ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου

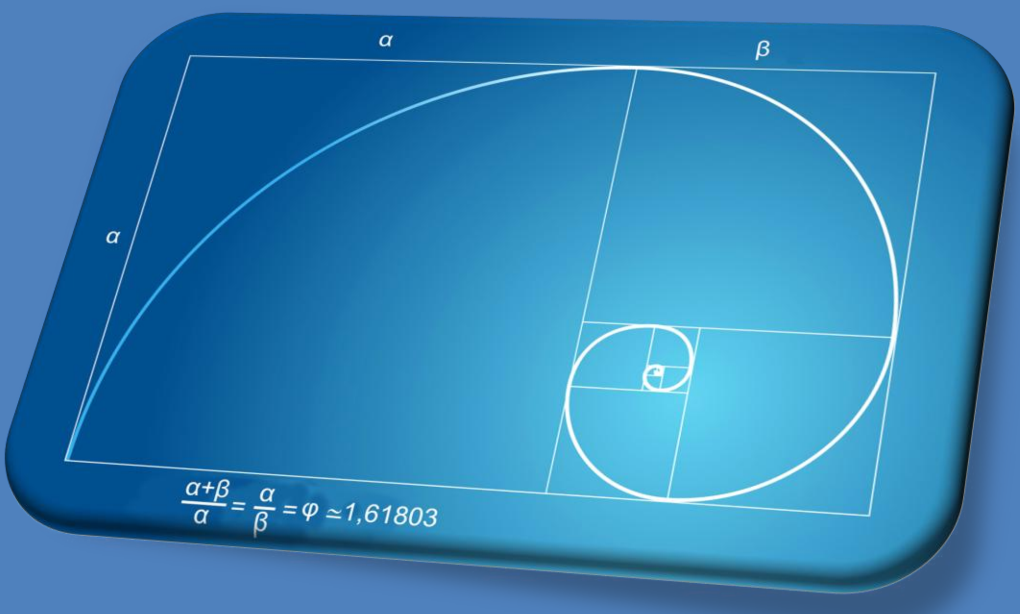
Α΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Γυμνασίου



Α΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά
Γ΄ Γυμνασίου, Τεύχος Α΄

Συγγραφή:	Αθανασίου Ανδρέας
	Αντωνιάδης Μάριος
	Γιασουμής Νικόλας
	Ματθαίου Κυριάκος
	Μουσουλίδου Μαριλένα
	Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
	Φιλίππου Ανδρέας
Συντονιστής:	Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστήμιο Κύπρου*
Εποπτεία:	Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
	Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
	Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
	Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*
Σχεδιασμός εξωφύλλου:	Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
Συντονισμός έκδοσης:	Χρίστος Παρπούνας, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2012
Εκτύπωση: Cassoulides Masterprinters Ltd

ISBN: 978-9963-0-4641-6

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδες

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
Από τη Β΄ Γυμνασίου 1

- Επανάληψη 3

1. Ιδιότητες Αναλογιών - Ποσοστά 9

- Ιδιότητες Αναλογιών - Ποσοστά 11

2. Ανισώσεις – Απόλυτη Τιμή 21

- Ανισώσεις 23
- Διαστήματα 28
- Απόλυτη Τιμή 34

3. Αλγεβρικές Παραστάσεις 43

- Αλγεβρικές Παραστάσεις 45
- Πράξεις Μονωνύμων 51
- Πολυώνυμα – Πράξεις Πολυωνύμων 55
- Διαίρεση Πολυωνύμων 62
- Αξιοσημείωτες Ταυτότητες 67
- Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων 75
- Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο και Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης Ακέραιων Αλγεβρικών Παραστάσεων 83
- Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις 86
- Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις - Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση 89
- Πρόσθεση – Αφαίρεση Αλγεβρικών Παραστάσεων 93

4. Στατιστική - Πιθανότητες 101

- Μέτρα Θέσης 103
- Στατιστική με Χρήση Λογιστικού Φύλλου στον Υπολογιστή 108
- Πιθανότητες - Πείραμα Τύχης – Αρχή της Απαρίθμησης 110

Επανάληψη

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Δίνονται τα σύνολα: $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\}$ και $B = \{\varepsilon, \eta, \theta, \kappa, \lambda\}$.
   (α) Να γράψετε με αναγραφή τα πιο κάτω σύνολα:
      i. $A \cap B$
      ii. $A \cup B$
   (β) Να υπολογίσετε τον πληθικό αριθμό των συνόλων A, B και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$
   (γ) Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $\in$ ή $\notin$.
      i. a … A
      ii. ω … B
      iii. ε … $A \cap B$
      iv. η … $A \cap B$
      v. θ … $A \cup B$
      vi. ε … $A \cup B$

2. Δίνονται οι αριθμοί, $\sqrt{21}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\frac{1}{3}$, π, $\sqrt{9}$. Να χαρακτηρίσετε τον καθένα από τους πιο πάνω αριθμούς ως ρητό ή άρρητο αριθμό.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   (α) $\sqrt{81} - \sqrt[3]{27}$
   (β) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$
   (γ) $\sqrt{5 + \sqrt{16}}$
   (δ) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2} + \sqrt{9}}$

4. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = -(\alpha + \gamma - \beta) + (\alpha + 5 - \gamma) - (-1 - \gamma - \alpha)$.
   (α) Να γράψετε την παράσταση στην πιο απλή της μορφή.
   (β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν $\alpha = +5$, $\beta = -12$ και $\gamma = 7$.

5. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = 3(x - 2y) - 2x + 5(y + 1)$.
   (α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση στην πιο απλή της μορφή.
   (β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν $x - y = 15$.

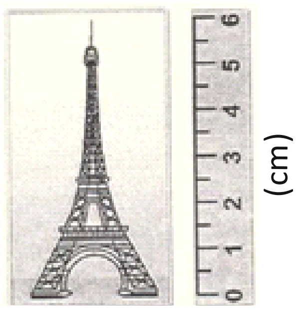
6. Δίνεται ορθογώνιο του οποίου το μήκος είναι κατά τρία μεγαλύτερο από το πλάτος του.
   (α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρο του ορθογωνίου σε σχέση με το πλάτος του.
   (β) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $46\ cm$, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

7. Το κόστος ενοικίασης ενός αυτοκινήτου είναι για την πρώτη μέρα €32 και για κάθε επιπρόσθετη μέρα €28.
   (α) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το κόστος ενοικίασης του αυτοκινήτου.
   (β) Πόσα θα πληρώσει κάποιος, αν ενοικιάσει ένα αυτοκίνητο για 6 μέρες;
   (γ) Για πόσες μέρες μπορεί κάποιος να ενοικιάσει έναν αυτοκίνητο, αν διαθέτει €228.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:
   (α) $5x - 17 = 3x + 1$
   (β) $5x + 4 - 2x = 7x - 4$
   (γ) $5(\alpha + 2) - 3\alpha = -2(\alpha - 3)$
   (δ) $3(x + 2) - 5x = 6 - 2x$
   (ε) $\frac{y}{3} + \frac{y}{2} = 1 + y$
   (στ) $x - \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{3} + \frac{3}{2}$
   (ζ) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x}{2} = 2$
   (η) $\frac{3(2\omega+5)}{4} - \frac{\omega-1}{3} = 3 - \frac{\omega-4}{6}$

9. Να υπολογίσετε την τιμή του x στις πιο κάτω αναλογίες:
   (α) $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$
   (β) $\frac{3-x}{x} = \frac{3}{2}$
   (γ) $\frac{2(x-3)}{x} = \frac{3}{2}$

10. Ο πύργος του Άιφελ στο Παρίσι έχει ύψος $300\ m$. Να υπολογίσετε την κλίμακα με την οποία είναι κατασκευασμένη η διπλανή εικόνα.



11. Μια τάξη έχει 24 μαθητές. Ο λόγος του αριθμού των αγοριών προς τον αριθμό των κοριτσιών είναι $\frac{3}{5}$. Πόσα είναι τα κορίτσια;

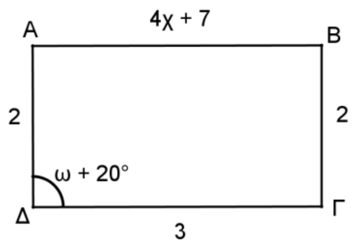
12. Ένα εργοστάσιο χρειάζεται 24 κιβώτια των 16 τεμαχίων, για να συσκευάζει την ημερήσια παραγωγή του.
   (α) Αν τα συσκευάζει σε κιβώτια των 12 τεμαχίων, να υπολογίσετε πόσα κιβώτια θα χρειάζεται την ημέρα.
   (β) Αν τα μικρά κιβώτια των 12 τεμαχίων στοιχίζουν €2,50 και τα μεγάλα κιβώτια των 16 τεμαχίων στοιχίζουν €3,00, να εξετάσετε ποιος από τους δύο τρόπους συσκευασίας συμφέρει το εργοστάσιο.

