τούρτας B;

(γ) Να βρείτε το λόγο του εμβαδού της βάσης της τούρτας A προς το εμβαδόν της βάσης της τούρτας B.

Ιδιότητες Αναλογιών

Διερεύνηση

Ο Λουκάς θέλει να φτιάξει πορτοκαλάδα για το πάρτι που θα έχει το απόγευμα στην πισίνα του σπιτιού του. Σύμφωνα με τις οδηγίες της συσκευασίας, πρέπει να αναμίξει 1 δόση συμπυκνωμένου χυμού πορτοκαλιού με 3 δόσεις νερού.



- ✓ Να γράψετε στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα τους κατάλληλους λόγους της ποσότητας του χυμού προς την ποσότητα του νερού, ώστε η πορτοκαλάδα να έχει πάντα την ίδια γεύση.
- ✓ Να συγκρίνετε το γινόμενο των άκρων όρων και το γινόμενο των μέσων όρων κάθε αναλογίας. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, σύμφωνα με το παράδειγμα και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.
- ✓ Να γράψετε μια δική σας αναλογία και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματά σας.

ΑΝΑΛΟΓΙΑ	*Να αντιστρέψετε τους λόγους*		*Να αλλάξετε θέσεις στους μέσους όρους*		*Να αλλάξετε θέσεις στους άκρους όρους*		*Να προσθέσετε στους ηγούμενους τους επόμενους όρους της αναλογίας*		*Να προσθέσετε τους ηγούμενους μεταξύ τους και τους επόμενους όρους μεταξύ τους*
$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\delta}{\gamma}$	$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\beta}{\delta}$	$\frac{\delta}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\alpha}$	$\frac{\alpha+\beta}{\beta}$	$\frac{\gamma+\delta}{\delta}$	$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$
$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1+3}{3}=\frac{4}{3}$	$\frac{4+12}{12}=\frac{16}{12}$	$\frac{1+4}{3+12}=\frac{5}{15}$
$\frac{1}{3}=\frac{\dots}{\dots}$									
Να γράψετε μια δική σας αναλογία									
$\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$									

Μαθαίνω

- Ιδιότητες αναλογιών:

i. Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma}$

Το γινόμενο των άκρων όρων μιας αναλογίας είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων της.

ii. Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}}$

Αν αλλάξουμε τη θέση των μέσων όρων μιας αναλογίας προκύπτει αναλογία.

iii. Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}}$

Αν αλλάξουμε τη θέση των άκρων όρων μιας αναλογίας προκύπτει αναλογία.

iv. Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}}$

Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τους επόμενους όρους στους αντίστοιχους ηγούμενους όρους μιας αναλογίας προκύπτει αναλογία.

v. Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\cdots=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots}{\beta+\delta+\zeta+\cdots}}$

Αν προσθέσουμε όλους τους ηγούμενους όρους μιας αναλογίας μεταξύ τους και όλους τους επόμενους όρους μεταξύ τους, ο λόγος που προκύπτει είναι ίσος με τους προηγούμενους λόγους της αναλογίας.

Παραδείγματα

1. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3}=\frac{2}{6}$. Να βρείτε την τιμή του x.

Λύση:

$\frac{x}{3}=\frac{2}{6}$ *Το γινόμενο των άκρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων (Ιδιότητα).*

$\Leftrightarrow 6x=2\cdot 3$ *Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.*

$\Leftrightarrow 6x=6$

$\Leftrightarrow x=1$

2. Στη διπλανή φωτογραφία φαίνονται ένα εκπαιδευτικό αεροπλάνο και ένα μοντέλο που είναι πιστό αντίγραφό του. Το αεροπλάνο έχει μήκος $6{,}6\,m$, ενώ το μήκος του φτερού του είναι $8\,m$. Αν το μοντέλο κατασκευάστηκε με κλίμακα $1:6$, να βρείτε τις αντίστοιχες διαστάσεις του μοντέλου.

Λύση:

$$\frac{Μήκος\ μοντέλου}{Μήκος\ εκπ.\ αεροπλάνου} = \frac{1}{6}$$

Συμβολίζουμε με x το μήκος του μοντέλου.

$$\frac{x}{6{,}6} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6x = 1 \cdot 6{,}6 \Leftrightarrow 6x = 6{,}6 \Leftrightarrow x = 6{,}6 : 6 \Leftrightarrow x = 1{,}1\,m$$

$$\frac{Μήκος\ φτερού\ μοντέλου}{Μήκος\ εκπ.\ αεροπλάνου} = \frac{1}{6}$$

Συμβολίζουμε με y το μήκος του φτερού του μοντέλου.

$$\frac{y}{8} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6y = 1 \cdot 8 \Leftrightarrow 6y = 8 \Leftrightarrow y = 8 : 6 \Leftrightarrow y = 1{,}33\,m$$

3. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν λόγο $7 : 5$ και διαφορά 40.

Λύση:

Έστω ότι ο ένας αριθμός είναι α και ο άλλος β.

Άρα,

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και $\alpha - \beta = 40$.

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5}$ — *Αλλάζω θέση στους μέσους, για να προκύψουν ως ηγούμενοι οι αριθμοί α και β.*

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha-\beta}{7-5} = \frac{40}{2} = 20$ — *Εφαρμόζω την ιδιότητα των αναλογιών.*

Υπολογίζω τον αριθμό α:

$\frac{\alpha}{7} = 20 \Leftrightarrow \alpha = 140$

Υπολογίζω τον αριθμό β:

$\frac{\beta}{5} = 20 \Leftrightarrow \beta = 100$

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

   (α) $\frac{15}{4} = \frac{105}{\nu}$ (β) $\frac{\beta - 3}{16} = \frac{5}{8}$ (γ) $\frac{3}{4} = \frac{x}{x+3}$ (δ) $\frac{2}{\omega} = \frac{5}{\omega+6}$

2. Δύο πόλεις απέχουν μεταξύ τους $45\,km$. Να βρείτε την απόστασή τους σε χάρτη με κλίμακα $1 : 100\,000$.

3. Οι διαστάσεις μιας φωτογραφίας είναι $6\,cm$ μήκος και $8\,cm$ πλάτος. Θέλουμε να μεγεθύνουμε τη φωτογραφία, διατηρώντας σταθερό το λόγο του μήκους προς το πλάτος. Να βρείτε το μήκος της μεγέθυνσης, αν το πλάτος θα είναι $12\,cm$.

4. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$. Να βρείτε τους λόγους:

   (α) $\frac{x+y}{y}$ (β) $\frac{x+y}{x}$ (γ) $\frac{x+5}{y+6}$ (δ) $\frac{x}{5}$

5. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του y, ώστε να ισχύει $x + y = 64$.

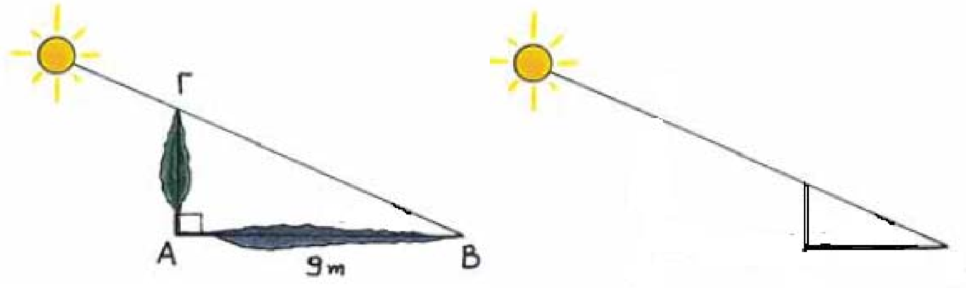
6. Ένας βιολόγος μελετά μικροοργανισμούς στο μικροσκόπιό του, το οποίο προσφέρει μεγέθυνση $250 : 1$.
   (α) Πόσα mm είναι το πραγματικό μήκος ενός μικροοργανισμού, που στο μικροσκόπιο φαίνεται ότι είναι $2\,cm$;
   (β) Πόσα cm θα είναι το μήκος ενός μικροοργανισμού στο μικροσκόπιο, όταν το πραγματικό του μήκος είναι $0{,}05\,mm$;

7. Τρεις ψαράδες αγόρασαν συνεταιρικά ένα καΐκι και τον εξοπλισμό του. Ο πρώτος έβαλε κεφάλαιο €6000, ο δεύτερος €10000 και ο τρίτος €4000. Μέσα σε ένα χρόνο, είχαν κέρδος €40000. Να βρείτε το μερίδιο από τα κέρδη που θα έχει ο καθένας από τους τρεις ψαράδες.

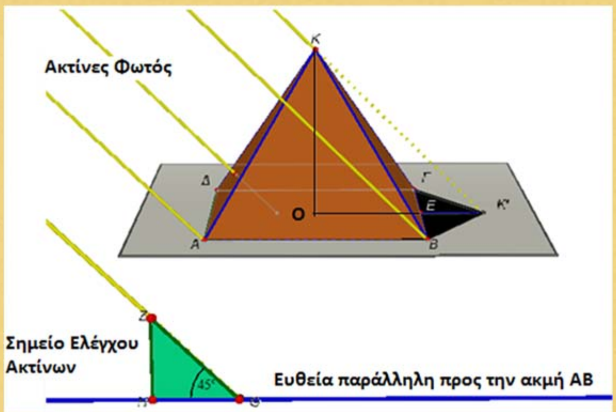
8. Ένα χρηματικό έπαθλο €150 μοιράστηκε στους πρώτους τρεις νικητές ενός διαγωνισμού σύμφωνα με τον αριθμό των σωστών απαντήσεων τους. Ο πρώτος απάντησε σωστά σε 12 ερωτήσεις, ο δεύτερος σε 10 και ο τρίτος σε 8. Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.

9. Τέσσερα άτομα, ο Δημήτρης, ο Άλκης, ο Βαγγέλης και ο Γιώργος, δούλεψαν σε μια εργολαβία και χρέωσαν €1600. Να βρείτε πόσες ώρες δούλεψε ο Δημήτρης, αν γνωρίζετε ότι ο Άλκης δούλεψε 6 ώρες, ο Βαγγέλης και ο Γιώργος από 8 ώρες και ότι ο Δημήτρης πήρε €720.

10. Ένας εργάτης του δήμου για να υπολογίσει το ύψος ενός κυπαρισσιού, τοποθέτησε ένα κοντάρι $1\ m$ στο έδαφος και μέτρησε τη σκιά του. Αν τη συγκεκριμένη στιγμή, η σκιά του κονταριού ήταν $1{,}5\ m$ και η σκιά του δέντρου ήταν $9\ m$, να τον βοηθήσετε να υπολογίσει το ύψος του κυπαρισσιού.



Ο αρχαίος Έλληνας ιστορικός Διογένης ο Λαέρτιος γράφει ότι ο Θαλής, κατά τη διάρκεια της παραμονής του στην Αίγυπτο, κατάφερε να μετρήσει το ύψος της τετραγωνικής Πυραμίδας του Χέοπα με τη βοήθεια της σκιάς της. Ο Θαλής πραγματοποίησε τη μέτρηση, παρατηρώντας το εξής: αν κάποια μέρα η σκιά του γινόταν ίση με το ύψος του, τότε το ίδιο θα συνέβαινε και με τη σκιά του ύψους της πυραμίδας. Άρα, το μεσημέρι μιας τέτοιας μέρας όπου η σκιά του Θαλή γινόταν ίση με το ύψος του, θα είχαμε, $\boldsymbol{OK' \perp B\Gamma}$,



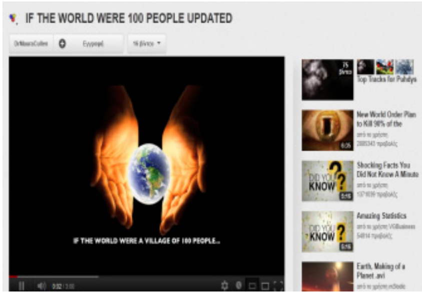
$$\boldsymbol{\Upsilon\psi o\varsigma\ \pi\upsilon\rho\alpha\mu i\delta\alpha\varsigma = KO = OK' = OE + EK' = \frac{AB}{2} + EK'},$$

Την εποχή της κατασκευής της, το 2560 π. Χ., η πυραμίδα του Χέοπα είχε ύψος 146,6 μέτρα. Για 3800 χρόνια ήταν το ψηλότερο μνημείο στον κόσμο. Σήμερα γνωρίζουμε ότι το ύψος της είναι 138,8 μέτρα, περίπου, αφού εκτός από καθίζηση έχει υποστεί και φθορές.

Στο βιβλίο – μυθιστόρημα *Το Θεώρημα του Παπαγάλου*, του Γάλλου συγγραφέα Denis Guedj, θα βρείτε μια ωραιότατη περιγραφή του πιο πάνω γεγονότος.

Ποσοστά

Εξερεύνηση



Ένα από τα πιο δημοφιλή μηνύματα που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο είναι ένα φιλμάκι που παρουσιάζει πώς θα ήταν η γη, αν ήταν ένα χωριό 100 μόνο κατοίκων.

Η αρχική ιδέα ήταν της δημοσιογράφου και καθηγήτριας του Πανεπιστημίου Donella Meadows, η οποία παρουσίασε τη μικρογραφία αυτή του κόσμου σε άρθρο της στο *The Global Citizen*, το 1990. Από τότε οι αλλαγές που σημειώθηκαν κατά τα τελευταία χρόνια είναι αξιοσημείωτες. Ο παγκόσμιος πληθυσμός έχει ήδη ξεπεράσει τα 7 000 000 000. Τα δεδομένα τώρα έχουν ως εξής:

Αν η γη ήταν ένα χωριό των 100 κατοίκων:

- *Εξήντα θα ήταν Ασιάτες (37 θα κατάγονταν από την Ινδία και την Κίνα), 15 θα ήταν Αφρικανοί, 11 θα ήταν Ευρωπαίοι και 14 από τη Βόρεια και Νότια Αμερική.*
- *Είκοσι έξι θα ήταν παιδιά και 74 ενήλικες από τους οποίους οι 8 θα ήταν πάνω από 65 χρονών.*
- *Ογδόντα τρεις μόνο θα μπορούσαν να γράφουν και να διαβάζουν ενώ 17 θα ήταν αναλφάβητοι.*
- *Ένας θα πέθαινε από την πείνα και άλλοι 15 θα υποσιτίζονταν, τη στιγμή που 21 θα ήταν παχύσαρκοι.*
- *Δεκατρείς δεν θα είχαν πρόσβαση σε καθαρό νερό.*

Sources: 2012 - Fritz Erickson, Provost and Vice President for Academic Affairs, Ferris State University (Formerly Dean of Professional and Graduate Studies, University of Wisconsin - Green Bay) and John A. Vonk, University of Northern Colorado, 2006; Returning Peace Corps Volunteers of Madison Wisconsin, *Unheard Voices: Celebrating Cultures from the Developing World*, 1992; Donella H. Meadows, *The Global Citizen*, May 31, 1990.

- ✓ Να σχολιάσετε γιατί το πιο πάνω άρθρο εντυπωσίασε και συνεχίζει να εντυπωσιάζει για τον τρόπο που επέλεξε η Meadows να παρουσιάσει τα δημογραφικά δεδομένα του πληθυσμού.

- ✓ Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσατε να παρουσιάσετε τα δημογραφικά δεδομένα της Κύπρου που συλλέχτηκαν κατά την απογραφή πληθυσμού του 2011 (Στατιστική Υπηρεσία, http://www.mof.gov.cy/cystat) με παρόμοιο τρόπο.

Αν η Κύπρος ήταν ένα χωριό των 100 κατοίκων, τότε …

Μαθαίνω

- Το σύμβολο $\alpha\%$ ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με το λόγο $\frac{\alpha}{100}$.

  Χρησιμοποιούμε επίσης το ποσοστό $\alpha‰$ *που διαβάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και είναι ίσο με το* $\frac{\alpha}{1000}$.