13. Ένας πατέρας είναι 20 χρόνια μεγαλύτερος από την κόρη του. Μετά από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας της κόρης του. Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες;

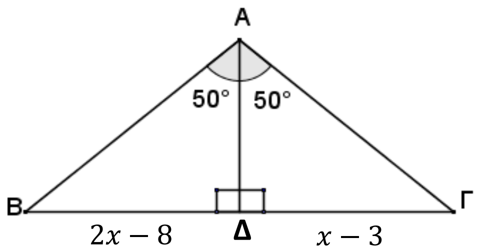
14. Η Μαρίνα έχει τριπλάσια χρήματα από τον Γιώργο. Αν ξοδέψουν από €5, τότε τα χρήματα της Μαρίνας θα είναι κατά €3 περισσότερα από το τετραπλάσιο των χρημάτων του Γιώργου. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα έχει ο καθένας.

15. Κατασκευάζω ένα ορθογώνιο. Στη συνέχεια κατασκευάζω δεύτερο ορθογώνιο με μήκος και πλάτος διπλάσιο του αρχικού ορθογωνίου. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι αληθείς:
(α) Η περίμετρος και το εμβαδόν και των δύο ορθογωνίων είναι ίσα.
(β) Τόσο η περίμετρος όσο και το εμβαδόν διπλασιάζονται.
(γ) Το εμβαδόν τετραπλασιάζεται ενώ η περίμετρος διπλασιάζεται.
(δ) Το εμβαδόν διπλασιάζεται ενώ η περίμετρος τετραπλασιάζεται.
(ε) Τόσο η περίμετρος όσο και το εμβαδόν τετραπλασιάζεται.

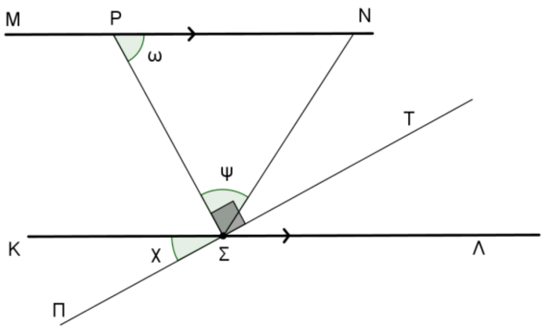
16. Στο διπλανό ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ να υπολογίσετε την τιμή του x και του ω.



17. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του x, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



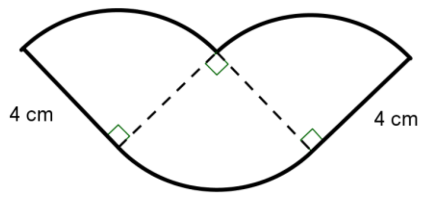
18. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:
$MN//ΚΛ$, $ΡΣ \perp ΠΤ$ και $ΣΤ$ διχοτόμος της $N\hat{Σ}Λ$.
(α) Να δείξετε ότι $\hat{\psi} = \hat{\omega}$.
(β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $ΡΝΣ$.
(γ) Αν $\hat{\omega} = 62°$, να υπολογίσετε τη γωνία x.



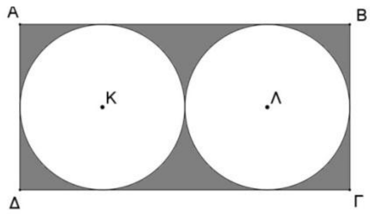
19. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο κύκλου με ακτίνα $6\ cm$ *(η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π).*

20. Ένα τραπέζιο έχει μικρή βάση $4\ cm$, μεγάλη βάση $6\ cm$ και ίδιο εμβαδόν με ένα τετράγωνο πλευράς $5\ cm$. Να υπολογίσετε το ύψος του τραπεζίου.

21. Να υπολογίσετε την περίμετρο του διπλανού σχήματος.

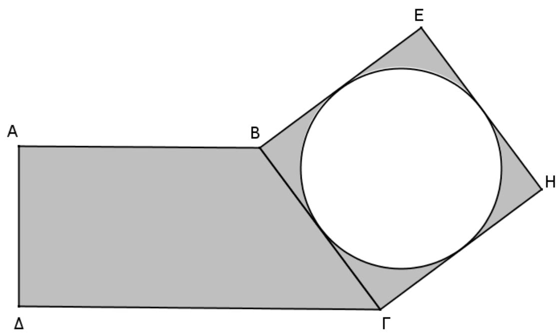


22. Στο πιο κάτω σχήμα το μήκος του κύκλου με κέντρο K είναι $14\pi\ m$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.

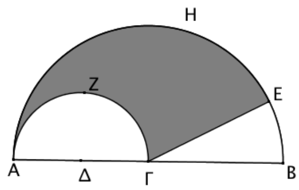


23. Η μεγάλη βάση τραπεζίου είναι διπλάσια από τη μικρή και το ύψος του είναι $10\ cm$. Να υπολογίσετε τις δύο βάσεις, αν το εμβαδόν του είναι $150\ cm^2$.

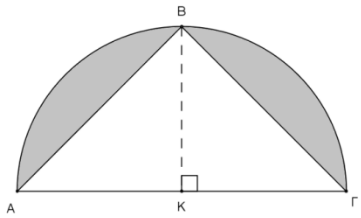
24. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος, αν το $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο με $ΑΒ = 12\ dm$ και $ΔΓ = 18\ dm$. Το $ΒΕΗΓ$ είναι τετράγωνο με εμβαδόν $100\ dm^2$.



25. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας, αν το ΑΗΒ είναι ημικύκλιο με κέντρο το Γ, το ΑΖΓ είναι ημικύκλιο με κέντρο Δ, το $\mathrm{AB} = 12\ \mathrm{cm}$ και η $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 30°$.

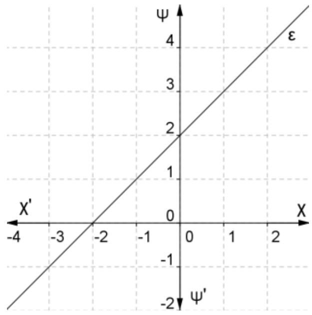


26. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας, αν η διάμετρος $ΑΓ$ του ημικυκλίου με κέντρο $Κ$, ισούται με $12\ dm$ και $ΒΚ \perp ΑΓ$.



27. Δίνεται ρόμβος με περίμετρο $52\,m$ και μια διαγώνιο $24\,m$. Αν ο ρόμβος είναι ισοδύναμος με ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ//ΓΔ)$ που έχει τη μεγάλη βάση κατά $12\,m$ μεγαλύτερη από τη μικρή και τις ίσες πλευρές του $ΑΔ = ΒΓ = 10\,m$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

28. Από το διπλανό σχήμα να βρείτε:
   (α) την κλίση της ευθείας ε.
   (β) τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες των τετμημένων και των τεταγμένων.
   (γ) την εξίσωση της ευθείας ε.



29. Η ευθεία $y = 3x + 6$ τέμνει τους άξονες των x και ψ στα σημεία $Α$ και $Β$ αντίστοιχα.
   (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $Α$ και $Β$ και να αναπαραστήσετε την ευθεία.
   (β) Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $Γ(\ 15\ , 50\ )$ και $Δ\ (\ -12\ , -30\ )$ ανήκουν στην ευθεία.

30. Να βρείτε την τιμή του μ, αν η ευθεία $y = (\mu + 4)x - 2$ περνά από το σημείο $Α(2, -4)$.

31. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ περνά από τα σημεία $Α(0, -4)$ και $Β(1, -2)$.
   (α) Να υπολογίσετε τα α και β.
   (β) Να παραστήσετε γραφικά την πιο πάνω ευθεία.
   (γ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα των x.
   (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την πιο πάνω ευθεία, τον άξονα y και την ευθεία $y = 2$.

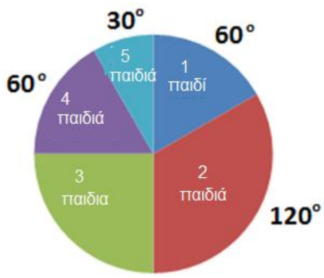
32. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $y = 2x + 2$ και ε_2: $2x + 3y = 6$.
   (α) Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τον άξονα των x.
   (β) Να δείξετε ότι και οι δύο ευθείες τέμνουν τον άξονα των y στο σημείο $\Gamma(0,2)$.
   (γ) Να παραστήσετε γραφικά τις δύο ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων.
   (δ) Αν $A(-1,0)$ και $B(3,0)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

33. Σε ένα κουτί υπάρχουν 20 αριθμημένες μπάλες του μπιλιάρδου από το 1 μέχρι το 20. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:
   - Α: *να επιλεγεί η μπάλα με τον αριθμό* 7,
   - Β: *να επιλεγεί μπάλα με αριθμό μικρότερο του* 7,
   - Γ: *να επιλεγεί μπάλα με αριθμό περιττό,*
   - Δ: *να επιλεγεί μπάλα με αριθμό που δεν είναι πολλαπλάσιο του* 5,
   - Ε: *να επιλεγεί μπάλα με αριθμό που να είναι πολλαπλάσιο του* 2 *και του* 3.

34. Ο όμιλος Οδικής Ασφάλειας του σχολείου διεξήγαγε μια έρευνα για τον αριθμό των ατόμων που επιβαίνουν σε ένα όχημα. Για το σκοπό αυτό παρατήρησαν και κατέγραψαν 240 οχήματα σε ώρα αιχμής σε κεντρική αρτηρία της περιοχής.
   (α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.
   (β) Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα.
   (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα, αν επιλέξω ένα όχημα που να μεταφέρει είτε 3 είτε 4 άτομα.