Παραδείγματα

1. Ο κύριος Ανδρέας αγόρασε ένα αυτοκίνητο και πλήρωσε €12000. Πλήρωσε επιπρόσθετα 30% της αξίας του αυτοκινήτου για διάφορες επιδιορθώσεις και ακόμα €400 για τις άδειες κυκλοφορίας. Στη συνέχεια το πώλησε για €13600. Να εξετάσετε αν ζήμιωσε ή αν κέρδισε και να υπολογίσετε το ποσοστό κέρδους / ζημίας;

   Λύση:
   Έξοδα για επιδιορθώσεις: 30% *της αξίας του.*
   Δηλαδή, 30% *του* $12000 = \frac{30}{100} \cdot 12000 = 3600$
   Άρα, ο κύριος Ανδρέας έδωσε: $12000 + 3600 + 400 = 16000$

   Ο κύριος Ανδρέας το πώλησε €13600. Άρα ζήμιωσε: $16000 - 13600 = 2400$ *ευρώ*

   Το ποσοστό που ζήμιωσε ήταν:

   <u>Α΄ τρόπος</u>

   $\frac{2400}{16000} \cdot 100\% = 15\%$

   Άρα, ζήμιωσε τελικά 15%

   <u>Β΄ τρόπος</u>

   $\frac{2400}{16000} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow 16000x = 2400 \cdot 100$
   $\Leftrightarrow x = \frac{2400 \cdot 100}{16000} \Leftrightarrow x = 15$
   Άρα, ζήμιωσε τελικά 15%

2. Η κατανάλωση του ηλεκτρικού ρεύματος μιας οικίας χρεώνεται με βάση το διπλανό πίνακα. Επιπλέον ο καταναλωτής χρεώνεται με μια σταθερή επιβάρυνση €4,85 και 15% Φ.Π.Α. Να υπολογίσετε πόσα θα πληρώσει ένας καταναλωτής που είχε συνολική κατανάλωση 385 KW.

Κατανάλωση σε KW	Χρέωση ανά KW
$0 - 120$	προς €0,23
$120 - 320$	προς €0,24
$320 - 400$	προς €0,25
$400 - 900$	προς €0,26
900 και άνω	προς €0,27

Λύση:

Υπολογίζουμε τη χρέωση ως εξής:

Κατανάλωση	Χρέωση
Για τις πρώτες 120 KW	$120 \cdot 0{,}23 = 27{,}60$
Για τις επόμενες 200 KW	$200 \cdot 0{,}24 = 48{,}00$
Οι υπόλοιπες 65 KW	$65 \cdot 0{,}25 = 16{,}25$
Σταθερή επιβάρυνση	4,85
ΣΥΝΟΛΟ	**96,70**

Α΄ τρόπος:

Στην χρέωση θα προστεθεί το Φ.Π.Α. , δηλαδή το 15% του €96,70

$\frac{15}{100} \cdot 96{,}70 = 14{,}505$

Άρα το συνολικό ποσό που πρέπει να πληρώσει ο καταναλωτής είναι:

$$96{,}70 + 14{,}505 = 111{,}205$$

Η χρέωση στρογγυλοποιείται σε δύο δεκαδικά ψηφία, άρα στον λογαριασμό θα αναγράφεται €111,21

Β΄ τρόπος:

Στη χρέωση θα προστεθεί το Φ.Π.Α. 15%, δηλαδή σε μια χρέωση €100, θα προστεθεί €15 άρα η συνολική χρέωση θα είναι €115. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αναλογίας μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο θα είναι η συνολική χρέωση για το ποσό των €96,70 Άρα,

Χρέωση (σε €)	*Φ.Π.Α. (σε €)*	*Συνολική χρέωση (σε €)*
100	15	115
96,70		x

$$\frac{100}{96{,}70} = \frac{115}{x} \quad \Leftrightarrow 100x = 115 \cdot 96{,}70 \quad \Leftrightarrow x = \frac{115 \cdot 96{,}70}{100} \quad \Leftrightarrow x = 111{,}205$$

Η χρέωση στρογγυλοποιείται σε δύο δεκαδικά ψηφία, άρα στον λογαριασμό θα αναγράφεται €111,21

3. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα το ποσόν των €2300 και μετά 1 χρόνο έκανε ανάληψη των χρημάτων και πήρε €2470. Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε το συγκεκριμένο κεφάλαιο;

> ***Επιτόκιο*** είναι το ποσοστό % που η τράπεζα χρεώνει στο δανεισμό ή πιστώνει στις καταθέσεις.

Λύση:

Το ποσόν που κατατέθηκε στην τράπεζα: $ΚΕΦΑΛΑΙΟ(Κ) = €2300$

Το ποσόν έγινε μετά από 1 χρόνο: $ΚΕΦΑΛΑΙΟ(Κ) + ΤΟΚΟΣ(Τ) = €2415$

Άρα $ΤΟΚΟΣ = 2415 - 2300 = 115$

$$115 = Ε \cdot 2300$$
$$\Leftrightarrow 115 = 2300\,Ε$$
$$\Leftrightarrow Ε = 115 : 2300$$
$$\Leftrightarrow Ε = 0{,}05 = \frac{5}{100} = 5\%$$

Το Επιτόκιο της τράπεζας είναι 5%.

Δραστηριότητες

1. Σε ένα γυμνάσιο το 25% των μαθητών είναι Α΄ Γυμνασίου και το 35% είναι Β΄ Γυμνασίου. Πόσα είναι οι μαθητές της Γ΄ τάξης , αν όλοι οι μαθητές είναι 480;

2. Ένα κατάστημα προσφέρει 25% έκπτωση στην αρχική τιμή σε όλα τα προϊόντα του. Να υπολογίσετε την τελική τιμή ενός προϊόντος αν η αρχική του τιμή είναι €120.

3. Σε έρευνα της τροχαίας στα 450 αυτοκίνητα οι 90 οδηγοί δε φορούσαν ζώνη και στις 280 μηχανές το 25% των οδηγών δεν φορούσε κράνος.
   (α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών των αυτοκινήτων που φορούσε ζώνη ασφαλείας
   (β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των μοτοσικλετιστών που δεν φορούσαν κράνος.
   (γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών που παρανομούσαν επί του συνόλου των οδηγών.

4. Ο κύριος Μανώλης πήρε αύξηση στο μισθό του. Να υπολογίσετε το ποσοστό αύξησης του μισθού του αν από €900 έγινε €990;

5. Σ' ένα σχολείο 400 μαθητών είχαμε 352 επιτυχόντες στα Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (Α.Ε.Ι.) την χρονιά που πέρασε ενώ σ' ένα άλλο σχολείο 250 μαθητών είχαμε 132 επιτυχόντες. Σε ποιο σχολείο είχαμε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας;

6. Μια οικογένεια έχει μηνιαία έξοδα €1200, τα οποία ξοδεύει, όπως φαίνεται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.
   (α) Να υπολογίσετε πόσα χρήματα ξοδεύει η οικογένεια για τις σπουδές των παιδιών της.
   (β) Να βρείτε τον λόγο των χρημάτων που ξοδεύει για ενοίκιο προς τα χρήματα που ξοδεύει για διασκέδαση.

7. Μια κτηματική εταιρεία αγόρασε ένα διατηρητέο σπίτι για €90000. Πλήρωσε επιπλέον €40000 για την ανακαίνιση του. Το κράτος επιχορηγεί το συνολικό κόστος με 35%. Πόσα χρήματα επέστρεψε το κράτος στην εταιρεία.

8. Σε μία πόλη οι γεννήσεις φέτος ανήλθαν στο 3% του πληθυσμού, ενώ οι θάνατοι στο 1%. Αν ο πληθυσμός στο τέλος της χρονιάς αυξήθηκε κατά 400 άτομα, να βρείτε πόσους κατοίκους είχε η πόλη στην αρχή της χρονιάς.

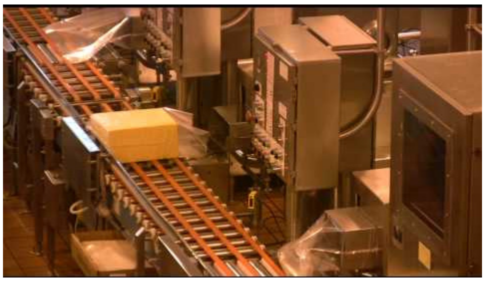
9. Τον Απρίλιο διοργανώθηκε μία εκδρομή στην Αθήνα, της οποίας τα έσοδα δόθηκαν για ενίσχυση του ταμείου του Ραδιομαραθωνίου. Το κανονικό εισιτήριο ήταν €400, ενώ για τους συνταξιούχους ήταν €320 και για τα παιδιά €250.
   (α) Να βρείτε τι ποσοστό έκπτωσης έγινε στο εισιτήριο των συνταξιούχων.
   (β) Συνολικά ταξίδεψαν 50 άτομα, από τα οποία το 20% ήταν συνταξιούχοι. Να βρείτε πόσοι συνταξιούχοι και πόσα παιδιά ταξίδεψαν, αν γνωρίζετε ότι εισπράχθηκε συνολικά από όλους τους επιβάτες το ποσό των €17700.

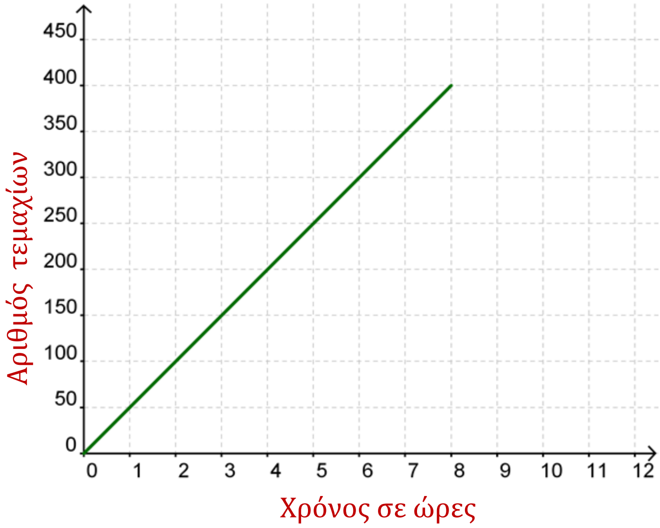
10. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα το ποσόν των €22000 και μετά από 1 χρόνο έκανε ανάληψη των χρημάτων και πήρε €22880. Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε το συγκεκριμένο κεφάλαιο;

Ευθέως Ανάλογα Ποσά

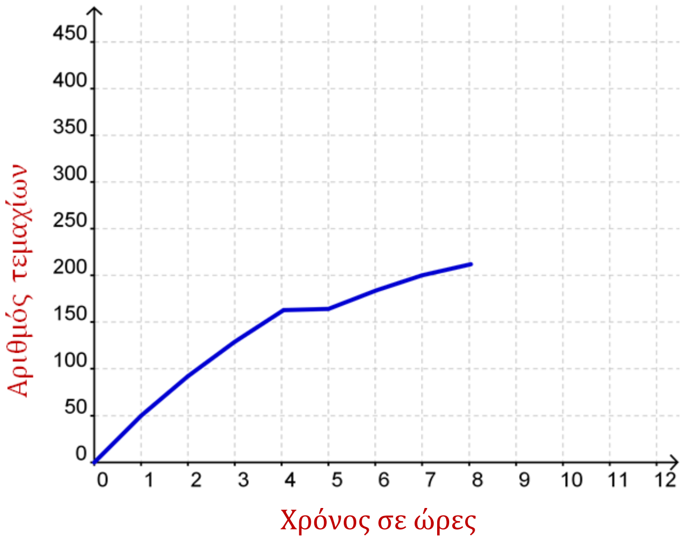
Εξερεύνηση

Μια ηλεκτρονική μηχανή συσκευάζει αεροστεγώς τα προϊόντα ενός τυροκομείου. Η απόδοση της μηχανής φαίνεται στη διπλανή γραφική παράσταση.





Κατά τη διάρκεια της παραγωγής, η μηχανή βγήκε εκτός λειτουργίας. Ένας εργάτης συνέχιζε να συσκευάζει τα προϊόντα με τη χειροκίνητη μηχανή. Πιο κάτω φαίνεται η απόδοση του εργάτη.



✓ Να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Διερεύνηση (1)

Με βάση τη γραφική παράσταση, που παριστάνει την απόδοση της ηλεκτρονικής μηχανής, να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα:

- ✓ Αν η μηχανή συνέχιζε τη λειτουργία της για ακόμη μια ώρα, πόσα τεμάχια θα είχε συσκευάσει;
- ✓ Να γράψετε τη σχέση που συνδέει το χρόνο λειτουργίας με την απόδοση σε τεμάχια της ηλεκτρονικής μηχανής.

Χρόνος σε ώρες	Απόδοση σε τεμάχια
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Διερεύνηση (2)

Η Μαρίλια σπουδάζει βρεφονηπιοκόμος. Στον ελεύθερο της χρόνο ενδιαφέρεται να προσέχει παιδιά. Μια μέρα διάβασε στην εφημερίδα την αγγελία που φαίνεται δίπλα και αποτάθηκε στην οικογένεια Κωνσταντινίδη για εργοδότηση.

Ζητείται

Η οικογένεια Κ. Κωνσταντινίδη, από τη Λευκωσία, ζητά να προσλάβει κοπέλα για να φροντίζει τα δύο της παιδιά. Προσόντα: Υπεύθυνο άτομο και να αγαπά τα παιδιά.

Αμοιβή 6 ευρώ την ώρα.

- ✓ Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
- ✓ Να εξετάσετε τον τρόπο που μεταβάλλονται τα ποσά χρόνος και αμοιβή.
- ✓ Να γράψετε το λόγο δύο τιμών του χρόνου εργασίας και να τον συγκρίνετε με το λόγο των δύο αντίστοιχων τιμών της αμοιβής. Τι παρατηρείτε;

Χρόνος εργασίας σε ώρες x	Αμοιβή σε ευρώ y
2	
4	
	36
	60

✓ Να παραστήσετε σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) του πίνακα, να κάνετε τη γραφική παράσταση και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

✓ Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση, αν η αμοιβή της Μαρίλιας ήταν 8 ευρώ την ώρα. Να συγκρίνετε τις δύο γραφικές παραστάσεις.

Μαθαίνω

- Δύο ποσά ονομάζονται **ευθέως ανάλογα** ή απλά **ανάλογα** όταν οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν πάντα το ίδιο πηλίκο.

  Δηλαδή, $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι **ανάλογα** $\Leftrightarrow$ $\frac{y}{x} = \boldsymbol{\alpha}$, όπου α σταθερός αριθμός.

  Ο σταθερός αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ λέγεται **συντελεστής της αναλογίας**.

- Στα ανάλογα ποσά ισχύει ότι:
  - **πολλαπλασιάζοντας (ή διαιρώντας)** τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού **πολλαπλασιάζονται (ή διαιρούνται)** αντίστοιχα με **τον ίδιο αριθμό.**

    Παράδειγμα:
    Ο διπλασιασμός, του ενός ποσού, επιφέρει τον διπλασιασμό του άλλου ποσού.

  - **ο λόγος** δύο τιμών του ενός ποσού είναι **ίσος** με το λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.

- Αν ισχύει μια από τις πιο πάνω σχέσεις μεταξύ δύο ποσών, τότε τα ποσά είναι ανάλογα.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα είναι ανάλογα. Αν είναι ανάλογα, να βρείτε το συντελεστή της αναλογίας.

κ	0,9	1,2	1,8	3,3
λ	3	4	6	11

Λύση:

Εξετάζουμε τους λόγους $\frac{\kappa}{\lambda}$:

$\frac{0,9}{3} = 0,3$
$\frac{1,2}{4} = 0,3$
$\frac{1,8}{6} = 0,3$
$\frac{3,3}{11} = 0,3$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{\kappa}{\lambda}$ *των αντίστοιχων τιμών είναι σταθερός, άρα τα ποσά είναι ανάλογα. Ο συντελεστής της αναλογίας είναι το* $0,3$.

2. Ένας γεωργός, θέλει να ψεκάσει μια καλλιέργεια λαχανικών. Η δοσολογία για το φυτοφάρμακο που θα χρησιμοποιήσει είναι για κάθε $20\ ml$ φυτοφάρμακο $80\ l$ νερό. Να βρείτε πόσα λίτρα νερό θα χρησιμοποιήσει, για να φτιάξει διάλυμα στο οποίο θα διαλύσει δύο συσκευασίες φυτοφαρμάκου των $30\ ml$.

Λύση:
Τα ποσά είναι ευθέως ανάλογα, γιατί όταν οι τιμές του ενός ποσού (Ποσότητας φαρμάκου) πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού (Ποσότητας νερού) πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Άρα, οι αντίστοιχες τιμές που παίρνουν πρέπει να έχουν πάντα το ίδιο πηλίκο (Ποσότητα φυτοφαρμάκου : Ποσότητα νερού).
Έστω ότι η άγνωστη ποσότητα του νερού είναι x.