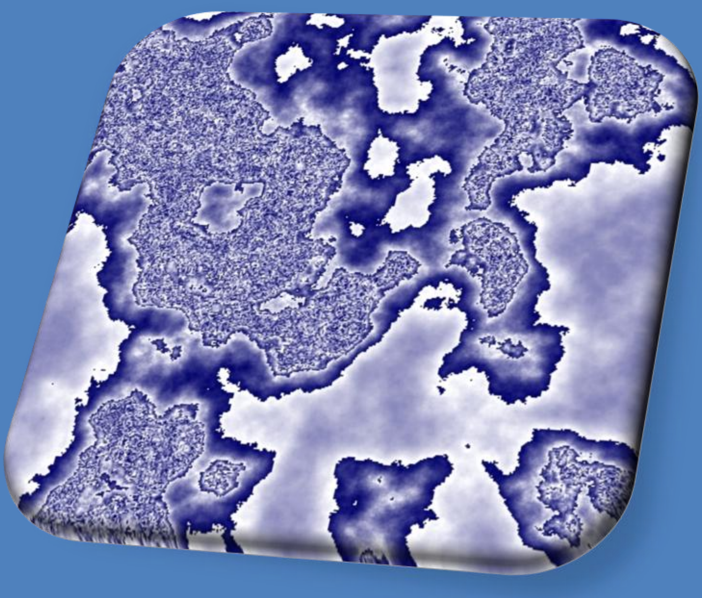
Αριθμός ατόμων σε κάθε όχημα	Αριθμός οχημάτων
1 – 2	80
3 – 4	60
5 – 6	40
7 – 8	32
περισσότερα από 9	;

35. Σε μια κοινότητα καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών 180 οικογενειών. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα.
   (α) Να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων.
   (β) Αν δικαιούνται επιχορήγηση όσες οικογένειες έχουν από τρία παιδιά και άνω, πόσες είναι οι δικαιούχες οικογένειες;



ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Ιδιότητες Αναλογιών
Ποσοστά



Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ιδιότητες Αναλογιών – Ποσοστά

Εξερεύνηση

Ένα από τα πιο δημοφιλή μηνύματα που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο είναι ένα φιλμάκι που παρουσιάζει πώς θα ήταν η γη, αν ήταν ένα χωριό 100 μόνο κατοίκων.

Η αρχική ιδέα ήταν της δημοσιογράφου και καθηγήτριας Πανεπιστημίου Donella Meadows, η οποία παρουσίασε τη μικρογραφία αυτή του κόσμου σε άρθρο της στο *The Global Citizen*, το 1990. Από τότε οι αλλαγές που σημειώθηκαν κατά τα τελευταία χρόνια είναι αξιοσημείωτες. Ο παγκόσμιος πληθυσμός έχει ήδη ξεπεράσει τους 7 000 000 000 ανθρώπους. Τα δεδομένα τώρα έχουν ως εξής[1]:

Αν η γη ήταν ένα χωριό των 100 κατοίκων:

- *Εξήντα θα ήταν Ασιάτες (*37 *θα κατάγονταν από την Ινδία και την Κίνα),* 15 *θα ήταν Αφρικανοί,* 11 *θα ήταν Ευρωπαίοι και* 14 *θα κατάγονταν από τη Βόρεια και Νότια Αμερική.*
- *Είκοσι έξι θα ήταν παιδιά και* 74 *ενήλικες από τους οποίους οι 8 θα ήταν πάνω από* 65 *χρονών.*
- *Ογδόντα τρεις μόνο θα μπορούσαν να γράφουν και να διαβάζουν ενώ* 17 *θα ήταν αναλφάβητοι.*
- *Ένας θα πέθαινε από την πείνα και άλλοι* 15 *θα υποσιτίζονταν, τη στιγμή που* 21 *θα ήταν παχύσαρκοι.*
- *Δεκατρείς δεν θα είχαν πρόσβαση σε καθαρό νερό.*

✓ Να σχολιάσετε γιατί το πιο πάνω άρθρο εντυπωσίασε και συνεχίζει να εντυπωσιάζει για τον τρόπο που επέλεξε η Meadows να παρουσιάσει τα δημογραφικά δεδομένα του πληθυσμού.

✓ Να εξηγήσετε πώς θα μπορούσατε να παρουσιάσετε τα δημογραφικά δεδομένα της Κύπρου που έχουν συλλεγεί κατά την απογραφή πληθυσμού του 2011 (Στατιστική Υπηρεσία, http://www.mof.gov.cy/cystat) με παρόμοιο τρόπο.

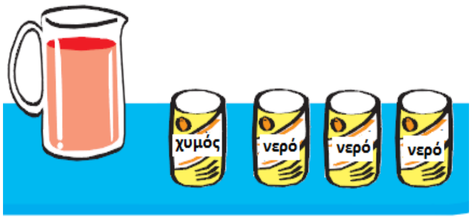
Αν η Κύπρος ήταν ένα χωριό των 100 κατοίκων, τότε …

---

[1] **Sources:** 2012 - Fritz Erickson, Provost and Vice President for Academic Affairs, Ferris State University (Formerly Dean of Professional and Graduate Studies, University of Wisconsin - Green Bay) and John A. Vonk, University of Northern Colorado, 2006; Returning Peace Corps Volunteers of Madison Wisconsin, *Unheard Voices: Celebrating Cultures from the Developing World*, 1992; Donella H. Meadows, *The Global Citizen*, May 31, 1990.

Διερεύνηση

Ο Λουκάς θέλει να φτιάξει πορτοκαλάδα για το πάρτι που θα έχει το απόγευμα στην πισίνα του σπιτιού του. Σύμφωνα με τις οδηγίες της συσκευασίας, πρέπει να αναμίξει 1 δόση συμπυκνωμένου χυμού πορτοκαλιού με 3 δόσεις νερού.



- ✓ Να γράψετε στην πρώτη στήλη του πιο κάτω πίνακα τους κατάλληλους λόγους της ποσότητας του χυμού προς την ποσότητα του νερού, ώστε η πορτοκαλάδα να έχει πάντα την ίδια γεύση.
- ✓ Να συγκρίνετε το γινόμενο των άκρων όρων και το γινόμενο των μέσων όρων κάθε αναλογίας. Τι παρατηρείτε;
- ✓ Να συμπληρώσετε τον πίνακα, σύμφωνα με το παράδειγμα, και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.
- ✓ Να γράψετε μια δική σας αναλογία και να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν τα συμπεράσματά σας.

	I		*II*		*III*		*IV*		*V*
ΑΝΑΛΟΓΙΑ	*Να αντιστρέψετε τους λόγους*		*Να αλλάξετε θέσεις στους μέσους όρους*		*Να αλλάξετε θέσεις στους άκρους όρους*		*Να προσθέσετε στους ηγούμενους τους επόμενους όρους της αναλογίας*		*Να προσθέσετε τους ηγούμενους μεταξύ τους και τους επόμενους όρους μεταξύ τους*
$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\delta}{\gamma}$	$\frac{\alpha}{\gamma}$	$\frac{\beta}{\delta}$	$\frac{\delta}{\beta}$	$\frac{\gamma}{\alpha}$	$\frac{\alpha+\beta}{\beta}$	$\frac{\gamma+\delta}{\delta}$	$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$
$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1+3}{3}=\frac{4}{3}$	$\frac{4+12}{12}=\frac{16}{12}$	$\frac{1+4}{3+12}=\frac{5}{15}$
$\frac{1}{3}=\frac{...}{...}$									
Να γράψετε μια δική σας αναλογία									
$\frac{...}{...}=\frac{...}{...}$									

Μαθαίνω

- **Αναλογία** ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0$
- Οι $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma}$ και $\boldsymbol{\delta}$ ονομάζονται **όροι** της αναλογίας.
  - *Οι $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\delta}$ ονομάζονται **άκροι όροι** της αναλογίας.*
  - *Οι $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.*
  - *Οι $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\gamma}$ ονομάζονται **ηγούμενοι όροι** της αναλογίας.*
  - *Οι $\boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\delta}$ ονομάζονται **επόμενοι όροι** της αναλογίας.*

- Το σύμβολο $\boldsymbol{\alpha}\%$ ονομάζεται **ποσοστό επί τοις εκατό** ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με το λόγο $\frac{\alpha}{100}$.

  Χρησιμοποιούμε επίσης το ποσοστό $\boldsymbol{\alpha}‰$ που διαβάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και είναι ίσο με το $\frac{\alpha}{1000}$.

- Ιδιότητες αναλογιών:

  - Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma}$ Το γινόμενο των άκρων όρων μιας αναλογίας είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων της.

Απόδειξη:
Δίνεται η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη της ισότητας με $\beta\cdot\delta$: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot(\beta\delta)=\frac{\gamma}{\delta}\cdot(\beta\delta)$
$\Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$

Το γινόμενο των άκρων όρων μιας αναλογίας είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων της.

  - Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}}$ Αν αλλάξουμε τη θέση των μέσων όρων μιας αναλογίας προκύπτει αναλογία.

Απόδειξη:
Δίνεται η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0$
Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων δηλαδή: $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$

Διαιρούμε και τα δύο μέρη της πιο πάνω ισότητας με το $\gamma\cdot\delta$ $\frac{\alpha\cdot\delta}{\gamma\cdot\delta}=\frac{\beta\cdot\gamma}{\gamma\cdot\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

- Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}}$ Αν αλλάξουμε τη θέση των άκρων όρων μιας αναλογίας προκύπτει αναλογία.