Ποσότητα φυτοφαρμάκου	Ποσότητα νερού
20	80
$2 \cdot 30 = 60$	x
Ευθέως ανάλογα ποσά	

$\frac{20}{80} = \frac{60}{x} \Leftrightarrow 20x = 60 \cdot 80 \Leftrightarrow 20x = 4800 \Leftrightarrow x = 240$

Θα χρησιμοποιήσει 240 *λίτρα νερό.*

3. Τον Αύγουστο ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών προσφέρει στους πελάτες του 40% έκπτωση.
   (α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει την αρχική τιμή πώλησης πριν τις εκπτώσεις με την αναγραφόμενη τιμή κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων.
   (β) Να βρείτε την αρχική τιμή πώλησης μιας τηλεόρασης που πωλήθηκε κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων €360.

Λύση:

(α) *Αφού η έκπτωση είναι 40%, τα διάφορα ηλεκτρικά είδη θα πωλούνται στο 60% της αρχικής τους τιμής.*
Η αρχική τιμή πώλησης και η τιμή πώλησης κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων είναι ποσά ανάλογα.
Θέτουμε:
y: *την αρχική τιμή πώλησης*
x: *την τιμή πώλησης κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων*

$$\frac{y}{x} = \frac{60}{100} \Longrightarrow y = 0{,}6 \cdot x$$

(β) $360 = 0{,}6 \cdot x \iff x = 360 : 0{,}6 \iff x = 600.$

Άρα η αρχική τιμή πώλησης πριν τις εκπτώσεις ήταν €600.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας με τις τιμές δύο ποσών A και B. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά είναι ευθέως ανάλογα και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(α)

A	B
6	90
12	45

(β)

A	B
5	7
10	28

(γ)

A	B
9	21
12	28

2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά x και y που δίνονται στους πιο κάτω πίνακες είναι ανάλογα:

(α)

x	1	2	3	5
y	5	6	7	8

(β)

x	2	3	5	8
y	14	21	35	56

Αν τα ποσά είναι ανάλογα, να γράψετε τη σχέση που τα συνδέει.

3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω ζεύγη ποσών είναι ανάλογα:

(α) Η περίμετρος ενός τετραγώνου και το μήκος της πλευράς του.

(β) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου και το μήκος της πλευράς του.

(γ) Η τιμή ενός υφάσματος και το μήκος του.

(δ) Η παροχή νερού μίας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται η βρύση για να γεμίσει μια δεξαμενή.

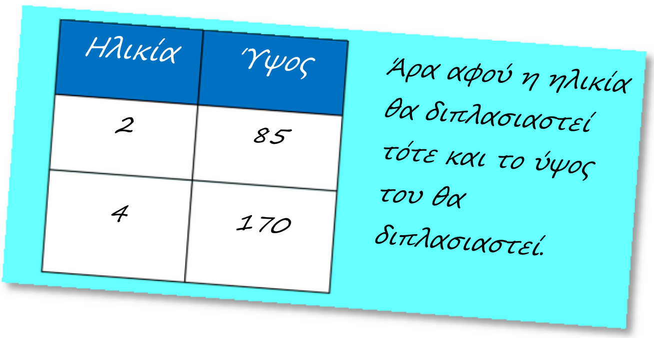
(ε) Η αμοιβή ενός ωρομίσθιου εργάτη και ο χρόνος εργασίας του.

(στ) Το ύψος ενός ανθρώπου και το βάρος του.

4. Αν γνωρίζουμε ότι 120 γραμμάρια άσπρου ψωμιού περιέχουν 125 θερμίδες, να υπολογίσετε πόσες θερμίδες πήρε ο Κωνσταντίνος από τα 300 γραμμάρια ψωμιού που έφαγε με το φαγητό του;

5. Ο Αλέξης είναι σήμερα δύο χρονών και έχει ύψος 85 cm. Ο αδελφός του υπολόγισε ότι, όταν θα γίνει ο Αλέξης 4 χρονών, θα έχει ύψος 1,70 cm.

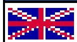
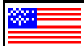
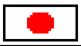
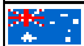
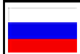
Να ελέγξετε την ορθότητα της απάντησής του.



6. Μια κλωστοϋφαντουργική μηχανή παράγει 16 km νήμα σε 8 ώρες. Σε πόσες ημέρες θα παραχθούν 500 km νήμα, αν η μηχανή θα λειτουργεί 10 ώρες κάθε ημέρα;

7. Το κρασί που μας δίνει κάποια συγκεκριμένη ποικιλία σταφυλιού είναι το 60% της μάζας τους.
   (α) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τη μάζα των σταφυλιών (x) με τη ποσότητα του κρασιού (y) σε κιλά.
   (β) Να υπολογίσετε πόσα κιλά κρασί θα πάρουμε από 1800 kg σταφύλια.
   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση.

8. Ο κύριος Ανδρέας θα ταξιδεύσει στις Η.Π.Α., για να επισκεφτεί μια έκθεση για μηχανήματα. Υπολόγισε ότι θα χρειαστεί €1500 για το ξενοδοχείο και τα διπλάσια λεφτά για τα προσωπικά του έξοδα.

Τιμές Συναλλάγματος σε σχέση με το €			
	GBP	Αγγλική Λίρα	0,85
	USD	Δολάριο Αμερικής	1,30
	JPY	Ιαπωνικό Γεν	100,30
	CHF	Φράγκο Ελβετίας	1,21
	CAD	Δολάριο Καναδά	1,34
	AUD	Δολάριο Αυστραλίας	1,42
	RUB	Ρωσικό Ρούβλι	45,15
	CNY	Κινέζικο Γιουάν	9,25

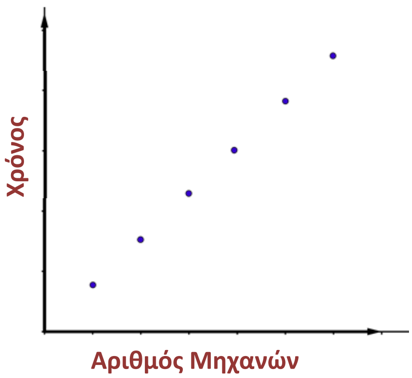
   (α) Πόσο συνάλλαγμα σε δολάρια θα χρειαστεί να πάρει μαζί του;
   (β) Η κόρη του ζήτησε να της αγοράσει από τις Η.Π.Α. ένα βιντεοπαιχνίδι, το οποίο πωλείται στην Κύπρο προς €90. Σε ποια τιμή πρέπει να το βρει ο κ. Ανδρέας, για να συμφέρει να το αγοράσει;

Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

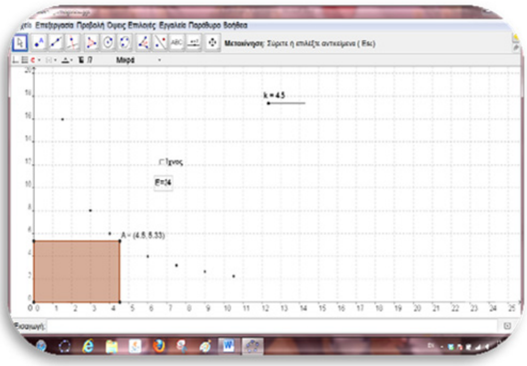
Εξερεύνηση

Ένα εργοστάσιο έχει στη γραμμή παραγωγής του ένα συγκεκριμένο αριθμό μηχανών της ίδιας δυναμικότητας, οι οποίες δουλεύουν ανεξάρτητα. Ο υπεύθυνος παραγωγής θέλει να προγραμματίσει την παραγωγή, ώστε να παραδώσει μια συγκεκριμένη παραγγελία στην ημερομηνία που προνοεί το συμβόλαιο παράδοσής της. Ο υπεύθυνος έχει τη δυνατότητα να θέτει σε λειτουργία διαφορετικό αριθμό μηχανών.

✓ Ποια από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνει το χρόνο ολοκλήρωσης της παραγγελίας σε σχέση με τον αριθμό των μηχανών που τίθενται σε λειτουργία;



Διερεύνηση (1)



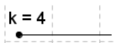
Στο εφαρμογίδιο «A_En9_Emvadon_orthogoniou.ggb» δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με σταθερό εμβαδόν 24 cm^2. Η σταθερή κορυφή του είναι στο σημείο $O(0,0)$. Η κορυφή A είναι απέναντι από το σταθερό σημείο O.

✓ Να συμπληρώστε τον πίνακα:

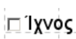
Μήκος ορθογωνίου x	Πλάτος ορθογωνίου y	Εμβαδόν ορθογωνίου	Συντεταγμένες κορυφής $A(x,y)$
1		24	
	12	24	
	8	24	
4		24	
	3	24	
	2	24	

✓ Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες της κορυφής A.

✓ Να γράψετε το λόγο δύο τιμών του μήκους x και να τον συγκρίνετε με το λόγο των δύο αντιστοιχών τιμών του πλάτους y. Τι παρατηρείτε;

✓ Να μετακινήσετε το δρομέα κ 

και να παρατηρήσετε τις διάφορες θέσεις που παίρνει η κορυφή A.

✓ Να επιλέξετε το εικονίδιο 

και να παρατηρήσετε τη γραφική παράσταση που σχηματίζεται.

Μαθαίνω

- Δύο ποσά ονομάζονται **αντιστρόφως ανάλογα** όταν το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι πάντα σταθερό.
  Δηλαδή,
  $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ είναι **αντιστρόφως ανάλογα** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{y\cdot x=\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$, όπου α σταθερός αριθμός.

- Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά ισχύει ότι:

  - όταν **πολλαπλασιάζονται** οι τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού **διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό**.

    Παράδειγμα:
    Ο διπλασιασμός του ενός ποσού, επιφέρει τον υποδιπλασιασμό του άλλου ποσού.

  - ο **λόγος** δύο τιμών του ενός ποσού είναι **ίσος με τον αντίστροφο** λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.

- Αν ισχύει μια από τις πιο πάνω σχέσεις μεταξύ δύο ποσών, τότε τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο τα ποσά που δίνονται στον πιο κάτω πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

Λύση:
Υπολογίζουμε τα γινόμενα $x\cdot y$ των αντίστοιχων τιμών:
$1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6=24$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $x\cdot y$ των αντίστοιχων τιμών είναι σταθερό. Άρα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

2. Σε ένα εργοστάσιο 12 μηχανές είναι σε λειτουργία 15 ώρες για να ολοκληρώσουν την ημερήσια παραγωγή η οποία είναι σταθερή. Αν μια συγκεκριμένη ημέρα 2 μηχανές θα είναι εκτός λειτουργίας για συντήρηση, πόσες ώρες πρέπει να δουλέψουν οι υπόλοιπες μηχανές, για να μην επηρεαστεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου;

Λύση:

Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, γιατί όταν οι τιμές του ενός ποσού (αριθμός μηχανών) πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού (ώρες) διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.

Άρα, οι αντίστοιχες τιμές που παίρνουν πρέπει να έχουν πάντα το ίδιο γινόμενο (Αριθμός Μηχανών · Ώρες).

Αριθμός Μηχανών	*Ώρες*
12	15
$12-2=10$	x
Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	

$$10x = 12 \cdot 15 \iff 10x = 180 \iff x = 18$$

Οι υπόλοιπες μηχανές πρέπει να δουλέψουν 18 ώρες.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας με τις τιμές δύο ποσών, A και B. Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

(α)

A	B
6	90
18	45

(β)

A	B
12	30
36	10

(γ)

A	B
6	18
9	27

2. Κατά τη διάρκεια των υποβρύχιων ελέγχων σε ένα μέρος ενός ωκεανού, μια επιστημονική ομάδα παρατήρησε ότι η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^\circ C$) είναι αντιστρόφως ανάλογη του βάθους σε χιλιόμετρα (km). Όταν κατέγραψαν θερμοκρασία $6^\circ C$, οι δύτες βρίσκονταν σε βάθος $4km$ κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.
   (α) Να βρείτε την θερμοκρασία αν θα καταδυθούν σε βάθος $8km$.
   (β) Σε ποιο βάθος θα πρέπει να καταδυθούν για να καταγράψουν θερμοκρασία $2^\circ C$;

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, ώστε τα ποσά να είναι αντιστρόφως ανάλογα.

x	1	2		12
y	40		8	

4. Ο Απόστολος παρατήρησε ότι όσο πιο πολύ χρόνο αφιερώνει στην παρακολούθηση τηλεόρασης τόσο λιγότερο χρόνο αφιερώνει για την καθημερινή μελέτη των μαθημάτων του. Τη Δευτέρα είδε τηλεόραση για 1,5 ώρα, και διάβασε για άλλη 1,5 ώρα. Την Τρίτη είδε τηλεόραση 2 ώρες και διάβασε μόνο 1 ώρα και την Τετάρτη είδε μόνο μισή ώρα τηλεόραση και διάβασε 2,5 ώρες. Με βάση τα δεδομένα αυτά, ο Απόστολος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο χρόνος που βλέπει τηλεόραση και ο χρόνος που αφιερώνει για διάβασμα καθημερινά είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Έχει δίκιο ή όχι και γιατί;

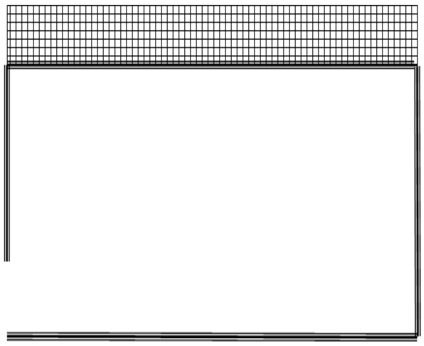
5. Τέσσερα ίδια εμπορικά αυτοκίνητα διανομής κάνουν καθημερινά εννιά δρομολόγια το καθένα, για να μεταφέρουν 1000 κιβώτια με προϊόντα, από το εργοστάσιο στην αποθήκη. Πόσα τέτοια δρομολόγια θα κάνει το κάθε ένα από δώδεκα αυτοκίνητα του ίδιου τύπου, για να μεταφέρουν τον ίδιο αριθμό κιβωτίων σε μια μέρα;

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Ένα αρχιτεκτονικό σχέδιο κατασκευάστηκε με κλίμακα $1 : 100$. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου δωματίου στο σχέδιο είναι $3\ cm$ πλάτος και $5\ cm$ μήκος, να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του δωματίου.

2. Τι ποσοστό από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$ είναι τετράγωνοι αριθμοί;

3. Να επιλέξετε τη θέση που θα τοποθετήσετε τα έπιπλα στο δωμάτιό σας και ακολούθως να τα σχεδιάσετε στο αρχιτεκτονικό σχέδιο του δωματίου, που είναι σχεδιασμένο με κλίμακα $1: 100$. Οι διαστάσεις των επίπλων είναι:
   - **Κρεβάτι** $2{,}20\ m\ x\ 1{,}10\ m$
   - **Κομοδίνο** $65\ cm\ x\ 65\ cm$
   - **Γραφείο** $1{,}20\ m\ x\ 0{,}75\ m$



4. Δίνεται η αναλογία $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{5}$. Να βρείτε τους λόγους:

   (α) $\frac{\alpha}{\beta}$ (β) $\frac{\alpha-3}{3}$ (γ) $\frac{\beta+5}{5}$ (δ) $\frac{\alpha+\beta}{8}$

5. Το σωματείο της γειτονιάς έκδωσε και πώλησε λαχνούς των €100 για την ανέγερση του οικήματος του. Οι λαχνοί συμμετέχουν σε κλήρωση με μεγάλο έπαθλο €5000 και άλλα πλούσια δώρα. Τρεις φίλοι έδωσαν το ποσό €20, €30 και €50 αντίστοιχα και αγόρασαν ένα λαχνό των €100. Να υπολογίσετε τι ποσό πρέπει να πάρει ο καθένας τους αν κερδίσουν το μεγάλο έπαθλο;

6. Οι υπάλληλοι που δουλεύουν σε μια υπεραγορά δικαιούνται έκπτωση 20% στις αγορές τους στα είδη του αρτοποιείου. Πόσα θα πληρώσει ένας υπάλληλος της υπεραγοράς, αν αγόρασε είδη αρτοποιείου αξίας €32,50;

7. Ένας έμπορος αγόρασε 20 στερεοφωνικά προς €240 το ένα και πλήρωσε 10% της συνολικής αξίας τους για έξοδα μεταφοράς. Θέλει να τα πουλήσει με 20% κέρδος. Πόσα θα εισπράξει συνολικά;

8. Τρεις τεχνίτες πήραν από μια εργασία €3240. Ο πρώτος ως εργοδηγός πήρε το 20% του ποσού και τα υπόλοιπα μοιράστηκαν ανάλογα προς τις ημέρες εργασίας αυτών. Αν ο πρώτος εργάστηκε 15 ημέρες ο δεύτερος 12 ημέρες και ο τρίτος 18 ημέρες. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

9. Μια χορηγία €36000 του Δήμου θα μοιραστεί στα σχολεία της περιφέρειας, ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών τους. Το A έχει 300, το B 350 και το Γ 550 παιδιά. Το μεγαλύτερο σχολείο αποφάσισε να δωρίσει το 20% των χρημάτων που θα πάρει σε ένα σχολείο της Κένυας. Να υπολογίσετε τι ποσό θα κρατήσει το σχολείο.