Απόδειξη:
Δίνεται η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ $\quad \alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0$
Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων δηλαδή: $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$

Διαιρούμε και τα δύο μέρη της πιο πάνω ισότητας με το $\alpha\cdot\beta\neq 0$: $\frac{\alpha\cdot\delta}{\alpha\cdot\beta}=\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\beta}\Leftrightarrow\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$

- Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}}$ Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τους επόμενους όρους στους αντίστοιχους ηγούμενους όρους μιας αναλογίας προκύπτει αναλογία.

Απόδειξη:
Δίνεται η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\neq 0$
Προσθέτουμε και στα δύο μέρη της αναλογίας τη μονάδα και έχουμε: $\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι: $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$

- Αν $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\cdots=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots}{\beta+\delta+\zeta+\cdots}}$ Αν προσθέσουμε όλους τους ηγούμενους όρους μιας αναλογίας μεταξύ τους και όλους τους επόμενους όρους μεταξύ τους, ο λόγος που προκύπτει είναι ίσος με τους προηγούμενους λόγους της αναλογίας.

Απόδειξη:
Δίνεται η αναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$, $\beta,\delta,\zeta\neq 0$
Θέτουμε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\lambda$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha}{\beta}=\lambda\Rightarrow\alpha=\lambda\cdot\beta\\ \frac{\gamma}{\delta}=\lambda\Rightarrow\gamma=\lambda\cdot\delta\\ \frac{\varepsilon}{\zeta}=\lambda\Rightarrow\varepsilon=\lambda\cdot\zeta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha+\gamma+\varepsilon=\lambda\cdot\beta+\lambda\cdot\delta+\lambda\cdot\zeta\quad\Rightarrow\alpha+\gamma+\varepsilon=\lambda(\beta+\delta+\zeta)$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}=\lambda$$

Άρα ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$

Αν επεκτείνουμε την πιο πάνω διαδικασία θα πάρουμε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\cdots=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots}{\beta+\delta+\zeta+\cdots}$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν λόγο $7 : 5$ και διαφορά 40.

Λύση:

Έστω ότι ο ένας αριθμός είναι α και ο άλλος β.

Άρα,

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και $\alpha - \beta = 40$.

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5}$

Αλλάζω θέση στους μέσους, για να προκύψουν ως ηγούμενοι οι αριθμοί α και β.

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha-\beta}{7-5} = \frac{40}{2} = 20$

Εφαρμόζω την ιδιότητα των αναλογιών.

Υπολογίζω τον αριθμό α:

$\frac{\alpha}{7} = 20 \Leftrightarrow \alpha = 140$

Υπολογίζω τον αριθμό β:

$\frac{\beta}{5} = 20 \Leftrightarrow \beta = 100$

2. Η κατανάλωση του ηλεκτρικού ρεύματος μιας οικίας χρεώνεται με βάση το διπλανό πίνακα. Επιπλέον ο καταναλωτής χρεώνεται με μια σταθερή επιβάρυνση €4,85 και 15% Φ.Π.Α. Να υπολογίσετε πόσα θα πληρώσει ένας καταναλωτής που είχε συνολική κατανάλωση 385 KW.

Κατανάλωση σε KW	Χρέωση ανά KW
$0 - 120$	προς €0,23
$120 - 320$	προς €0,24
$320 - 400$	προς €0,25
$400 - 900$	προς €0,26
900 και άνω	προς €0,27

Λύση:

Υπολογίζουμε τη χρέωση ως εξής:

Κατανάλωση	Χρέωση
Για τις πρώτες 120 KW	$120 \cdot 0{,}23 = 27{,}60$
Για τις επόμενες 200 KW	$200 \cdot 0{,}24 = 48{,}00$
Οι υπόλοιπες 65 KW	$65 \cdot 0{,}25 = 16{,}25$
Σταθερή επιβάρυνση	4,85
ΣΥΝΟΛΟ	96,70

<u>Α΄ τρόπος:</u>

Στη χρέωση θα προστεθεί το Φ.Π.Α. , δηλαδή το 15% του €96,70

$\frac{15}{100} \cdot 96{,}70 = 14{,}505$

Άρα το συνολικό ποσό που πρέπει να πληρώσει ο καταναλωτής είναι:

$$96{,}70 + 14{,}505 = 111{,}205$$

Η χρέωση στρογγυλοποιείται σε δύο δεκαδικά ψηφία. Άρα στον λογαριασμό θα αναγράφεται €111,21

<u>Β΄ τρόπος:</u>

Στην χρέωση θα προστεθεί το Φ.Π.Α. 15%, δηλαδή σε μια χρέωση €100, θα προστεθεί €15 άρα η συνολική χρέωση θα είναι €115. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αναλογίας μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο θα είναι η συνολική χρέωση για το ποσό των €96,70

Άρα,

Χρέωση (σε €)	*Φ.Π.Α. (σε €)*	*Συνολική χρέωση (σε €)*
100	15	115
96,70		x

$\frac{100}{96,70} = \frac{115}{x} \quad \Leftrightarrow 100x = 115 \cdot 96,70 \quad \Leftrightarrow x = \frac{115 \cdot 96,70}{100} \quad \Leftrightarrow x = 111,205$

Η χρέωση στρογγυλοποιείται σε δύο δεκαδικά ψηφία. Άρα στο λογαριασμό θα αναγράφεται €111,21

3. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα το ποσόν των €2300 και μετά 1 χρόνο έκανε ανάληψη των χρημάτων και πήρε €2470. Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε το συγκεκριμένο κεφάλαιο;

Επιτόκιο είναι το ποσοστό % που η τράπεζα χρεώνει στο δανεισμό ή πιστώνει στις καταθέσεις.

Λύση:

Το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα: $ΚΕΦΑΛΑΙΟ(Κ) = €2300$

Το ποσό έγινε μετά από 1 χρόνο: $ΚΕΦΑΛΑΙΟ(Κ) + ΤΟΚΟΣ(Τ) = €2415$

Άρα $ΤΟΚΟΣ = 2415 - 2300 = 115$

$$115 = Ε \cdot 2300$$
$$\Leftrightarrow 115 = 2300\, Ε$$
$$\Leftrightarrow Ε = 115 : 2300$$
$$\Leftrightarrow Ε = 0,05 = \frac{5}{100} = 5\%$$

Το Επιτόκιο της τράπεζας είναι 5%.

4. Δίνεται η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, $\beta\delta \neq 0$. Να δείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3\alpha+4\gamma}{3\beta+4\delta}$.

Λύση:

Θέτουμε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ $\qquad (1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = \lambda \Rightarrow \alpha = \lambda\beta \\ \frac{\gamma}{\delta} = \lambda \Rightarrow \gamma = \lambda\delta \end{cases}$

Αντικαθιστούμε τα α και γ στο δεύτερο μέρος της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε:

$$\frac{3\alpha + 4\gamma}{3\beta + 4\delta} = \frac{3 \cdot \lambda\beta + 4 \cdot \lambda\delta}{3\beta + 4\delta} = \frac{\lambda(3\beta + 4\delta)}{3\beta + 4\delta} = \lambda \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) *και* (2) *προκύπτει η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε:* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3\alpha+4\gamma}{3\beta+4\delta}$

Δραστηριότητες

1. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$. Να βρείτε τους λόγους:

   (α) $\frac{x+y}{y}$ (β) $\frac{x+y}{x}$ (γ) $\frac{x+5}{y+6}$ (δ) $\frac{x}{5}$

2. Δίνεται η αναλογία: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}$. Να προσδιορίσετε την τιμή του y, ώστε να ισχύει $x + y + z = 20$.

3. Σε ένα γυμνάσιο το 25% των μαθητών φοιτούν στην Α΄ Γυμνασίου και το 35% στη Β΄ Γυμνασίου. Πόσοι είναι οι μαθητές της Γ΄ τάξης , αν όλοι οι μαθητές είναι 480;

4. Ένα κατάστημα προσφέρει 25% έκπτωση στην αρχική τιμή σε όλα τα προϊόντα του. Να υπολογίσετε την τελική τιμή ενός προϊόντος αν η αρχική του τιμή είναι €120.

5. Σε έρευνα της τροχαίας στα 450 αυτοκίνητα οι 90 οδηγοί δεν φορούσαν ζώνη και στις 280 μοτοσυκλέτες το 25% των οδηγών δεν φορούσε κράνος.
   (α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών των αυτοκινήτων που φορούσε ζώνη ασφαλείας.
   (β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των μοτοσικλετιστών που δεν φορούσαν κράνος.
   (γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών που παρανομούσαν (επί του συνόλου των οδηγών).

6. Τρεις ψαράδες αγόρασαν συνεταιρικά ένα καΐκι και τον εξοπλισμό του. Ο πρώτος έβαλε κεφάλαιο €6000, ο δεύτερος €10000 και ο τρίτος €4000. Μέσα σε ένα χρόνο, είχαν κέρδος €40000. Να υπολογίσετε το μερίδιο από τα κέρδη που θα έχει ο καθένας από τους τρεις ψαράδες.