10. Στις τελευταίες δημοτικές εκλογές από τα 3000 άτομα που ήταν γραμμένα στους εκλογικούς καταλόγους μιας κοινότητας, ψήφισαν το 85%. Να βρείτε πόσους ψήφους πήρε ο εκλεγμένος δήμαρχος, αν τον ψήφισε το 60% των ατόμων που ψήφισαν.

11. Αν ένα ποσό y είναι ανάλογο κάποιου άλλου ποσού x, και διπλασιάσουμε το ένα ποσό, τότε το άλλο ποσό θα το:

    (α) πολλαπλασιάσουμε με 2 (β) διαιρέσουμε με 2 (γ) πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{2}$

12. Τα ποσά x και y είναι ανάλογα.

    (α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	2	4		
y		4		12	20

    (β) Να βρείτε το συντελεστή αναλογίας και να γράψετε τη σχέση που συνδέει το y με το x.

    (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της πιο πάνω σχέσης – συνάρτησης.

13. Ο καφές χάνει το $\frac{1}{6}$ του βάρους του, όταν καβουρδιστεί. Πόσα κιλά καφέ χρειαζόμαστε για να πάρουμε 2 kg καβουρδισμένου καφέ;

14. Ένα σύστημα αυτόματου ποτίσματος παίρνει νερό από μια δεξαμενή. Αν το σύστημα λειτουργεί 3 ώρες την ημέρα, το νερό της δεξαμενής επαρκεί για 30 ημέρες. Αν το σύστημα λειτουργεί για 5 ώρες την ημέρα, για πόσες ημέρες επαρκεί το νερό της δεξαμενής;

15. Ένας μελισσοκόμος μπορεί να τοποθετήσει το μέλι του σε 200 βάζα των 450 gr το καθένα.
    (α) Αν χρησιμοποιήσει βάζα των 750 gr το καθένα, πόσα βάζα θα χρειαστεί;
    (β) Αν κάθε βάζο των 450 gr κοστίζει 50 $σεντ$ και κάθε βάζο των 750 gr κοστίζει 75 $σεντ$, ποια συσκευασία συμφέρει να χρησιμοποιήσει;

16. Ο Αλέξανδρος υποστηρίζει ότι η μάζα του ανθρώπου είναι ανάλογη του ύψους του. Κατέγραψε στον πιο κάτω πίνακα τη μάζα και το ύψος τεσσάρων συμμαθητών του. Να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τον ισχυρισμό του Αλέξανδρου. Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

Μάζα σε kg	58	71	56	68
Ύψος σε m	1,60	1,65	1,62	1,72

17. Η Ελένη διάβασε σε ένα άρθρο ότι ένα άτομο, πάνω από 30 χρονών, χάνει περίπου 0,06 cm από το ύψος του κάθε χρόνο.
    (α) Αν ο ογδοντάχρονος παππούς της Ελένης έχει ύψος 1,76 cm, ποιο θα ήταν το ύψος του παππού, όταν ήταν 30 χρονών.
    (β) Ο θείος της Εβελίνας, ο Νικόλας, είναι 30 χρονών και έχει ύψος 1,80 cm. Με βάση τα στοιχεία του άρθρου, να υπολογίσετε πόσο ύψος θα έχει, όταν θα γίνει 55 χρόνων.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Το Δημοτικό Συμβούλιο της πόλης, έχει εγκαταστήσει στην είσοδο της πόλης μια πινακίδα που καλωσορίζει τον επισκέπτη και δείχνει το ποσοστό των οδηγών που οδηγούν εντός του ορίου ταχύτητας.

   (α) Γιατί νομίζετε ότι το συμβούλιο χρησιμοποίησε αυτό τον τρόπο για να αναπτύξει την οδική συνείδηση; Γιατί επέλεξαν ο πίνακας να δείχνει το ποσοστό των οδηγών που τηρούν το όριο και όχι αυτών που παρανομούν;

   (β) Πώς θα μπορούσε να περιγραφεί, χρησιμοποιώντας μικρότερους αριθμούς, το πλήθος των οδηγών που τηρούν το όριο ταχύτητας σε σχέση με το συνολικό πλήθος των οδηγών που πέρασαν από το σημείο;

   (γ) Υποθέτουμε ότι το επόμενο αυτοκίνητο που περνά από την κάμερα τρέχει με μεγαλύτερη ταχύτητα από την επιτρεπόμενη. Το ποσοστό θα αυξηθεί ή θα μειωθεί; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα ποσά x και y είναι μια ημιευθεία με αρχή το σημείο $O(0,0)$. Αν το σημείο $(2,10)$ είναι σημείο της πιο πάνω ημιευθείας:

   (α) Να εξηγήσετε γιατί τα ποσά x και y είναι ανάλογα και να βρείτε τον συντελεστή αναλογίας.

   (β) Να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα ποσά x και y και να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	1	3	
y			20

   (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα ποσά x και y.

3. Μια υπεραγορά πωλούσε το ψωμί προς 110 $σεντ$. Τη συγκεκριμένη μέρα εισέπραξε €171,60 από την πώληση των ψωμιών. Να βρείτε πόσα κιλά σιτάρι χρησιμοποιήθηκαν, για να παρασκευαστεί η ποσότητα της ημέρας αυτής, αν γνωρίζουμε ότι 100 κιλά σιτάρι δίνουν 80 kg αλεύρι και 100 kg αλεύρι δίνουν 130 ψωμιά.

4. Η Άννα είχε 10 ψηφιακούς δίσκους στη συλλογή της και η Ραφαέλα 16. Η Άννα αγόρασε x ψηφιακούς δίσκους και η Ραφαέλα y. Να βρείτε δύο δυνατές τιμές για τα x και y, αν γνωρίζουμε ότι ο λόγος των ψηφιακών δίσκων της Άννας προς τους δίσκους της Ραφαέλας παρέμεινε σταθερός. Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

5. Σε μια ισορροπημένη εφηβική διατροφή, η αναλογία υδατανθράκων προς πρωτεΐνες πρέπει να είναι $2:3$, ενώ η αναλογία λιπών προς υδατάνθρακες πρέπει να είναι $1:4$. Κάθε γραμμάριο λίπους είναι 10 θερμίδες, κάθε γραμμάριο υδατανθράκων είναι 4 θερμίδες και κάθε γραμμάριο πρωτεΐνης είναι 4 θερμίδες. Αν ένας έφηβος θέλει να παίρνει 2500 θερμίδες την ημέρα, πως θα φτιάξει το διαιτολόγιο του;

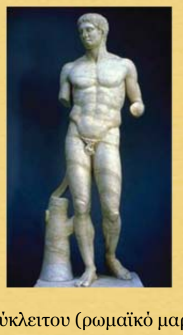
6. Η συχνότητα f του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του μήκους του κύματος w. Ένας συγκεκριμένος ήχος έχει συχνότητα $f = 36\ hertz$ και μήκος κύματος $w = 20{,}25\ m$. Να υπολογίσετε την συχνότητα f, όταν η αριθμητική τιμή της συχνότητας (f) είναι η ίδια με την αριθμητική τιμή του μήκους του κύματος (w).

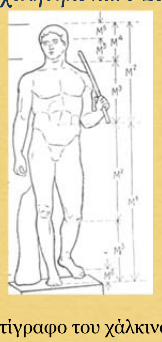
7. Η καρέκλα $Hill\ House\ 1$ κατασκευάστηκε το 1903 και θεωρείται ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα στην ιστορία των επίπλων. Η μινιατούρα της καρέκλας αυτής έχει ύψος $23{,}4\ cm$, βάθος $6{,}1\ cm$ και πλάτος $6{,}7\ cm$. Για την κατασκευή της χρησιμοποιήθηκε κλίμακα $1 : 6$.

   (α) Να υπολογίσετε τις πραγματικές διαστάσεις της καρέκλας $Hill\ House\ 1$.
   (β) Μια άλλη μινιατούρα της ίδιας καρέκλας κατασκευάστηκε από άλλο εργοστάσιο αρχικά με κλίμακα $1 : 2$. Στη συνέχεια το εργοστάσιο χρησιμοποίησε την ίδια κλίμακα, για να φτιάξει μοντέλο της πρώτης μινιατούρας. Η ίδια διαδικασία εφαρμόστηκε τρεις φορές. Να συγκρίνετε τις διαστάσεις του τελευταίου μοντέλου της καρέκλας που κατασκεύασε το εργοστάσιο αυτό με τη μινιατούρα που κατασκεύασε το πρώτο εργοστάσιο και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.
   (γ) Να βρείτε την κλίμακα με την οποία κατασκευάστηκε το τρίτο μοντέλο της καρέκλας.

8. Να μελετήσετε τη χρυσή τομή.

Οι Αρχαίοι Έλληνες μελέτησαν τις αναλογίες του ανθρωπίνου σώματος από τον $5^{ο}$ αιώνα π.Χ.. Ένας συγκεκριμένος λόγος, ο λόγος της χρυσής τομής $1{,}618 : 1$, είναι η σχέση που συνδέει όλα σχεδόν τα μέλη του ιδανικού σώματος π.χ. M1:M2, M2:M3, M3:M4 κ.ο.κ . Οι αρχαίοι γλύπτες, έφτιαχναν τα αγάλματα τους τηρώντας τις αναλογίες της χρυσής τομής. Αργότερα με το θέμα των ιδανικών αναλογιών, ασχολήθηκε και ο Leonardo Da Vinci.





Ο «Δορυφόρος» του Πολύκλειτου (ρωμαϊκό μαρμάρινο αντίγραφο του χάλκινου αυθεντικού έργου).

Η χρυσή τομή φ ορίζεται ως το πηλίκο των θετικών αριθμών $\frac{α}{β}$ όταν ισχύει $\frac{α}{β} = \frac{α+β}{α}$ που ισούται περίπου με 1,618. Πιστεύεται ότι ο Φειδίας ήταν ο πρώτος που την εφάρμοσε στα γλυπτά του. Γι' αυτό, στον αριθμό που εκφράζει αυτή την αναλογία δόθηκε στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα από τον Mark Barr, έναν Αμερικανό μαθηματικό, η ονομασία, από το πρώτο γράμμα του ονόματος του γλύπτη. Θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες και για το λόγο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική, τόσο κατά την αρχαία Ελλάδα όσο και κατά την Αναγέννηση.

ΕΝΟΤΗΤΑ 10

Στατιστική – Πιθανότητες

Α΄ Γυμνασίου

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μεταβλητές – Είδη Μεταβλητών

Εξερεύνηση

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΓΕΩΡΓΙΑΣ, ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ
1418 ΛΕΥΚΩΣΙΑ

16 Ιανουαρίου 2013

ΜΗΝΙΑΙΟ ΔΕΛΤΙΟ ΚΑΙΡΟΥ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Γενική καιρική κατάσταση: Ο καιρός το Δεκέμβριο ήταν σχετικά υγρός και οι θερμοκρασίες κυμάνθηκαν γύρω στις κανονικές. Ασταθείς καιρικές συνθήκες επικράτησαν στις περιόδους $7-9$, $16-18$, $20-25$ και $30-31$ του μήνα, που προκάλεσαν τοπικές βροχές, μεμονωμένες καταιγίδες, χαλάζι και χιονόπτωση. Η μέση θερμοκρασία ήταν περίπου 0,5 °C πιο πάνω από την κανονική …

Βροχόπτωση: Σύμφωνα με προκαταρκτικούς υπολογισμούς η μέση βροχόπτωση του Δεκεμβρίου ήταν $116.7\ mm$ ή 111% της κανονικής. Η μηνιαία βροχόπτωση ήταν πιο πάνω από την κανονική στις πλείστες περιοχές και γενικά κυμάνθηκε μεταξύ 63% και 154% της κανονικής. Χαλάζι σημειώθηκε στις $8, 9$ και 23 του μήνα ενώ χιονόπτωση στις περιόδους $8-9$, $22-25$ και $30-31$ του μήνα.

Θερμοκρασία: Η μέση θερμοκρασία του μήνα ήταν περίπου 0.5 °C πιο πάνω από την κανονική. Οι μέσες ημερήσιες θερμοκρασίες ήταν πιο πάνω από τις κανονικές στις πλείστες ημέρες του μήνα εκτός από τις περιόδους $8-12$ και $24-31$ του μήνα όπου κυμάνθηκαν πιο κάτω ή γύρω από τις κανονικές. Εξαιρετικά ψηλές θερμοκρασίες σημειώθηκαν την περίοδο $11-22$ του μήνα, οπόταν οι μέγιστες και ελάχιστες θερμοκρασίες ήταν 2 με $9\ °C$ πιο πάνω από τις κανονικές. Εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες σημειώθηκαν στις 10 και στην περίοδο $25-30$ του μήνα, …

- ✓ Να μελετήσετε το πιο πάνω δελτίο καιρού και να σχολιάσετε ποιά στοιχεία μεταβάλλονται.

Διερεύνηση

Η Απογραφή Πληθυσμού 2011 διενεργήθηκε στην Κύπρο, από τη Στατιστική Υπηρεσία του Υπουργείου Οικονομικών. Η προηγούμενη απογραφή έγινε 2001. Εκτός από την αριθμητική καταγραφή του πληθυσμού, η απογραφή περιλάμβανε και ερωτηματολόγια που **σκοπό** είχαν τη συλλογή πληροφοριών για τη δημογραφική και κοινωνική κατάσταση της χώρας, την οικονομική και οικογενειακή κατάσταση του πληθυσμού, το επίπεδο μόρφωσης και τη ποιότητα ζωής.

	Απογραφή 2001			Απογραφή 2011		
Επαρχία	**Αστική**	**Αγροτική**	**Σύνολο**	**Αστική**	**Αγροτική**	**Σύνολο**
Λευκωσία	200 686	72 956	273 642	238 547	87 209	325 756
Αμμόχωστος		37 738	37 738		46 452	46 452
Λάρνακα	69 187	46 081	115 268	84 511	58 856	143 367
Λεμεσός	154 151	42 402	196 553	179 937	55 119	235 056
Πάφος	45 965	20 399	66 364	62 098	26 168	88 266
Σύνολο	**469 989**	**219 576**	**689 565**	**565 093**	**273 804**	**838 897**

- ✓ Να αναγνωρίσετε τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του πληθυσμού που καταγράφονται στον πιο πάνω πίνακα και να εξετάσετε το είδος των τιμών που παίρνουν.
- ✓ Ποια άλλα χαρακτηριστικά του πληθυσμού μπορεί να εξέτασε η Στατιστική Υπηρεσία για να πετύχει τον πιο πάνω σκοπό;
- ✓ Να υποδείξετε δύο χαρακτηριστικά που παίρνουν αριθμητικές τιμές και δύο άλλα που παίρνουν μη αριθμητικές τιμές.

Μαθαίνω

- **Στατιστική** είναι ο κλάδος των μαθηματικών που εμβαθύνει σε μεθόδους συλλογής δεδομένων, οργάνωσης, παρουσίασης των δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων από τα δεδομένα αυτά.

- Τα δεδομένα που συλλέγονται αφορούν ένα συγκεκριμένο σύνολο αναφοράς το οποίο ονομάζεται **πληθυσμός**.

- Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται **μεταβλητή**. Οι τιμές των μεταβλητών που καταγράφουμε για καθένα από τα μέλη του πληθυσμού, όταν συλλέγουμε δεδομένα ονομάζονται και **παρατηρήσεις**.

- Οι μεταβλητές διακρίνονται, ανάλογα με το είδος των τιμών που μπορούν να πάρουν, σε **ποιοτικές** και σε **ποσοτικές.**

  - Οι **ποιοτικές** μεταβλητές παίρνουν τιμές που δεν είναι αριθμοί και ταξινομούν τον πληθυσμό σε κατηγορίες.

    Παραδείγματα:
    φύλο, θρήσκευμα, επίπεδο σπουδών, ομάδα αίματος, οικογενειακή κατάσταση, ποδοσφαιρική ομάδα που υποστηρίζει κάποιος κτλ.