7. Ένα χρηματικό έπαθλο €150 μοιράστηκε στους πρώτους τρεις νικητές ενός διαγωνισμού σύμφωνα με τον αριθμό των σωστών απαντήσεών τους. Ο πρώτος απάντησε σωστά σε 12 ερωτήσεις, ο δεύτερος σε 10 και ο τρίτος σε 8. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.

8. Τέσσερα άτομα, ο Δημήτρης, ο Άλκης, ο Βαγγέλης και ο Γιώργος, δούλεψαν σε μια εργολαβία και χρέωσαν €1600. Να υπολογίσετε πόσες ώρες δούλεψε ο Δημήτρης, αν γνωρίζετε ότι ο Άλκης δούλεψε 6 ώρες, ο Βαγγέλης και ο Γιώργος από 8 ώρες και ότι ο Δημήτρης πήρε €720.

9. Ο κύριος Μανώλης πήρε αύξηση στο μισθό του. Να υπολογίσετε το ποσοστό αύξησης του μισθού του, αν ο μισθός του από €900 έγινε €990;

10. Ο πληθυσμός μιας πόλης το έτος 2009 ήταν 25000 κάτοικοι. Το 2010 αυξήθηκε κατά 8%, το 2011 κατά 3% και το 2012 μειώθηκε κατά 1,5%. Να βρείτε τον τελικό πληθυσμό του 2012.

11. Μια κτηματική εταιρεία αγόρασε ένα διατηρητέο σπίτι για €90000. Πλήρωσε επιπλέον €40000 για την ανακαίνισή του. Το κράτος επιχορηγεί το κόστος ανακαίνισης με 35%. Πόσα χρήματα επέστρεψε το κράτος στην εταιρεία;

12. Τον Απρίλιο διοργανώθηκε μία εκδήλωση στη Λευκωσία. Τα έσοδα της εκδήλωσης δόθηκαν για ενίσχυση του ταμείου του Ραδιομαραθωνίου. Το κανονικό εισιτήριο της εκδήλωσης ήταν €400, για τους συνταξιούχους ήταν €320 και για τα παιδιά €250. Στην εκδήλωση έλαβαν μέρος 50 άτομα, από τα οποία το 20% ήταν συνταξιούχοι και εισπράχθηκε συνολικά από όλους τους συμμετέχοντες το ποσό των €17700.
    (α) Να υπολογίσετε τι ποσοστό έκπτωσης έγινε στο εισιτήριο των συνταξιούχων.
    (β) Να υπολογίσετε πόσοι συνταξιούχοι και πόσα παιδιά έλαβαν μέρος στην εκδήλωση.

13. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα το ποσόν των €22000 και μετά από 1 χρόνο έκανε ανάληψη των χρημάτων και πήρε €22880. Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε το συγκεκριμένο κεφάλαιο;

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Δίνεται η αναλογία $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{5}$. Να υπολογίσετε τους λόγους:

   (α) $\frac{\alpha}{\beta}$ (β) $\frac{\alpha-3}{3}$ (γ) $\frac{\beta+5}{5}$ (δ) $\frac{\alpha+\beta}{8}$

2. Ένα αθλητικό σωματείο πώλησε λαχνούς των €100 για την ανέγερση του οικήματος του. Οι λαχνοί συμμετέχουν σε κλήρωση με μεγάλο έπαθλο €5000 και άλλα πλούσια δώρα. Τρεις φίλοι έδωσαν το ποσό €20, €30 και €50, αντίστοιχα, και αγόρασαν ένα λαχνό των €100. Να υπολογίσετε τι ποσό πρέπει να πάρει ο καθένας τους, αν κερδίσουν το μεγάλο έπαθλο;

3. Οι υπάλληλοι που δουλεύουν σε μια υπεραγορά δικαιούνται έκπτωσή 20% στις αγορές τους στα είδη του αρτοποιείου. Πόσα θα πληρώσει ένας υπάλληλος της υπεραγοράς, αν αγόρασε είδη αρτοποιείου αξίας €$32{,}50$;

4. Ένας έμπορος αγόρασε 20 στερεοφωνικά προς €240 το ένα και πλήρωσε 10% της συνολικής αξίας τους για έξοδα μεταφοράς. Θέλει να τα πωλήσει με 20% κέρδος. Πόσα θα εισπράξει συνολικά;

5. Τρεις τεχνίτες πήραν από μια εργασία €3240. Ο πρώτος ως εργοδηγός πήρε το 20% του ποσού. Τα υπόλοιπα μοιράστηκαν ανάλογα με τις ημέρες εργασίας των ατόμων. Αν ο πρώτος εργάστηκε 15 ημέρες ο δεύτερος 12 ημέρες και ο τρίτος 18 ημέρες, πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

6. Μια χορηγία €36000 του Δήμου θα μοιραστεί στα σχολεία της περιφέρειας, ανάλογα με τον αριθμό των μαθητών τους. Το A έχει 300, το B 350 και το Γ 550 μαθητές. Το μεγαλύτερο σχολείο αποφάσισε να δωρίσει το 20% των χρημάτων που θα πάρει σε ένα σχολείο της Κένυας. Να υπολογίσετε τι ποσό θα κρατήσει το σχολείο.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Ανισώσεις
Απόλυτη Τιμή

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ανισώσεις

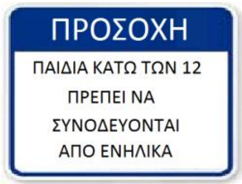
Διερεύνηση (1)

- Πιο κάτω φαίνονται τέσσερις πινακίδες:

Στάθμευση

Ταχύτητα

Ζωολογικός Κήπος



Πρόγραμμα τηλεόρασης

ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΓΙΑ ΑΤΟΜΑ ΑΝΩ ΤΩΝ 18

α) Ο Κώστας στάθμευσε 13 λεπτά δίπλα από την πινακίδα της στάθμευσης. Είναι μέσα στον επιτρεπόμενο χρόνο;

β) Ένας οδηγός τρέχει μέσα στην πόλη με ταχύτητα 70 km/h. Ξεπερνά το πιο πάνω όριο ταχύτητας ή όχι;

γ) Να δηλώσετε τρεις ηλικίες παιδιών που πρέπει να συνοδεύονται στο ζωολογικό κήπο και τρεις ηλικίες παιδιών που δεν θα πρέπει κατ΄ ανάγκη να συνοδεύονται.

δ) Μπορούν να παρακολουθήσουν το πρόγραμμα της τηλεόρασης οι μαθητές του γυμνασίου;

ε) Να διατυπώσετε μία μαθηματική πρόταση για την κάθε πινακίδα.

Διερεύνηση (2)

- Ένας φωτογράφος εργάζεται σε ένα περιοδικό. Κάθε μήνα παίρνει βασικό μισθό €500. Για κάθε φωτογραφία του που δημοσιεύεται στο περιοδικό, πληρώνεται επιπλέον €20.
  - Πόσες φωτογραφίες του πρέπει να δημοσιεύονται στο περιοδικό, για να πάρει συνολικό μισθό μεγαλύτερο από €1200;

Μαθαίνω

- Στην καθημερινή ζωή πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε δυο μεγέθη με μια σχέση ισότητας ή ανισότητας, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $<, >, \leq, \geq, =$.
  Φορά ανισότητας: Με τα σύμβολα $<, \leq$, τοποθετούμε το μικρότερο αριστερά και το μεγαλύτερο δεξιά, ενώ με τα σύμβολα $>, \geq$, τοποθετούμε το μεγαλύτερο αριστερά και το μικρότερο δεξιά.

  Ιδιότητες Ανισοτήτων

  - Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον **ίδιο αριθμό**, τότε προκύπτει μια νέα ανισότητα **με την ίδια φορά**.

  Για παράδειγμα:
  $5 > 3$
  $5 + 4 = 9$ και $3 + 4 = 7$ *Προσθέτουμε 4 και στα δύο μέλη της ανισότητας*
  Παρατηρούμε ότι $9 > 7$. Επομένως, διατηρείται η φορά της ανισότητας.

  Γενικά:
  - Αν $A < B \Leftrightarrow A + \Gamma < B + \Gamma$ ή $A - \Gamma < B - \Gamma$
  - Αν $A > B \Leftrightarrow A + \Gamma > B + \Gamma$ ή $A - \Gamma > B - \Gamma$

- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον **ίδιο θετικό αριθμό**, τότε προκύπτει μια νέα ανισότητα **με την ίδια φορά**.

  Για παράδειγμα:
  $5 > 3$
  $5 \cdot 4 = 20$ και $3 \cdot 4 = 12$ *Πολλαπλασιάζουμε επί 4 και τα δύο μέλη της ανισότητας*
  Παρατηρούμε ότι $20 > 12$. Επομένως, διατηρείται η φορά της ανισότητας.

  Γενικά:
  - Αν $A < B$ και $\Gamma > 0 \Leftrightarrow A \cdot \Gamma < B \cdot \Gamma$ και $\frac{A}{\Gamma} < \frac{B}{\Gamma}$
  - Αν $A > B$ και $\Gamma > 0 \Leftrightarrow A \cdot \Gamma > B \cdot \Gamma$ και $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$

- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον **ίδιο αρνητικό αριθμό**, τότε προκύπτει μια νέα ανισότητα **με αντίθετη φορά**.