  - Οι **ποσοτικές** μεταβλητές παίρνουν μόνο αριθμητικές τιμές.
    Παραδείγματα:
    αριθμός παιδιών σε μια οικογένεια, αριθμός υπολογιστών που έχει μια οικογένεια στο σπίτι, ύψος, βάρος, ταχύτητα, χρόνος προπόνησης ενός ποδηλάτη, κτλ.

Παραδείγματα

1. Η τροχαία θέλει να κάνει μια έρευνα για τα τροχαία δυστυχήματα που σημειώθηκαν το 2011 στον αυτοκινητόδρομο Λευκωσίας – Λεμεσού. Θέλει να εξετάσει τις πιο κάτω μεταβλητές:
   - *τον τύπο του οχήματος που εμπλάκηκε στο δυστύχημα*
   - *το χρόνο που σημειώθηκε το δυστύχημα*
   - *την ταχύτητα του οχήματος*
   - *τον αριθμό των τραυματιών*
   - *την κατάσταση της υγείας κάθε τραυματία*
   - *τους βαθμούς ποινής του οδηγού*

   Να χαρακτηρίσετε το είδος καθεμιάς από τις μεταβλητές.

Λύση:
Οι μεταβλητές μπορούν να ταξινομηθούν ως προς το είδος τους με κριτήριο το αν παίρνουν αριθμητικές τιμές ή όχι.

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	
Ποιοτικές	Ποσοτικές
• *Ο τύπος του οχήματος.* • *Η κατάσταση της υγείας κάθε τραυματία.*	• *Ο χρόνος που σημειώθηκε το δυστύχημα.* • *Η ταχύτητα των οχημάτων.* • *Ο αριθμός των τραυματιών.* • *Οι βαθμοί ποινής του οδηγού.*

Δραστηριότητες

1. Θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση των 18 μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά για το β΄ τετράμηνο. Αν οι βαθμολογίες τους είναι $A, B, B, A, B, B, \Gamma, A, A, E, \Delta, A, A, \Gamma, B, B, \Gamma, A$ να βρείτε:
   (α) ποιος είναι ο πληθυσμός
   (β) ποια είναι η μεταβλητη
   (γ) το είδος της μεταβλητής.

2. Να χαρακτηρίσετε τις μεταβλητές, σύμφωνα με το είδος τους.
   (α) *Ο αριθμός των μαθητών ανά τμήμα ενός σχολείου.*
   (β) *Η απόσταση που διανύει ένα όχημα.*
   (γ) *Ο χαρακτηρισμός της διαγωγής των μαθητών.*
   (δ) *Ο αριθμός απουσιών.*
   (ε) *Η ποιότητα του περιεχομένου ενός βιβλίου.*

3. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Το χρώμα κάθε αυτοκινήτου είναι ποιοτική μεταβλητή.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	*Ο αριθμός των ανθρώπων που παρακολουθούν μια συγκεκριμένη τηλεοπτική εκπομπή είναι διακριτή ποσοτική μεταβλητή.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	*Ο αριθμός των απουσιών των μαθητών της Γ΄ Λυκείου είναι συνεχής ποσοτική μεταβλητή.*	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

4. Για τη μελέτη της τροχαίας κίνησης συγκεντρώθηκαν διάφορα στοιχεία από διερχόμενα αυτοκίνητα σε κάποιο κομβικό σημείο της πόλης. Μερικά από τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα.

Γράμματα Πινακίδας Εγγραφής	Χρώμα	Ταχύτητα Km/h	Αριθμός Επιβατών	Φορτηγό / Ημιφορτηγό
ΚΚΗ	Κόκκινο	43	1	ΟΧΙ
WS	Άσπρο	37	0	ΟΧΙ
ΕΑΑ	Γκρίζο	42	4	ΟΧΙ
DHG	Ασημί	48	3	ΟΧΙ
ΚΒΕ	Κόκκινο	35	2	ΝΑΙ
HKF	Ασημί	39	0	ΟΧΙ
KFC	Άσπρο	40	1	ΝΑΙ
YW	Πράσινο	27	3	ΟΧΙ
ST	Μαύρο	36	2	ΟΧΙ
HTP	Γκρίζο	47	2	ΟΧΙ

(α) Να εξετάσετε το είδος των μεταβλητών της πιο πάνω έρευνας.
(β) Ποια ήταν η ταχύτητα του μαύρου αυτοκινήτου;
(γ) Πόσα ήταν τα φορτηγά και ημιφορτηγά αυτοκίνητα;
(δ) Τι χρώμα είχε το αυτοκίνητο με τη μεγαλύτερη ταχύτητα;
(ε) Ποια ήταν η ταχύτητα του αυτοκινήτου με τους περισσότερους επιβάτες;

5. Η Στατιστική Υπηρεσία στις εκδόσεις «Στατιστικές Εκπαίδευσης» που δημοσιεύει, παρουσίασε τον πιο πάνω πίνακα που καταγράφει το ανώτατο μορφωτικό επίπεδο των ατόμων ηλικίας άνω των 20 ετών. Να εντοπίσετε τις μεταβλητές και να τις χαρακτηρίσετε ως προς το είδος τους.

Ανώτατο μορφωτικό επίπεδο ατόμων ηλικίας 20 ετών και άνω (%) (1)						
	2010	**2007**	**2004**	**2001**	**1997**	**1992**
Δεν φοίτησαν/τέλειωσαν το Δημοτικό						
Άντρες	*4%*	*4%*	*6%*	*6%*	*10%*	*10%*
Γυναίκες	*9%*	*9%*	*13%*	*13%*	*19%*	*21%*
Δημοτική εκπαίδευση						
Άντρες	*15%*	*18%*	*21%*	*22%*	*29%*	*29%*
Γυναίκες	*17%*	*18%*	*20%*	*23%*	*28%*	*29%*
Μέση εκπαίδευση						
Άντρες	*51%*	*50%*	*47%*	*47%*	*44%*	*42%*
Γυναίκες	*42%*	*44%*	*43%*	*40%*	*37%*	*34%*
Τριτοβάθμια εκπαίδευση						
Άντρες	*30%*	*28%*	*26%*	*25%*	*17%*	*19%*
Γυναίκες	*32%*	*29%*	*24%*	*24%*	*16%*	*16%*

(1) Τα έτη 1992 και 2001 αναφέρονται στις απογραφές πληθυσμού, ενώ τα υπόλοιπα χρόνια σε δειγματοληπτικές έρευνες. COPYRIGHT © :2011, REPUBLIC OF CYPRUS, STATISTICAL SERVICE

Μέθοδοι Παρουσίασης Στατιστικών Δεδομένων

Εξερεύνηση

Το σχολείο σας θα διοργανώσει αγώνες καλαθόσφαιρας. Δικαίωμα συμμετοχής έχει κάθε τμήμα του σχολείου με δική του ομάδα. Ο δημοσιογραφικός όμιλος του σχολείου αποφάσισε να μαζέψει πληροφορίες, για να παρουσιάσει τις γνώσεις τεχνικών καλαθόσφαιρας των μαθητών κάθε τμήματος. Χορήγησε στους μαθητές του σχολείου το πιο κάτω ερωτηματολόγιο.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Παρακαλούμε όπως συμπληρώσετε τα πιο κάτω στοιχεία:

ΤΜΗΜΑ: ....
ΦΥΛΟ: Άρρεν ☐ Θήλυ ☐
ΎΨΟΣ: ......
ΓΝΩΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΚΑΛΑΘΟΣΦΑΙΡΑΣ:
Α) Πολύ καλή ☐
Β) Καλή ☐
Γ) Καθόλου ☐

Ευχαριστούμε για το χρόνο σας

Δημοσιογραφικός

Το ερωτηματολόγιο χορηγήθηκε στους **20** μαθητές του τμήματος Α5 και καταγράφηκαν οι εξής απαντήσεις:

ΦΥΛΟ	Α	Α	Θ	Θ	Θ	Α	Α	Α	Θ	Θ	Θ	Θ	Α	Θ	Α	Α	Α	Θ	Θ	Θ
ΥΨΟΣ	1,75	1,85	1,55	1,61	1,52	1,67	1,83	1,87	1,69	1,71	1,48	1,54	1,77	1,63	1,79	1,71	1,68	1,65	1,56	1,75
ΓΝΩΣΗ ΤΕΧΝ.	Γ	Β	Β	Α	Α	Β	Γ	Α	Γ	Β	Α	Β	Γ	Γ	Β	Γ	Α	Β	Γ	Α

- ✓ Να σκεφτείτε και να υλοποιήσετε τρόπους οργάνωσης και παραστατικής παρουσίασης των στοιχείων αυτών (μπορείτε να εργαστείτε σε ομάδες).

Διερεύνηση (1)

Οι μαθητές μιας τάξης παρατήρησαν ότι για να γράψουν το ονοματεπώνυμό τους συμπληρώνοντας μια αίτηση, κάποιοι χρειάζονται περισσότερο χώρο και κάποιοι λιγότερο. Για να διερευνήσουν αυτή την κατάσταση αποφάσισαν σε πρώτο στάδιο να καταγράψουν τον αριθμό των γραμμάτων του ονοματεπώνυμου των 25 μαθητών της τάξης. Παρουσίασαν τα στοιχεία που συγκέντρωσαν στο διπλανό διάγραμμα:

✓ Να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται.

✓ Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα μεταφέροντας τις πληροφορίες του διαγράμματος.

✓ Πόσο πιστεύετε ότι είναι ο ιδανικός αριθμός από τετραγωνάκια να υπάρχουν για τη συμπλήρωση του ονοματεπωνύμου.

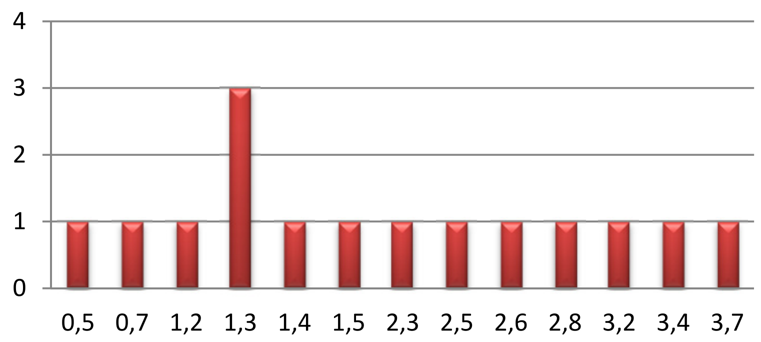
Πλήθος γραμμάτων στο ονοματεπώνυμο	Αριθμός μαθητών
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	

Διερεύνηση (2)

Μια σχολή χορού ζήτησε προσφορές από μια εταιρεία λεωφορείων για τη μεταφορά των μαθητών της σχολής. Για να δώσει κάποια στοιχεία στις εταιρείες, ζήτησε από τους μαθητές να καταγράψουν στον ακόλουθο πίνακα τις αποστάσεις του σπιτιού τους από τη σχολή:

Μαθητής (αρχικά ονόματος)	ΑΑ	ΑΓ	ΓΜ	ΓΚ	ΔΔ	ΔΚ	ΕΕ	ΕΜ	ΕΛ	ΖΠ	ΗΝ	ΚΛ	ΦΛ	ΡΛ	ΕΦ
Απόσταση (km)	1,3	0,5	1,4	2,3	2,5	2,8	1,3	3,2	3,4	3,7	2,6	1,2	1,3	1,5	0,7

Ένας μαθητής της σχολής κατασκεύασε το πιο κάτω διάγραμμα και το πρότεινε στο διευθυντή της σχολής.



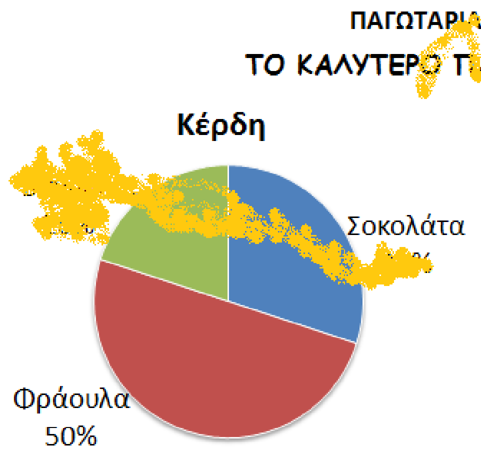
- ✓ Να εξηγήσετε γιατί ο διευθυντής της σχολής προτίμησε το διπλανό διάγραμμα που παρουσιάζει γραφικά τα δεδομένα.

- ✓ Με βάση το πιο πάνω διάγραμμα να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Απόσταση από τη σχολή	Αριθμός μαθητών
μέχρι 1 km	
από 1 μέχρι 2 km	
από 2 μέχρι 3 km	
από 3 μέχρι 4 km	

Διερεύνηση (3)

Μια εταιρεία που παράγει τρεις γεύσεις παγωτού παρουσίασε τα μηνιαία κέρδη της σε ένα ενημερωτικό έντυπο για τους μετόχους, χρησιμοποιώντας το ακόλουθο διάγραμμα και το διπλανό πίνακα.



Γεύση Παγωτού	Κέρδη (€)
[illegible]	€ 45.000
[illegible]	[illegible]
Βανίλια	[illegible]
Συνολικά	**€ 150.000**

Χύθηκε όμως μελάνι στο έντυπο και δεν είναι εμφανή κάποια στοιχεία.

✓ Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που έχουν σβηστεί, με βάση τα στοιχεία που φαίνονται.

Μαθαίνω

- Ένας από τους σκοπούς της στατιστικής είναι η παρουσίαση των δεδομένων με τρόπο οργανωμένο και παραστατικό, ώστε να δίνεται όσο το δυνατό ταχύτερη, πληρέστερη και πιο σαφής εικόνα των δεδομένων. Για το σκοπό αυτό, μεταξύ άλλων, χρησιμοποιούνται οι πίνακες συχνοτήτων και διάφορα στατιστικά διαγράμματα.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για μέτρηση μεγεθών (π.χ. ύψος, χρόνος προπόνησης ενός αθλητή, ταχύτητα) μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή σε κάποιο διάστημα. Οι μεταβλητές αυτές παίρνουν ***πολλές διαφορετικές τιμές****, οπότε δημιουργείται η ανάγκη ομαδοποίησης τους σε* ***κατηγορίες****.*

Στην περίπτωση αυτή χωρίζουμε το διάστημα τιμών των παρατηρήσεων σε μικρότερα υποδιαστήματα του ίδιου πλάτους (στην πιο απλή μορφή) και βρίσκουμε πόσες από τις παρατηρήσεις βρίσκονται σε κάθε κατηγορία. Η διαδικασία αυτή λέγεται ***ομαδοποίηση των παρατηρήσεων.***

- **Συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που εκφράζει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή αυτή.

Πίνακας Συχνοτήτων

Ο **πίνακας συχνοτήτων** παρουσιάζει τις αντίστοιχες συχνότητες όλων των τιμών μιας μεταβλητής.

Παραδείγματα:

Φύλο	*Αριθμός Ατόμων*
Άρρεν	*8*
Θήλυ	*12*

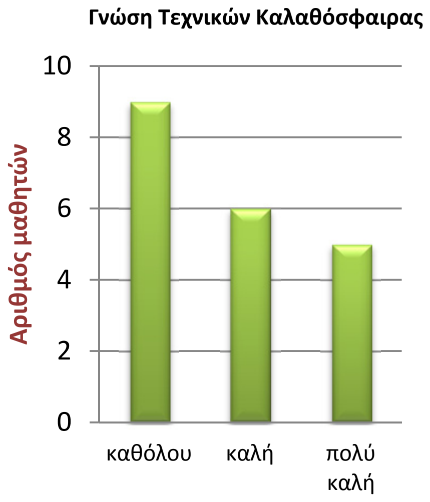
Ύψος μαθητών	*Αριθμός Μαθητών*
από 1,50 μέχρι 1,60	*5*
από 1,60 μέχρι 1,70	*6*
από 1,70 μέχρι 1,80	*8*
από 1,80 μέχρι 1,90	*3*

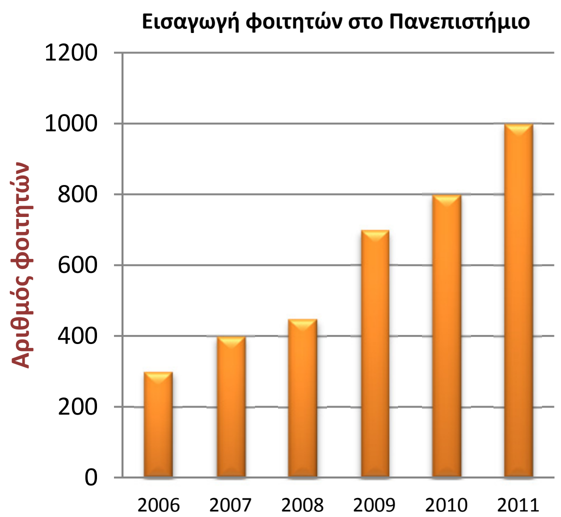
Χρονιά εισαγωγής φοιτητών στο Ανοικτό Πανεπιστήμιο	*Αριθμός Φοιτητών*
2006	*300*
2007	*400*
2008	*450*
2009	*700*
2010	*800*
2011	*1000*

Ραβδόγραμμα

Στο ραβδόγραμμα, οι τιμές της μεταβλητής παριστάνονται στον οριζόντιο άξονα, με κενά μεταξύ τους, ενώ η συχνότητα στον κατακόρυφο. Το ραβδδόγραμμα αποτελείται από ξεχωριστά ορθογώνια για κάθε τιμή της μεταβλητής που έχουν ύψος ίσο με τη αντίστοιχη συχνότητα.