  Για παράδειγμα:
  $8 > 6$
  $8 : (-2) = -4$ και $6 : (-2) = -3$
  Παρατηρούμε ότι $-4 < -3$. Άρα, η νέα ανισότητα έχει αντίθετη φορά.

  Γενικά:
  - Αν $A < B$ και $\Gamma < 0 \Leftrightarrow A \cdot \Gamma > B \cdot \Gamma$ και $\frac{A}{\Gamma} > \frac{B}{\Gamma}$
  - Αν $A > B$ και $\Gamma < 0 \Leftrightarrow A \cdot \Gamma < B \cdot \Gamma$ και $\frac{A}{\Gamma} < \frac{B}{\Gamma}$

  - Η ***ανισότητα*** που περιέχει μεταβλητή ονομάζεται ***ανίσωση***.
    Για παράδειγμα: $x + 5 > 4$

➢ ***Λύση της ανίσωσης*** είναι η τιμή της μεταβλητής που την επαληθεύει.
Για κάθε ανίσωση ορίζεται ένα σύνολο λύσεων του οποίου κάθε στοιχείο επαληθεύει την ανίσωση.
<u>Για παράδειγμα:</u> $x+5>4 \Leftrightarrow x+5-5>4-5 \Leftrightarrow x>-1$
Λύση της ανίσωσης είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του -1, δηλαδή $\{x\epsilon\mathbb{R}, x>-1\}$.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $2x-4 \leq 4x+7$ και να παρασταθεί γραφικά η λύση της.

Λύση:

$2x-4 \leq 4x+7$

$\Leftrightarrow 2x-4x \leq 7+4$ *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους*

$\Leftrightarrow -2x \leq +11$ *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων*

$\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \geq \frac{+11}{-2}$ *Διαιρούμε με το συντελεστή του άγνωστου όρου, δηλαδή το -3.*

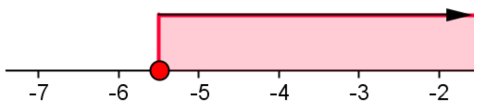
Ο συντελεστής είναι αρνητικός.

Άρα, θα προκύψει ανίσωση με αντίθετη φορά.

$\Leftrightarrow x \geq -5\frac{1}{2}$

<u>Επίλυση ανίσωσης</u>
i. *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.*
ii. *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.*
iii. *Διαιρούμε με το συντελεστή του άγνωστου όρου.*
Αν ο συντελεστής είναι θετικός η ανισότητα δεν αλλάζει φορά.
Αν ο συντελεστής είναι αρνητικός αλλάζει η φορά.

Η ανίσωση είναι αληθής για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής x που είναι μεγαλύτερη ή και ίση του αριθμού $-5\frac{1}{2}$, δηλαδή $\left\{x\epsilon\mathbb{R}, x \geq -5\frac{1}{2}\right\}$.
Το $x \geq -5\frac{1}{2}$ μπορούμε να το αναπαραστήσουμε γραφικά ως εξής:



2. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2(x-4)}{3} \leq \frac{x+8}{2} - \frac{4x-5}{6}$.

Λύση:

$6 \cdot \frac{2(x-4)}{3} \leq 6 \cdot \frac{(x+8)}{2} - 6 \cdot \frac{(4x-5)}{6}$ *Πολλαπλασιάζουμε τους όρους με το Ε.Κ.Π. δηλαδή τον αριθμό 6, για να απαλείψουμε τους παρονομαστές.*

$\Leftrightarrow 4(x-4) \leq 3 \cdot (x+8) - (4x-5)$ *Κάνουμε τις πράξεις*

$\Leftrightarrow 4x - 16 \leq 3x + 24 - 4x + 5$

$\Leftrightarrow 4x - 3x + 4x \leq 24 + 5 + 16$ *Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους*

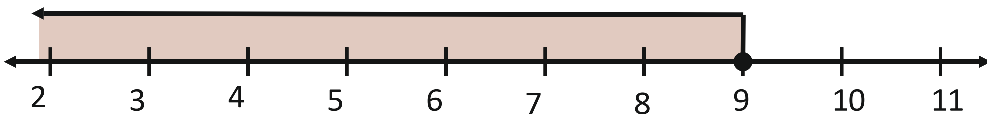
$\Leftrightarrow 5x \leq 45$ *Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων*

$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} \leq \frac{45}{5}$ *Διαιρούμε με το συντελεστή του άγνωστου όρου*

$\Leftrightarrow x \leq 9$ ή

Η ανίσωση είναι αληθής για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής x μικρότερη ή ίση του 9, δηλαδή $\{x\epsilon\mathbb{R}, x \leq 9\}$.

Γραφικά το $x \leq 9$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:



3. Να λυθεί η ανίσωση: $3x - 5 + x > 4x + 3$

Λύση:

$3x + x - 4x > +3 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0x > 8$

Παρατηρούμε ότι η ανίσωση δεν αληθεύει για καμιά τιμή της μεταβλητής x.
Δηλαδή η ανίσωση είναι ***αδύνατη***.

4. Να λυθεί η ανίσωση: $3x - 5 + x < 4x + 3$

Λύση:

$3x + x - 4x < +3 + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0x < 8$
Παρατηρούμε ότι η ανίσωση είναι ***αληθής για κάθε τιμή*** της μεταβλητής x.

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες:

Παράδειγμα: Αν $x < 3 \Leftrightarrow x + 3 < 3 + 3$

α) Αν $x < -3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}$………..

β) Αν $x > -2 \Leftrightarrow x - 2$………..

γ) Αν $x > 5 \Leftrightarrow x - 3$………..

δ) Αν $x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{x}{-3}$………..

ε) Αν $x \geq -2 \Leftrightarrow 2x$………..

ε) Αν $x < 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}$……….

στ) Αν $x < 7 \Leftrightarrow -3x$………..

ζ) Αν $x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4x$………..

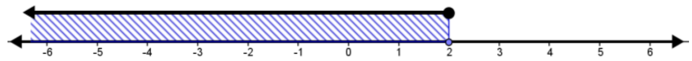
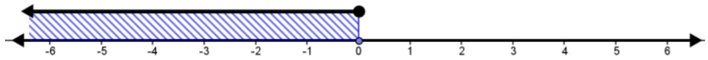
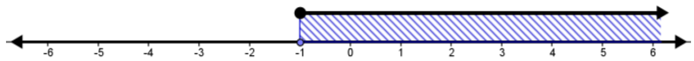
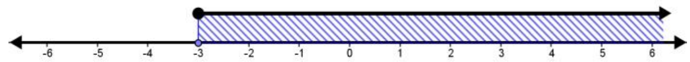
2. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

α)	Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - 16 < \beta - 16$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
β)	Αν $\alpha < \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
γ)	Αν $\alpha < 0$ τότε $2\alpha < \alpha$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
δ)	Αν $\alpha < 5$ τότε $\alpha < 8$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
ε)	Αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
στ)	Η ανίσωση $3x - 5 > 7$ έχει λύση τον αριθμό 4.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
ζ)	Η ανίσωση $2x - 3 < 3x - 2$ έχει λύση τους αριθμούς $x < 1$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

3. Δίνεται η ανίσωση $x > 2$

α) Να δώσετε πέντε αριθμούς που επαληθεύουν την πιο πάνω ανίσωση.
β) Να δώσετε τις τρεις μικρότερες ακέραιες λύσεις της ανίσωσης.
γ) Ο αριθμός 2 είναι λύση της ανίσωσης ;
δ) Πόσες λύσεις έχει η παραπάνω ανίσωση;

4. Δίνονται οι γραφικές λύσεις ανισώσεων. Να επιλέξετε τις αντίστοιχες αλγεβρικές λύσεις:

I.		α) $x \geq 2$ β) $x < 2$ γ) $x \leq 2$ δ) $x > 2$
II.		α) $x \geq 0$ β) $x \leq 0$ γ) $x > 0$ δ) $x < 0$
III.		α) $x \leq -1$ β) $x > -1$ γ) $x \geq -1$ δ) $x < -1$
IV.		α) $x \geq -3$ β) $x \leq -3$ γ) $x > -3$ δ) $x < -3$

5. Να υπολογίσετε ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι λύση της ανίσωσης $-7\omega < 21$.

6. Να βάλετε σε κύκλο τους αριθμούς που επαληθεύουν την ανίσωση $3x < 15$:

$$-2,\ \ 8,\ \ 0,\ \ -\frac{1}{2},\quad 5\,,\quad -6\frac{1}{3}$$

7. Δίνεται η ανίσωση $3t - 9 < 0$

   α) Να λύσετε την ανίσωση.

   β) Να δώσετε τρεις τιμές του t που επαληθεύουν την ανίσωση.

Διαστήματα

Διερεύνηση

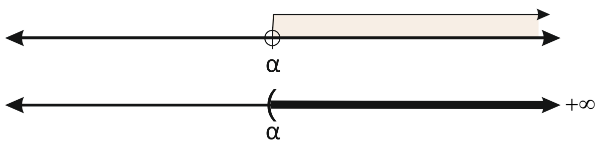
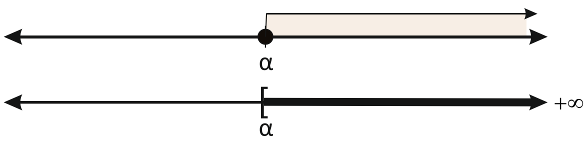
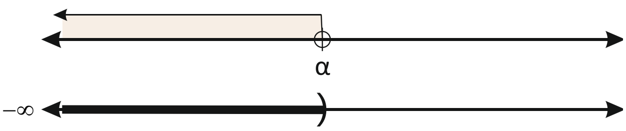
Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 4 \geq x - 2$ και $2x + 3 < 13$.