Παραδείγματα:





Ιστόγραμμα

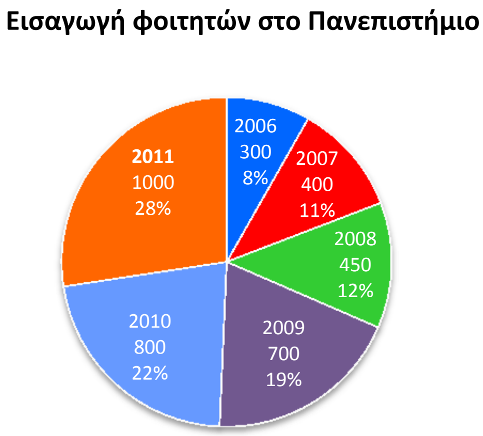
Για να κάνουμε γραφική παρουσίαση μεταβλητών όπως το ύψος, το βάρος κλπ, στις οποίες χρειάζεται ομαδοποίηση παρατηρήσεων χρησιμοποιούμε το **ιστόγραμμα**.
Το ιστόγραμμα στην απλοποιημένη του μορφή αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια, τα οποία έχουν βάση ίση με κάθε υποδιάστημα και ύψος ίσο με τη συχνότητα της αντίστοιχης κατηγορίας.

Παράδειγμα:
Το ύψος 22 μαθητών παρουσιάζεται στο πιο κάτω ιστόγραμμα σε τέσσερεις κατηγορίες. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα φαίνεται ότι 5 μαθητές έχουν ύψος από $1{,}50\ m$ μέχρι $1{,}60\ m$.

Κυκλικό Διάγραμμα

Στο κυκλικό διάγραμμα το σύνολο των δεδομένων παριστάνεται με ένα κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής σε κυκλικούς τομείς, (συνήθως διαφορετικού χρώματος).
Κάθε τομέας αναφέρεται σε μία τιμή ή κατηγορία τιμών της μεταβλητής. Δηλαδή παρουσιάζει το μέρος του συνόλου που αντιπροσωπεύει η κάθε συγκεκριμένη τιμή ή κατηγορία τιμών της μεταβλητής.

Παραδείγματα:



Παραδείγματα

1. Το επάγγελμα του πατέρα 20 μαθητών καταγράφηκε στο διπλανό πίνακα:

   (α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα και κυκλικό διάγραμμα.

   (β) Ποια κατηγορία έχει τα περισσότερα άτομα και σε ποιο ποσοστό επί του συνολικού αριθμού των ατόμων;

επάγγελμα πατέρα	**Αριθμός ατόμων**
Εργάτης	3
Ιδιωτικός υπάλληλος	7
Δημόσιος υπάλληλος	4
Αυτοεργοδοτούμενος	4
Ιερέας	2

Λύση:

(α)

Για την κατασκευή του κυκλικού διαγράμματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πιο κάτω βοηθητικό πίνακα:

Αριθμός ατόμων		Μέτρο επίκεντρης γωνιάς
Εργάτες	3	$\frac{3}{20}\cdot 360° = 54°$
Ιδιωτικοί υπάλληλοι	7	$\frac{7}{20}\cdot 360° = 126°$
Δημόσιοι υπάλληλοι	4	$\frac{4}{20}\cdot 360° = 72°$
Αυτοεργοδοτούμενοι	4	$\frac{4}{20}\cdot 360° = 72°$
Ιερείς	2	$\frac{2}{20}\cdot 360° = 36°$
Σύνολο:	20	360°

(β) Τα περισσότερα άτομα είναι ιδιωτικοί υπάλληλοι σε ποσοστό: $\frac{7}{20} = 35\%$.

2. Στον πιο κάτω πίνακα δίνεται η συγκέντρωση ($\mathrm{mgr/cm^3}$) ενός ρύπου στον αέρα 40 πόλεων. Να επιλέξετε και να κατασκευάσετε κατάλληλο διάγραμμα για την παρουσίαση των δεδομένων.

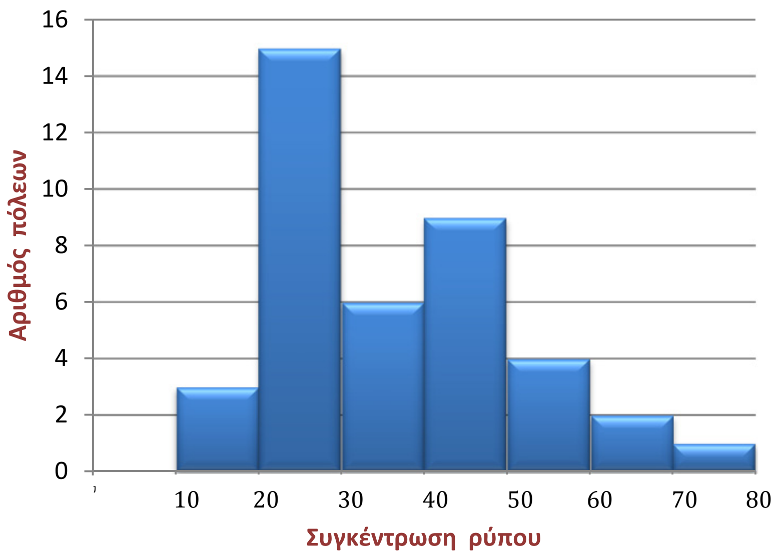
16	24	69	47	23	22	43	27	49	48
12	32	49	38	42	27	31	50	38	21
36	42	28	31	28	25	45	12	57	51
22	23	24	25	24	65	43	25	74	51

Λύση:

Μπορούμε να παρουσιάσουμε τα δεδομένα με ένα ιστόγραμμα.

Οργανώνουμε τις παρατηρήσεις σε κατηγορίες τιμών ως εξής:

Συγκέντρωση ρύπων ($\mathrm{mgr/cm^3}$)	*Αριθμός πόλεων*
από 10 *μέχρι* 20	3
από 20 *μέχρι* 30	15
από 30 *μέχρι* 40	6
από 40 *μέχρι* 50	9
από 50 *μέχρι* 60	4
από 60 *μέχρι* 70	2
από 70 *μέχρι* 80	1



Στην ομαδοποίηση παρατηρήσεων προσέχουμε τα εξής:

- *Όλες οι παρατηρήσεις πρέπει να ανήκουν σε κάποια κατηγορία.*
- *Αν έχουμε παρατήρηση που είναι ίση με το άνω άκρο μιας κατηγορίας αυτή ταξινομείται στην αμέσως επόμενη κατηγορία π.χ. η παρατήρηση* 50 *καταχωρείται στην κατηγορία* $50-60$.

Δραστηριότητες

1. Σε μια πόλη μετρήθηκε η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία (°C) επί 30 ημέρες και καταγράφηκαν στον πιο κάτω πίνακα:

25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26
22	23	27	24	23	21	21	23	23	22

(α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.

(β) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία ήταν:

i. Μικρότερη από $23^\circ\ C$;

ii. Μεγαλύτερη από $24^\circ\ C$;

iii. Τουλάχιστον $24^\circ\ C$;

2. Χρησιμοποιώντας το διπλανό πίνακα συχνοτήτων που δίνει τον αριθμό των παιδιών 50 οικογενειών, να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

(α) τουλάχιστον 1 παιδί,

(β) πάνω από 3 παιδιά,

(γ) από 3 έως και 5 παιδιά,

(δ) το πολύ 5 παιδιά,

(ε) ακριβώς 5 παιδιά.

Αριθμός παιδιών	Αριθμός οικογενειών
0	5
1	10
2	15
3	8
4	5
5	4
6	3

3. Οι πιο κάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	5	6	1	2	5	4	3	2	5
1	3	5	4	1	3	2	6	5	4
1	2	6	2	4	3	1	6	4	5

Να κατασκευάσετε:

(α) Πίνακα Συχνοτήτων

(β) Ραβδόγραμμα

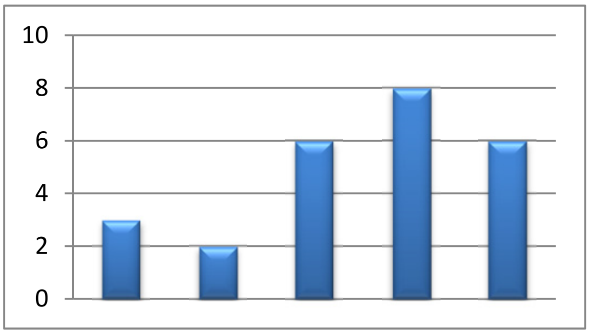
(γ) Κυκλικό Διάγραμμα

4. Η Ειρήνη είναι στο τμήμα A_1 και ο Χριστόφορος στο τμήμα B_2. Έκαναν μια έρευνα για το ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των μαθητών του τμήματος τους. Στον πιο κάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα της έρευνας τους.

Αγαπημένο άθλημα	A_1 Αριθμός Μαθητών	B_2 Αριθμός Μαθητών
Ποδόσφαιρο	4	8
Καλαθόσφαιρα	6	6
Αντισφαίριση	8	3
Κολύμπι	3	2
Άλλο	4	6

(α) Ποιου τμήματος τα αποτελέσματα παριστάνονται στο διπλανό ραβδόγραμμα;

(β) Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα με τις προτιμήσεις των μαθητών του άλλου τμήματος.



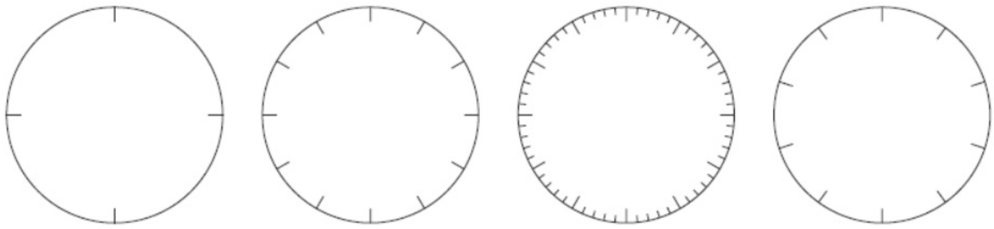
5. Ο αριθμός των μαθητών των 16 τμημάτων ενός Λυκείου είναι:

21	17	18	20	19	21	21	17
19	19	18	18	20	19	17	19

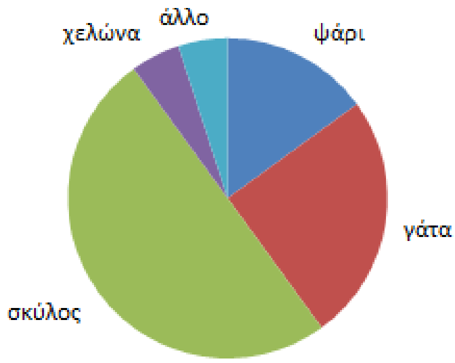
(α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.
(β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχό ραβδόγραμμα.

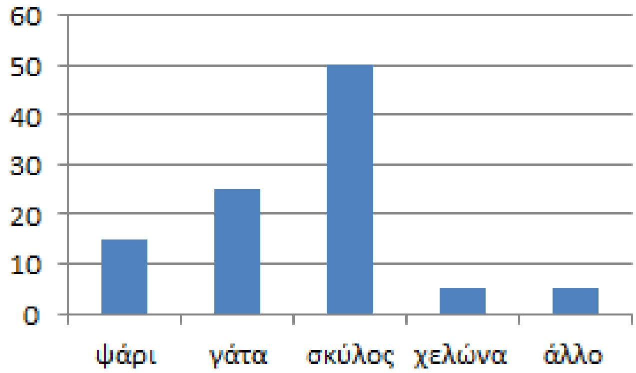
6. Σε μια εκδήλωση ο υπεύθυνος της καντίνας πήρε παραγγελία για τα ποτά που θα σερβιριστούν και τα κατέγραψε στο διπλανό πίνακα. Να επιλέξετε ένα από τους πιο κάτω κυκλικούς δίσκους (που είναι χωρισμένοι σε ίσα μέρη) για να αναπαραστήσετε με κυκλικό διάγραμμα τα στοιχεία του πίνακα.

Ποτό	Αριθμός Μαθητών
Πορτοκαλάδα	30
Νερό	10
Αναψυκτικό	15
Χυμό	5



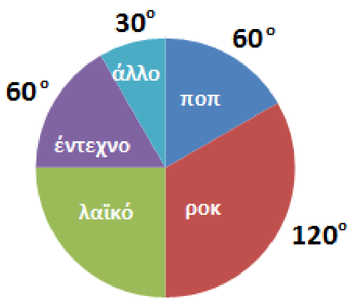
7. Ρωτήθηκαν 100 άτομα για το αγαπημένο τους κατοικίδιο ζώο και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με ένα κυκλικό διάγραμμα και ένα ραβδόγραμμα.



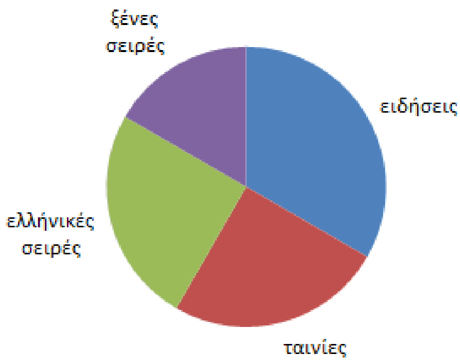


(α) Να κάνετε μια ερώτηση που μπορεί να απαντηθεί πιο εύκολα από το ραβδόγραμμα.
(β) Να κάνετε μια ερώτηση που μπορεί να απαντηθεί πιο εύκολα από το κυκλικό διάγραμμα.

8. Ο Μουσικός Όμιλος του σχολείου έκανε μια έρευνα για το αγαπημένο είδος μουσικής των μαθητών. Αφού κατέγραψαν την προτίμηση του καθενός από τους 600 μαθητές, παρουσίασαν το διπλανό κυκλικό διάγραμμα με τις προτιμήσεις τους. Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων.



9. Ρωτήθηκαν 180 άτομα για το είδος τηλεοπτικού προγράμματος που προτιμούν να παρακολουθούν τις περισσότερες φορές. Για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων δόθηκε το διπλανό κυκλικό διάγραμμα. Να εκτιμήσετε τον αριθμό τον ατόμων που απάντησαν στην κάθε μια από τις κατηγορίες προγραμμάτων.



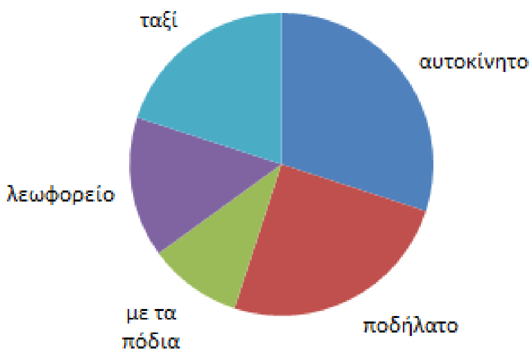
10. Η διευθύντρια μιας σχολής ζωγραφικής σκέπτεται να προσφέρει υπηρεσία για μεταφορά των μαθητών στη σχολή. Ρώτησε και κατέγραψε τους τρόπους που οι μαθητές της μεταβαίνουν στη σχολή στον πιο κάτω πίνακα.

Μαθητής	Τρόπος μετάβασης στη σχολή	Μαθητής	Τρόπος μετάβασης στη σχολή
Ανδρέας	αυτοκίνητο	Μιχάλης	ποδήλατο
Γιώργος	λεωφορείο	Γεωργία	αυτοκίνητο
Γιάννης	ταξί	Μιχαέλλα	ποδήλατο
Κώστας	με τα πόδια	Νίκη	αυτοκίνητο
Ανδρονική	αυτοκίνητο	Κωνσταντίνος	ποδήλατο
Δήμητρα	λεωφορείο	Παύλος	αυτοκίνητο
Ελένη	αυτοκίνητο	Ερατώ	ποδήλατο
Στάθης	λεωφορείο	Τασούλα	ταξί
Γεωργία	με τα πόδια	Σταύρος	ποδήλατο
Ανδρούλλα	ποδήλατο	Τάσος	ταξί

(α) Να οργανώσετε τα δεδομένα έτσι ώστε να είναι πιο εύκολο να τα μελετήσει και να βγάλει συμπεράσματα η διευθύντρια.

(β) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

Το πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα του πίνακα με ένα άλλο τρόπο.



(γ) Να συγκρίνετε τις πληροφορίες που παίρνετε από το ραβδόγραμμα και το διπλανό κυκλικό διάγραμμα και να συζητήσετε τι διαφορετικές πληροφορίες παίρνουμε από τα δύο γραφήματα.

(δ) Η διευθύντρια θα προσφέρει υπηρεσία μεταφοράς με μικρό λεωφορείο αν τουλάχιστο το 25% των μαθητών επιδείξει ενδιαφέρον. Αν θεωρήσουμε ότι όσοι χρησιμοποιούν ταξί και λεωφορείο ενδιαφέρονται για την υπηρεσία αυτή, είναι αρκετοί για να προσφέρει την υπηρεσία η σχολή; Μπορείτε να το συμπεράνετε αυτό μόνο από το κυκλικό διάγραμμα και γιατί;

11. Ο γυμναστής μιας ακαδημίας ποδοσφαίρου κατέγραψε το ύψος των αθλητών στον πιο κάτω πίνακα συχνοτήτων:

Ύψος σε cm	Αριθμός αθλητών
Από 135 μέχρι 140	4
Από 140 μέχρι 145	11
Από 145 μέχρι 150	9
Από 150 μέχρι 155	6

(α) Να παρουσιάσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε ένα ιστόγραμμα.
(β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν ύψος μεγαλύτερο από $140\ cm$.
(γ) Να υπολογίσετε τι μέρος του συνόλου των αθλητών έχει ύψος από $135\ cm$ μέχρι $150\ cm$.

12. Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει το χρόνο που αφιέρωσαν για την κατοίκον εργασία τους 50 μαθητές, κατά τη διάρκεια μίας εβδομάδας.

Χρόνος σε ώρες	Αριθμός μαθητών
μέχρι 2 ώρες	
από 2 μέχρι 4	
από 4 μέχρι 6	12
από 6 μέχρι 8	9
από 8 μέχρι 10	4

(α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν γνωρίζουμε ότι οι μαθητές που μελέτησαν 2 μέχρι 4 ώρες ήταν τετραπλάσιους από αυτούς που μελέτησαν λιγότερο από 2 ώρες.
(β) Να βρείτε πόσοι μαθητές μελέτησαν τουλάχιστον 6 ώρες την εβδομάδα.
(γ) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα για να παρουσιάσετε τα δεδομένα της έρευνας.

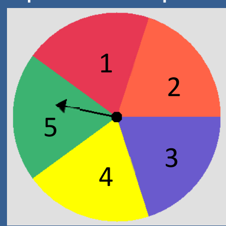
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Πείραμα Τύχης – Υπολογισμός Πιθανότητας

Εξερεύνηση

Στα εγκαίνια ενός καταστήματος, κάθε πελάτης έχει την ευκαιρία να παίξει στον τροχό της τύχης. Ο κύριος Γιάννης και η κυρία Ελένη καθώς περιμένουν στη σειρά για να παίξουν, παρατηρούν τα αποτελέσματα που έφεραν οι προηγούμενοι πελάτες και συζητούν.

Γύρισε και κέρδισε!



Αριθμός στον τροχό	Δωροκουπόνι
1	€25
2	Ατυχήσατε
3	€10
4	€10
5	€100

✓ Να σχολιάσετε τον πιο πάνω διάλογο.

Διερεύνηση (1)

Δύο αδέλφια, ο Στέφανος και η Ναταλία έχουν τελειώσει την κατ’ οίκον εργασία τους και θέλουν να χρησιμοποιήσουν και οι δύο τον υπολογιστή. Η Ναταλία πρότεινε να ρίξουν ένα ζάρι για να αποφασίσουν ποιος θα χρησιμοποιήσει πρώτος τον υπολογιστή. Αν η ένδειξη του ζαριού είναι το 5, θα τον χρησιμοποιήσει ο Στέφανος πρώτος, αλλιώς θα τον χρησιμοποιήσει πρώτη η Ναταλία.

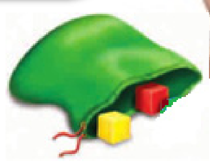
- ✓ Να σχολιάσετε τον τρόπο που πρότεινε η Ναταλία.
- ✓ Μπορείτε να προτείνετε εσείς άλλους τρόπους για να αποφασίσουν ποιος θα χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή πρώτος;

Διερεύνηση (2)

Η Ιωάννα έχει ένα σακούλι με κύβους. Ζητά από τον Ανδρέα να βρει τι χρώμα είναι οι κύβοι στο σακούλι και πόσους έχει από κάθε χρώμα.

- ✓ Με βάση τις πιο κάτω δηλώσεις της Ιωάννας, ποια θα πρέπει είναι η απάντηση του Ανδρέα;

> *«Αν επιλέξω έναν κύβο στην τύχη από το σακούλι, το ποσοστό επιτυχίας επιλογής κίτρινου κύβου είναι 50%.*
> *Αν αφαιρέσω τέσσερις κόκκινους κύβους από το σακούλι, τότε το ποσοστό επιτυχίας επιλογής κίτρινου κύβου, γίνεται 100%».*



Μαθαίνω

- Μια διαδικασία η οποία εκτελείται κάτω από ορισμένες συνθήκες, που δεν προκαθορίζουν το αποτέλεσμα της, αλλά ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

  Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την ένδειξη που εμφανίζεται.

- Τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ονομάζονται **απλά ενδεχόμενα**.

  Παράδειγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού η ένδειξη 4 είναι απλό ενδεχόμενο.

- Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα $\boldsymbol{\Omega}$**.**

  Παράδειγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **ενδεχόμενο**.

  Παράδειγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού A: *να φέρω άρτια ένδειξη είναι* 2 *ή* 4 *ή* 6, $A = \{2,4,6\}$

- Αν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός δειγματικού χώρου έχουν την ίδια δυνατότητα επιλογής, τότε τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου είναι **ισοπίθανα.**

- Σε ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων ενός ενδεχομένου A προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, ονομάζεται **πιθανότητα του ενδεχόμενου Α.**

  Δηλαδή: $\boldsymbol{P(A) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων}}}$

  Παράδειγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού, η πιθανότητα να φέρω άρτια ένδειξη είναι:
  A: *άρτια ένδειξη δηλαδή* 2 *ή* 4 *ή* 6 *άρα* $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
  Δηλαδή, η πιθανότητα να φέρω άρτια ένδειξη είναι 50%.

  - Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου A είναι $P(A) = 1$, τότε το ενδεχόμενο ονομάζεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Το ενδεχόμενο αυτό αντιστοιχεί στο δειγματικό χώρο.

  Παράδειγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού, η πιθανότητα να φέρω ένδειξη μικρότερη του 7 *είναι:* A: *ένδειξη μικρότερη του* 7 *δηλαδή* 1 *ή* 2 *ή* 3 *ή* 4 *ή* 5 *ή* 6,
  άρα $P(A) = \frac{6}{6} = 1$

➢ Αν η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου Α είναι $P(A) = 0$, τότε το ενδεχόμενο ονομάζεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Παράδειγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού, η πιθανότητα να φέρω ένδειξη 7 είναι:
A: ένδειξη 7 άρα, $P(A) = \frac{0}{6} = 0$

➢ Οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα πραγματοποίησης **μεγαλύτερη από 0 και μικρότερη από 1**.

▪ Άρα για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

Παράδειγμα

1. Σε ένα σακούλι υπάρχουν δύο κίτρινοι, τέσσερεις μπλε και έξι κόκκινοι κύβοι. Επιλέγουμε έναν κύβο στην τύχη.
   (α) Τι χρώμα κύβου είναι πιο πιθανό να επιλεγεί;
   (β) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέγει κίτρινος κύβος;
   (γ) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέγει μπλε κύβος;
   (δ) Ποια είναι η πιθανότητα να μην επιλεγεί μπλε κύβος;
   (ε) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγεί άσπρος κύβος;
   (στ) Πόσους μπλε κύβους πρέπει να προσθέσουμε στο σακούλι, ώστε η πιθανότητα να επιλεγεί μπλε κύβος να είναι $\frac{1}{2}$;

Λύση:
Στο συγκεκριμένο πείραμα τύχης η επιλογή γίνεται από 12 κύβους, άρα τα δυνατά αποτελέσματα (απλά ενδεχόμενα) είναι:
κ_1 ή κ_2 ή κ_3 ή κ_4 ή κ_5 ή κ_6 ή π_1 ή π_2 ή μ_1 ή μ_2 ή μ_3 ή μ_4 , *όπου* $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ *είναι οι 6 κόκκινες μπάλες και αντιστοιχα οι άλλες είναι οι 2 πράσινες και οι 4 μπλέ.*

(α) *Είναι πιο πιθανό να επιλεγεί κόκκινος κύβος, επειδή οι κόκκινοι κύβοι είναι περισσότεροι από τους υπόλοιπους.*

(β) *Να επιλέξω κόκκινο κύβο είναι η δυνατότητας επιλογής των:*
κ_1 ή κ_2 ή κ_3 ή κ_4 ή κ_5 ή κ_6 *(ευνοϊκές περιπτώσεις)*

$$P(\kappa \acute{o} \kappa\kappa\iota\nu o\varsigma\ \kappa \acute{u} \beta o\varsigma) = \frac{\pi\lambda \acute{\eta} \theta o\varsigma\ \kappa \acute{o} \kappa\kappa\iota\nu\omega\nu\ \kappa \acute{u} \beta\omega\nu}{\pi\lambda \acute{\eta} \theta o\varsigma\ \acute{o} \lambda\omega\nu\ \tau\omega\nu\ \kappa \acute{u} \beta\omega\nu} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(γ) $P(\mu\pi\lambda \acute{\varepsilon}\ \kappa \acute{u} \beta o\varsigma) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

(δ) $P(\text{να μην είναι μπλε κύβος}) = P(\text{κόκκινος ή κίτρινος κύβος}) = \frac{8}{12}$

(ε) $P(\text{άσπρος κύβος}) = 0$ *Άρα η πιθανότητα να επιλεγεί άσπρος κύβος είναι αδύνατο ενδεχόμενο.*

(στ) *Η πιθανότητα να επιλεγεί μπλε κύβος για να είναι* $\frac{1}{2}$*, πρέπει οι μισοί από τους κύβους να είναι μπλε και οι υπόλοιποι τα άλλα χρώματα. Οι κίτρινοι και οι κόκκινοι κύβοι είναι συνολικά* 8*, άρα πρέπει και οι μπλε να γίνουν* 8*. Θα πρέπει να προσθέσουμε ακόμη* 4 *μπλε κύβους.* $P(\mu\pi\lambda\varepsilon) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

2. Ο μουσικός όμιλος διεξήγαγε μια έρευνα για το είδος των μουσικών οργάνων που παίζουν τα 30 μέλη της ορχήστρας του σχολείου. Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.

   Αν επιλέξω στην τύχη ένα μαθητή της ορχήστρας, ποια είναι η πιθανότητα:

   Α: ο μαθητής να παίζει πνευστό μουσικό όργανο.
   Β: ο μαθητής να μην παίζει έγχορδο μουσικό όργανο.

Λύση:

Από το κυκλικό διάγραμμα, υπολογίζουμε τον αριθμό των μαθητών που παίζουν κάθε είδος μουσικού οργάνου:

Πνευστά: $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$ *των* 30 *μαθητών της ορχήστρας. Άρα,* $\frac{1}{2} \cdot 30 = 15$ *μαθητές.*

Έγχορδα: $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$*. Άρα,* $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ *μαθητές.*

Κρουστά: $30 - (15 + 10) = 30 - 25 = 5$ *μαθητές.*

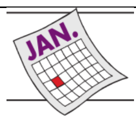
Η πιθανότητα να επιλεγεί μαθητής:

- *που παίζει πνευστό μουσικό όργανο είναι:* $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
- *που να **μην** παίζει έγχορδο μουσικό όργανο είναι:* $P(B) = \frac{15+5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Δραστηριότητες

1. Να καταγράψετε όλα τα πιθανά αποτελέσματα, που έχουμε από την εκτέλεση καθενός από τα πιο κάτω πείραμα τύχης:
   (α) η ρίψη ενός νομίσματος
   (β) η επιλογή ενός γράμματος από τη λέξη «ΚΥΠΡΟΣ»

2. Να σημειώσετε τη πιθανότητα κάθε ενδεχομένου A σε καθένα από τα πιο κάτω σενάρια, όπως το παράδειγμα:

Δήλωση	P(A)=0	0<P(A)<1	P(A)=1
Παράδειγμα: • ***Κλήρωση του Πασχαλινού λαχνού στο τμήμα μου.*** *Α: να κληρωθεί ο δικός μου λαχνός.*		✓	
• ***Τυχαία επιλογή ενός αριθμού από το 1 μέχρι το 200.*** *Α: να είναι ο αριθμός περιττός.*			
• ***Ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού.*** *Α: να φέρω ένδειξη 8.* 			
• ***Τυχαία επιλογή δύο μαθητών από τους 341 του σχολείου.*** *Α: να έχουν την ίδια μέρα τα γενέθλια τους.*			
• ***Ρίψη ενός νομίσματος.*** *Α: να φέρω ένδειξη «γράμματα».*			
• *Α: Να είναι η Πρωτοχρονιά τη 3η Δευτέρα του μήνα.* 			
• ***Ρίψη ενός συνηθισμένου ζαριού.*** *Α: να φέρω ένδειξη μικρότερη του 7.* 			

3. Τα παιδιά της τάξης θα παίξουν ένα αγώνα καλαθόσφαιρας. Ο Χρίστος και ο Αντρέας θα είναι οι αρχηγοί των δύο ομάδων και μπορούν να επιλέξουν τα άλλα μέλη της ομάδας τους. Για να αποφασίσουν ποιος θα διαλέξει πρώτος τους συμπαίκτες του, θα ρίξουν ένα ζάρι. Να προτείνετε πώς θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα της ρίψης του ζαριού, για να αποφασίσουν με «δίκαιο» τρόπο.

4. Για την επίσκεψη στο μουσείο της Αθήνας, η διεύθυνση του σχολείου πρέπει να επιλέξει τυχαία ένα άτομο από κάθε τμήμα. Η Μαρίλια είναι στο $Γ_1$ που έχει 25 άτομα, ενώ η αδελφή της η Εμέλια είναι στο τμήμα $Α_2$ που έχει 20 άτομα. Ποια από τις δύο αδελφές έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγεί;

5. Ο Ανδρέας έχει σε ένα μεγάλο σακούλι 20 μπάλες του μπιλιάρδου αριθμημένες από το 1 μέχρι και το 20. Θα επιλέξει στη τύχη μια μπάλα από το σακούλι. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

   A: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι ζυγός*

   B: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι πολλαπλάσιο του* 5

   $Γ$: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι το* 1 *ή το* 2

   $Δ$: *Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού στην μπάλα να είναι* 12

   E: *Ο αριθμός στην μπάλα να είναι μικρότερος του* 21

6. Από ένα τμήμα 25 μαθητών/τριών επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε αγόρι είναι 0,4, να βρείτε πόσα είναι τα κορίτσια;

7. Να περιγράψετε ένα πείραμα τύχης ώστε η πιθανότητα επιτυχίας να είναι 20%.

8. Η Νικολέττα θέλει να υπολογίσει την πιθανότητα να επιλέξει τυχαία μια πράσινη μπάλα από ένα κουτί που περιέχει 6 πράσινες και 9 μπλε. Να εξετάσετε την ορθότητα της λύσης που έδωσε.

$$P(\pi\rho\acute{\alpha}\sigma\iota\nu\eta\varsigma\ \mu\pi\acute{\alpha}\lambda\alpha\varsigma) = \frac{\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \pi\rho\acute{\alpha}\sigma\iota\nu\omega\nu}{\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \mu\pi\lambda\acute{\varepsilon}} = \frac{6}{9}$$

9. Για τις ανάγκες μιας έρευνας ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις 25 μαθητών καταγράφηκαν στον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός αδελφιών	0	1	2	3	4	5
Αριθμός μαθητών	3	9	7	3	2	1

Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα μαθητή από τους πιο πάνω, ποια είναι η πιθανότητα να απάντησε ότι η οικογένειά του έχει 3 παιδιά;

10. Οι μαθητές του A_2 έκαναν μια έρευνα για το χρώμα των ματιών κάθε μαθητή του τμήματος τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται στο πιο κάτω ραβδόγραμμα.