- Να βρείτε τις λύσεις της καθεμιάς.
- Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις;
- Να υπολογίσετε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.
- Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.
- Να βρείτε ένα τμήμα της ευθείας των πραγματικών αριθμών που συμπεριλαμβάνει το σύνολο των λύσεων που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.

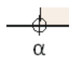
Μαθαίνω

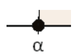
- Το σύνολο των λύσεων μιας ανίσωσης ή το σύνολο των κοινών λύσεων δύο ανισώσεων (σύστημα ανισώσεων) μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή διαστήματος ή διαστημάτων πραγματικών αριθμών.

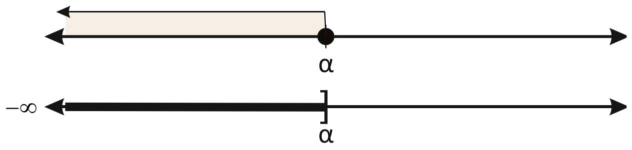
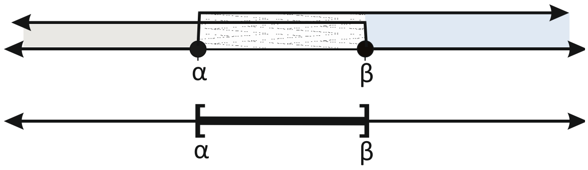
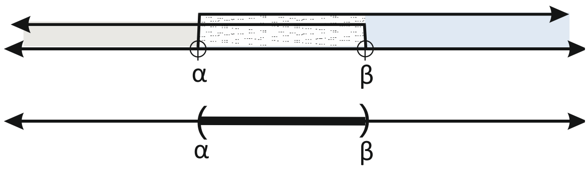
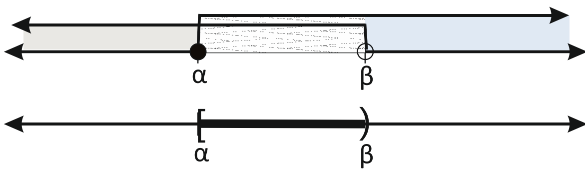
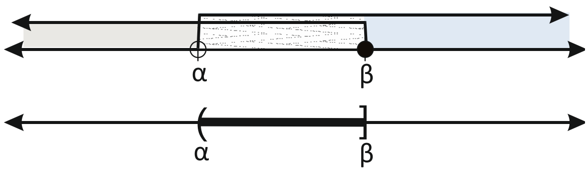
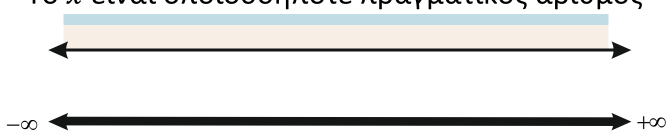
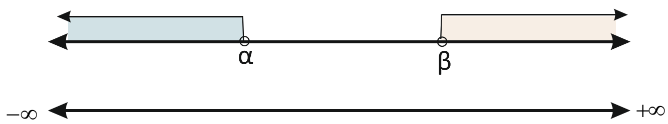
Διαστήματα

Ανίσωση	**Γραφική Αναπαράσταση της Λύσης της Ανίσωσης και του Διαστήματος**	**Συμβολική Αναπαράσταση**
$x > a$	Το x είναι μεγαλύτερο του a 	$x \in (\alpha, +\infty)$ *Όταν ένα άκρο του διαστήματος δεν ανήκει στο διάστημα χρησιμοποιούμε το σύμβολο της παρένθεσης και το διάστημα λέγεται **ανοικτό** στο άκρο αυτό*[1].
$x \geq a$	Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a 	$x \in [\alpha, +\infty)$ *Όταν ένα άκρο του διαστήματος ανήκει στο διάστημα, χρησιμοποιούμε το σύμβολο της αγκύλης και το διάστημα λέγεται **κλειστό** στο άκρο αυτό*[2].
$x < a$	Το x είναι μικρότερο του a 	$x \in (-\infty, \alpha)$

---

[1] Στην γραφική αναπαράσταση της λύσης της ανίσωσης χρησιμοποιούμε το σύμβολο  όταν η τιμή α δεν συμπεριλαμβάνετε στη λύση της ανίσωσης.

[2] Στην γραφική αναπαράσταση της λύσης της ανίσωσης χρησιμοποιούμε το σύμβολο  όταν η τιμή α δεν συμπεριλαμβάνετε στη λύση της ανίσωσης.

$x \leq a$	Το x είναι μικρότερο ή ίσο του a 	$x \in (-\infty, a]$
$a \leq x \leq \beta$	Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a και μικρότερο ή ίσο του β 	$x \in [\alpha, \beta]$
$a < x < \beta$	Το x είναι μεγαλύτερο του a και μικρότερο του β 	$x \in (\alpha, \beta)$
$a \leq x < \beta$	Το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a και μικρότερο του β 	$x \in [\alpha, \beta)$
$a < x \leq \beta$	Το x είναι μεγαλύτερο του a και μικρότερο ή ίσο του β 	$x \in (\alpha, \beta]$
$-\infty < x < +\infty$	Το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός 	$x \in \mathbb{R}$
$x < a$ και $x > \beta$ με $a < \beta$	Το x είναι μικρότερο του a και μεγαλύτερο του β με $a < \beta$ 	$x \notin \mathbb{R}$

*Οι αριθμοί α και β των πιο πάνω διαστημάτων λέγονται **άκρα** του διαστήματος και κάθε αριθμός μεταξύ τους λέγεται **εσωτερικό σημείο** του διαστήματος.*

π.χ. Το διάστημα $[3,5]$ είναι κλειστό, το διάστημα $(-1,5)$ είναι ανοικτό και το διάστημα $[0,9)$ είναι κλειστό αριστερά και ανοικτό δεξιά.

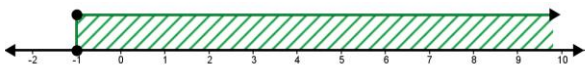
Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $2x-1 \geq x-2$ και $\frac{x+6}{3} < 5$.

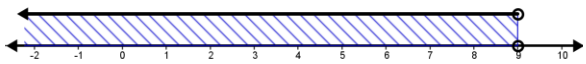
Λύση:

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

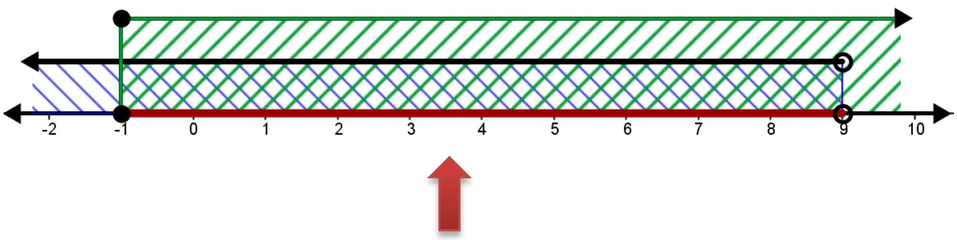
$$2x-1 \geq x-2$$
$$\Leftrightarrow 2x-x \geq 1-2$$
$$\Leftrightarrow x \geq -1$$



$$\frac{x+6}{3} < 5$$
$$\Leftrightarrow x+6 < 15$$
$$\Leftrightarrow x < 15-6$$
$$\Leftrightarrow x < 9$$



Στην συνέχεια παριστάνουμε στην ίδια ευθεία των πραγματικών αριθμών τις παραστάσεις των λύσεων των δύο ανισώσεων και σκιάζουμε την **κοινή** λύση:



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι το σύνολο:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 9\} \quad \text{ή} \quad x \in [-1,9)$$

2. Η μηνιαία κάρτα διαδρομών με το λεωφορείο κοστίζει €36. Μία απλή διαδρομή χωρίς κάρτα κοστίζει € 0,65. Να υπολογίσετε πόσες διαδρομές το μήνα πρέπει να κάνει κάποιος, για να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά της κάρτας;

Λύση:

Θέτουμε x τον αριθμό των απλών διαδρομών με το λεωφορείο. Τότε το γινόμενο $0,65 \cdot x$ θα είναι το συνολικό κόστος που έχει κάποιος μηνιαία. Άρα, για να συμφέρει η αγορά της μηνιαίας κάρτας πρέπει να ισχύει η ανίσωση:

$$0,65 \cdot x > 36 \Leftrightarrow \ x > 36: 0,65 \Leftrightarrow x > 55,38 \ .$$

Αν κάποιος κάνει με το λεωφορείο περισσότερες από 55 διαδρομές μηνιαίως, τότε τον συμφέρει η αγορά της μηνιαίας κάρτας.