(α) Να υπολογίσετε πόσους μαθητές έχει το τμήμα.
(β) Πόσοι μαθητές του τμήματος δεν έχουν μαύρα μάτια;
(γ) Επιλέγουμε στη τύχη ένα μαθητή του τμήματος A_2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:
A: *ο μαθητής να έχει μπλε μάτια*
B: *ο μαθητής να μην έχει καστανά μάτια*
Γ: *ο μαθητής να έχει ανοιχτόχρωμα μάτια (μπλε ή πράσινα)*

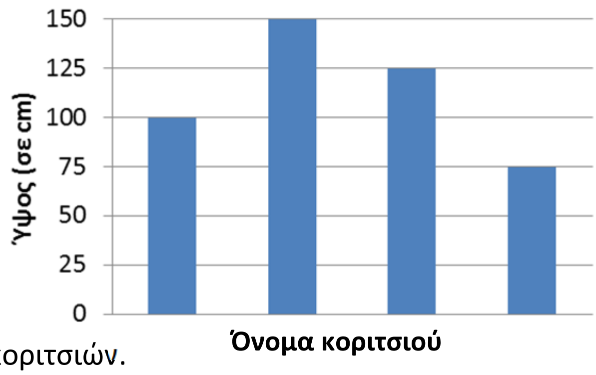
Δραστηριότητες ενότητας

1. Ο πίνακας δίνει τον αριθμό των αυτοκινήτων σε μια οικογένεια.

Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	2
1	12
2	20
3	16

   (α) Πόσες οικογένειες έχουν ακριβώς 2 αυτοκίνητα;
   (β) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2 αυτοκίνητα;
   (γ) Τι μέρος του συνόλου είναι ο αριθμός των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα;
   (δ) Τι ποσοστό οικογενειών έχουν ακριβώς 2 αυτοκίνητα;
   (ε) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα.
   (στ) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα.
   (ζ) Αν επιλέξω τυχαία μια από τις πιο πάνω οικογένειες, ποια η πιθανότητα η οικογένεια να έχει ακριβώς 2 αυτοκίνητα;

2. Το διπλανό διάγραμμα δείχνει το ύψος τεσσάρων μικρών κοριτσιών. Η Λουκία είναι η ψηλότερη, η Μαρία η πιο κοντή και η Νίκη είναι πιο ψηλή από την Ελένη.



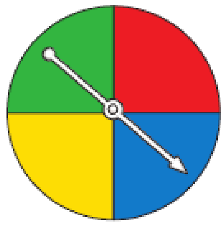
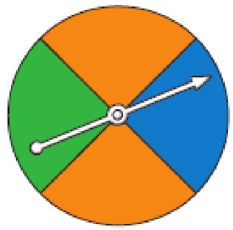
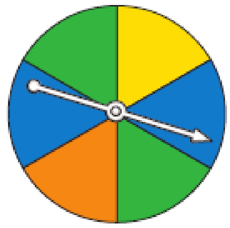
   (α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα με τα ονόματα των κοριτσιών.

Α	Β	Γ	Δ

   (β) Να βρείτε το ύψος της Ελένης.

3. Σε ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών στο τέλος του β΄ τετραμήνου. Πήραμε τις ακόλουθες βαθμολογίες: 15 , 11 , 10 , 10 , 14 , 16 , 19 , 18 , 13 , 17.
   Να βρείτε:
   (α) Ποιος είναι ο πληθυσμός;
   (β) Ποια είναι η μεταβλητή;
   (γ) Το είδος της μεταβλητής.

4. Καθένας από τους πιο κάτω τροχούς τύχης είναι μοιρασμένος σε ίσους τομείς. Να υπολογίσετε για καθένα από τους τροχούς την πιθανότητα ο δείκτης να πετύχει χρώμα:

			
Μπλε			
Κόκκινο			
Πράσινο			
Κίτρινο			
Πορτοκαλί			

5. Ο Μάνος και οι συμμαθητές του κάνουν μια έρευνα για τον αριθμό των ατόμων που επιβαίνουν σε κάθε αυτοκίνητο που περνά από το σχολείο τους. Ο αριθμός επιβατών 40 αυτοκινήτων έχει καταγραφεί στον πίνακα.

Αριθμός επιβατών
1, 1, 3, 2, 2, 1, 4, 1, 1, 4, 3, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 1,
2, 2, 3, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1

(α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

(β) Να επιλέξετε το κατάλληλο διάγραμμα για παρουσιάσετε τα δεδομένα των μαθητών για να μπορέσετε να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

i. Τι μέρος του συνολικού αριθμού αυτοκινήτων μεταφέρουν 3 επιβάτες;

ii. Ποιος είναι ο αριθμός επιβατών που εμφανίζεται πιο πολλές φορές στις παρατηρήσεις;

iii. Τι ποσοστό των αυτοκινήτων διακινούνται χωρίς συνεπιβάτες.

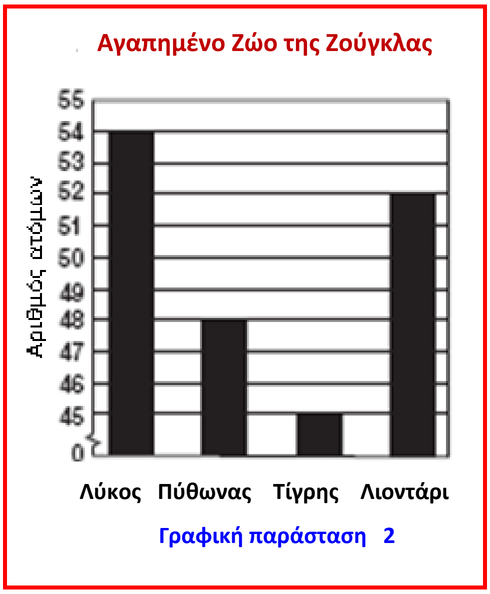
6. Να περιγράψετε ένα πείραμα τύχης, ώστε να ισχύουν τα πιο κάτω:

$P(αριθμός\ 1) = 40\%$, $P(αριθμός\ \ 8) = 10\%$,

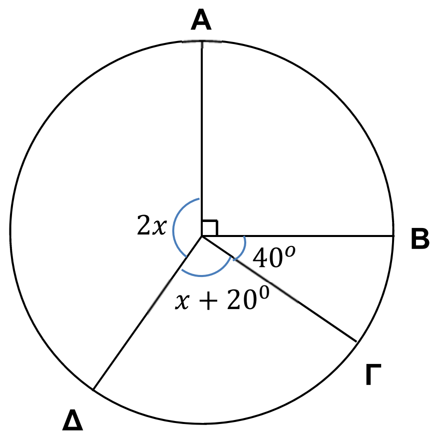
$P(αριθμός\ \ 4) = \frac{1}{5}$, $P(αριθμός\ \ 2) = 0{,}2$

7. Να κατασκευάσετε ένα τροχό της τύχης για <u>καθεμιά</u> από τις πιο κάτω περιπτώσεις, ώστε η πιθανότητα να είναι:
   (α) $P(κόκκινο\ χρώμα) = 1$
   (β) $P(πράσινο\ χρώμα) = 0$
   (γ) $0 < P(πορτοκαλί\ χρώμα) < 1$
   (δ) $P(κόκκινο\ χρώμα) = P(μπλε\ χρώμα)$
   (ε) $P(κόκκινο\ χρώμα) > P(μπλε\ χρώμα)$

8. Οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν τις ίδιες πληροφορίες. Να επεξηγήσετε ποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις φαίνεται να είναι παραπλανητική.



9. Το κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας έρευνας που έγινε για τον τρόπο με τον οποίο μεταβαίνουν στο σχολείο οι 720 μαθητές του σχολείου.



   (α) Να υπολογίσετε την τιμή του x και να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.
   (β) Αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής να μεταβαίνει στο σχολείο με το ποδήλατο.
   (γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της μεταβλητής «*Τρόπος μετάβασης στο σχολείο*».

10. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα της εξέτασης 50 μαθητών ενός Λυκείου ως προς την ομάδα αίματος τους.

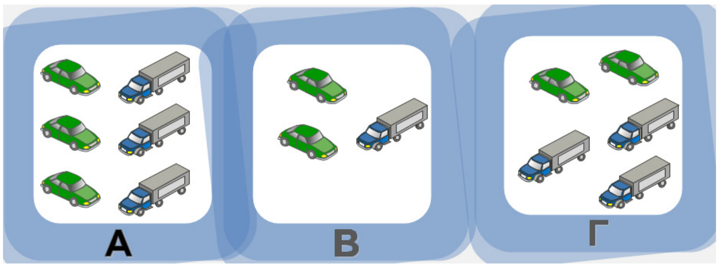
A	AB	B	A	O+	B	A	O-	AB	A
AB	O+	O+	AB	O-	AB	O+	O-	A	B
O-	A	B	A	B	A	B	A	AB	A
B	AB	A	O+	A	B	O+	B	O+	A
AB	B	AB	B	B	A	A	O+	O-	AB

(α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.
(β) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα.
(γ) Να κατασκευάσετε κυκλικό διάγραμμα.

11. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Να υπολογίσετε τη πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:
- A: *να είναι η ένδειξη μικρότερη του 6*
- B: *να είναι η ένδειξη άρτιος*
- Γ: *να είναι η ένδειξη πρώτος αριθμός*
- Δ: *να μην είναι η ένδειξη ο αριθμός 5*

12. Από ένα τμήμα 20 μαθητών/τριών επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή. Αν η πιθανότητα να επιλέξουμε άριστο μαθητή είναι 0,2, πόσοι είναι οι άριστοι μαθητές του τμήματος;

13. Στο πιο κάτω σχεδιάγραμμα εμφανίζονται τρείς χώροι στάθμευσης Α,Β και Γ.



(α) Αν επιλέξω τυχαία ένα όχημα από το χώρο στάθμευσης Γ να υπολογίσετε την πιθανότητα το όχημα να είναι φορτηγό.
(β) Αν επιλέξω τυχαία ένα όχημα από κάθε χώρο στάθμευσης:
  i. Να υπολογίσετε σε ποιο χώρο στάθμευσης θα έχω τη μεγαλύτερη πιθανότητα το όχημα που θα επιλέξω να είναι αυτοκίνητο.
  ii. Να υπολογίσετε σε ποιο χώρο στάθμευσης η πιθανότητα να επιλέξω φορτηγό είναι $\frac{1}{2}$.
  iii. Να υπολογίσετε σε ποιο χώρο στάθμευσης η πιθανότητα να επιλέξω αυτοκίνητο είναι ίση με την πιθανότητα να επιλέξω φορτηγό.

14. Ένα κιβώτιο περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες μπάλες. Οι άσπρες μπάλες είναι 15 και οι μαύρες είναι τριπλάσιες από τις κόκκινες. Διαλέγουμε στην τύχη μια μπάλα από το κιβώτιο. Αν η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$, να βρείτε:
    (α) Πόσες μπάλες υπάρχουν στο κουτί;
    (β) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε άσπρη μπάλα;

15. Η Στατιστική Υπηρεσία έχει καταγράψει τα αποτελέσματα κατανομής των ξένων υπηκόων κατά χώρα υπηκοότητας το 2011. Να επιλέξετε το κατάλληλο διάγραμμα για να παρουσιάσετε τα δεδομένα.

Χώρα Υπηκοότητας	Αριθμός	Ποσοστό %
Σύνολο	**179.547**	**100,0**
ΕΕ(26)	**112.424**	**62,6**
Ελλάδα	31.044	17,3
Ηνωμένο Βασίλειο	26.659	14,8
Ρουμανία	24.376	13,6
Βουλγαρία	19.197	10,7
Τρίτες χώρες	**67.123**	**37,4**
Φιλιππίνες	9.744	5,4
Ρωσία	8.663	4,8
Σρι Λάνκα	7.350	4,1
Βιετνάμ	7.102	4,0

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να μελετήσετε τον πίνακα που παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μιας τάξης στο διαγώνισμα των μαθηματικών και της επιστήμης. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα αυτά στους συμμαθητές σας χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους.

Μάθημα	**Βαθμοί**
Μαθηματικά	$17, 18, 18, 16, 1, 15, 15, 17, 18, 15, 20, 14, 17, 2, 17$
Επιστήμη	$17, 18, 17, 17, 15, 17, 17, 17, 20, 17, 17, 20, 17, 17, 17$

2. Να κάνετε μια έρευνα στο σχολείο σας, για να διερευνήσετε τις απόψεις των μαθητών για το ποια είναι τα σημαντικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει το σχολείο σας. Στη συνέχεια, να παρουσιάσετε τα αποτελέσματά χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους.

3. Να βρείτε από την ιστοσελίδα της Στατιστικής Υπηρεσίας: http://www.mof.gov.cy/cystat στατιστικά στοιχεία για την Κύπρο και να τα επεξηγήσετε στους συμμαθητές σας.

4. Η Ελίνα θέλει να παρακολουθήσει με τις φίλες της τη συναυλία του αγαπημένου της συγκροτήματος. Έχει στη διάθεση της μόνο δύο προσκλήσεις και θέλει να βρει έναν τρόπο για να επιλέξει ποια από τις τρεις φίλες της θα πάρει μαζί της. Να μελετήσετε αν και πώς μπορεί να αποφασίσει χρησιμοποιώντας τους πιο κάτω τρόπους.

5. Ο Γιώργος έχει στο πορτοφόλι του €65 σε χαρτονομίσματα των €5, των €10 και των €20. Ποια η πιθανότητα να έχει στο πορτοφόλι του ένα χαρτονόμισμα των €5, δύο των €10 και δύο των €20.

6. Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 χρώματα βόλων, κόκκινοι, κίτρινοι, πράσινοι και μαύροι. Ο λόγος των κόκκινων βόλων προς τους κίτρινους είναι $1:1$, των πράσινων προς τους μαύρους είναι $5:1$ και των πράσινων προς τους κίτρινους βόλους είναι $5:3$. Ο ελάχιστος αριθμός βόλων στο κουτί είναι 20.
   (α) Να υπολογίσετε τους βόλους που υπάρχουν στο κουτί και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
   (β) Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξετε τυχαία έναν κόκκινο βόλο;
   (γ) Να κατασκευάσετε ένα τροχό της τύχης που να αναπαριστά την πιθανότητα του κάθε χρώματος.

7. Η Στέλλα έχει ένα κιβώτιο στο οποίο υπάρχουν 3 μαύροι, 6 πράσινοι, 2 κίτρινοι και 6 κόκκινοι βόλοι.
   (α) Αν οι βόλοι του κάθε χρώματος διπλασιαστούν, να εξετάσετε πώς θα μεταβληθεί η πιθανότητα να επιλεγεί το κάθε χρώμα.
   (β) Στη συνέχεια, έβαλε μερικούς άσπρους βόλους, ώστε η πιθανότητα να πάρουμε στην τύχη ένα μαύρο βόλο να είναι $\frac{1}{7}$. Πόσους άσπρους βόλους έβαλε στο κιβώτιο;

8. Ένας τριψήφιος αριθμός σχηματίζεται από τα ψηφία $2, 5, 8$ που χρησιμοποιούνται όλα από μια φορά το καθένα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   Α: *ο αριθμός που θα σχηματιστεί διαιρείται με το* 3
   Β: *ο αριθμός που θα σχηματιστεί διαιρείται με το* 2
   Γ: *ο αριθμός που θα σχηματιστεί είναι περιττός*

9. Εξετάσαμε 50 άτομα ως προς τον αριθμό των εφημερίδων που αγοράζουν κάθε βδομάδα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από αυτά, να βρείτε την πιθανότητα:
   (α) Να αγοράζει ακριβώς 2 εφημερίδες.
   (β) Να αγοράζει 3 ή 4 εφημερίδες.
   (γ) Να αγοράζει τουλάχιστον 5 εφημερίδες.
   (δ) Να αγοράζει το πολύ 2 εφημερίδες.

Αριθμός εφημερίδων	Αριθμός ατόμων
0	4
1	5
2	10
3	14
4	8
5	4
6	3
7	2