3. Μια βιομηχανία κατασκευής κλιματιστικών έκανε έλεγχο αξιοπιστίας των νέων μοντέλων κλιματιστικών της με στατιστικά δεδομένα που συνέλεξε. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που μελετήθηκαν βρέθηκε ότι το ποσοστό ελαττωματικών κλιματιστικών είναι $7,2\% \pm 2,8\%$. Η πολιτική της εταιρίας είναι να αποζημιώνει με €200 κάθε ελαττωματικό κλιματιστικό. Τον επόμενο χρόνο αναμένεται ότι θα πωλήσει 10000 κλιματιστικά και αποφάσισε να προϋπολογίσει ότι ένα πιθανό ποσό που θα χρειαστεί για αποζημιώσεις είναι €80000. Να μελετήσετε κατά πόσο η απόφαση της βιομηχανίας είναι ορθή ή λάθος.

Λύση

Αν $y\%$ είναι το ποσοστό των ελαττωματικών κλιματιστικών, τότε

$$7,2 - 2,8 \leq y \leq 7,2 + 2,8 \ \text{ και } \ 4,4 \leq y \leq 10$$

Αν x ο αριθμός των ελαττωματικών κλιματιστικών, τότε:

$$x = 10000y\% \Longrightarrow x = 100y$$

$$440 \leq x \leq 1000 \Rightarrow x \in [440, 1000] \quad \text{ή} \quad x \in [440, 1000]$$

Το ποσό Α που θα χρειαστεί η βιομηχανία για αποζημιώσεις θα είναι:

$88000 \leq A \leq 200000 \Rightarrow A \in [88000, 200000]$ και $80000 \notin [88000,200000]$

Άρα, το ποσόν που έχει προϋπολογιστεί δεν είναι ικανοποιητικό και η απόφαση της βιομηχανίας είναι λάθος.

Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τη λύση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

α) $3y - 4 > y - 2$

β) $2(x-1)+3<5$

γ) $1-3(x-2) \leq 10$

δ) $\frac{3(\alpha-4)}{5}-\frac{5\alpha-1}{10}>\frac{5+\alpha}{3}$

ε) $4-5(\alpha-2) \geq 13-3(\alpha+1)$

2. Ο κύριος Λιμνιώτης διαθέτει μια δεξαμενή χωρητικότητας $48m^3$ για αποθήκευση νερού. Η δεξαμενή ήταν κενή. Γεμίζει τη δεξαμενή με ρυθμό 2,5 m^3 / h. Να βρείτε:

α) Πόσο νερό θα υπάρχει στη δεξαμενή, αν η παροχή νερού παραμείνει ανοικτή για 24 ώρες.

β) Σε πόσες ώρες πρέπει να κλείσει την παροχή νερού, ώστε η δεξαμενή να μην υπερχειλίσει.

3. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου με μήκος $80m$, περίμετρο μικρότερη από $240\ m$ και εμβαδόν μεγαλύτερο από $3000\ m^2$. Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του;

4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $x<5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x\geq -2$

β) $2x-5<1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 5+x>4$

γ) $3(2x-1)\leq 2(1-x)\ \kappa\alpha\iota\ \ x\geq 0$

δ) $3(2x-1)<2(1-x)\ \kappa\alpha\iota\ \ x<0$

ε) $\frac{x-2}{3}+\frac{7}{6}<\frac{x-5}{4}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \frac{3x}{4}-\frac{5}{6}>\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$

5. Να εκφράσετε τα διαστήματα που ακολουθούν σε μορφή ανισώσεων και να τα παρουσιάσετε γραφικά στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

α. (2,7) β. (-3,3) γ. [-4,4] δ. $(-\frac{2}{3},\frac{3}{5})$ ε. $(-\infty,5]$

στ. $(-\infty,-5)$ ζ. $(\sqrt{3},8]$ η. $(-\infty,\pi)$ θ. $[-2,\pi)$ ι. $(-\infty,+\infty)$

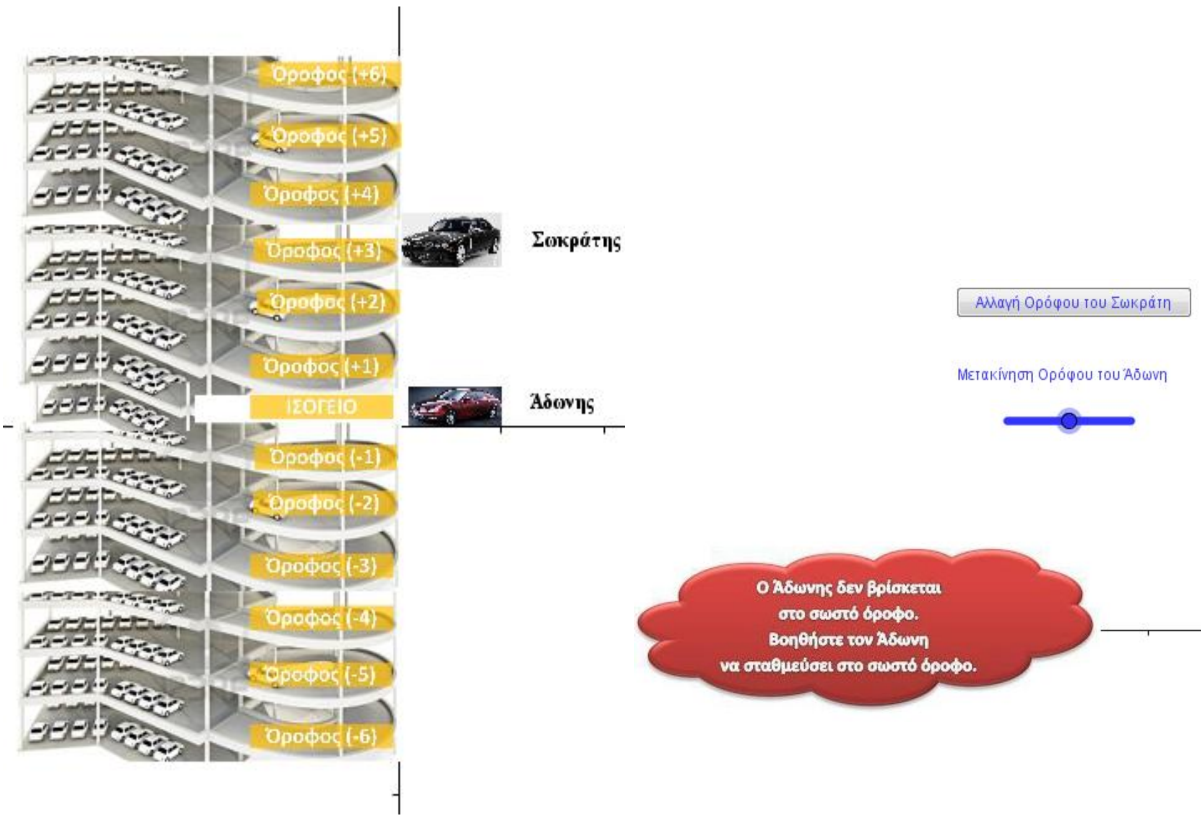
6. Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία (ΚΥ.Μ.Ε.) αποφάσισε να δίνει βραβείο €500 σε κάθε μαθητή που παίρνει βαθμό 39 ή 40 στον ετήσιο διαγωνισμό της. Το ποσοστό των μαθητών που αναμένεται να παίρνουν 39 ή 40 είναι $0{,}05\% \pm 0{,}01\%$. Τι ποσό χρημάτων πρέπει να μεριμνήσει να έχει η ΚΥ.Μ.Ε. για τα βραβεία, αν φέτος αναμένεται να λάβουν μέρος στο διαγωνισμό 2000 μαθητές;

Απόλυτη Τιμή

Εξερεύνηση

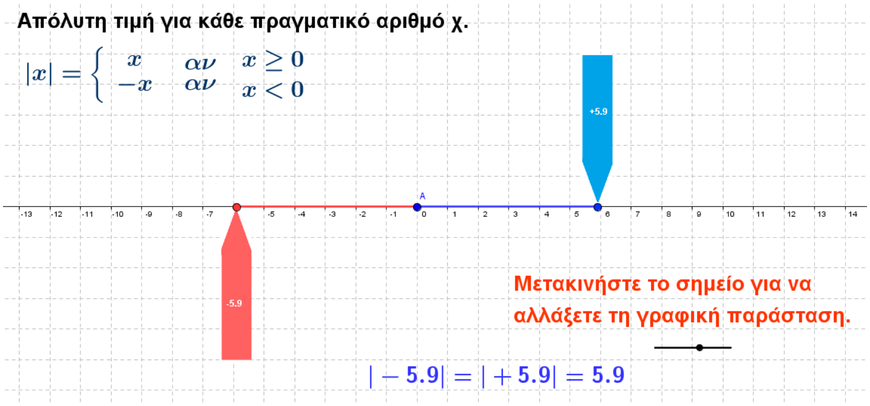
Μια εταιρεία διαθέτει ένα πολυώροφο κτήριο στάθμευσης με έξι υπέργειους και έξι υπόγειους ορόφους. Χρεώνει για στάθμευση μιας μέρας ανάλογα με την απόσταση του ορόφου που σταθμεύει κάποιος και η πληρωμή γίνεται με προπληρωμένη κάρτα. Η χρέωση για στάθμευση στο ισόγειο είναι €0. Αν κάποιος σταθμεύσει στον πρώτο όροφο θα πληρώσει €1, αν σταθμεύσει στον τρίτο όροφο θα πληρώσει €3, αν σταθμεύσει στο -2, θα πληρώσει €2, στο -5 €5 κτλ. Ο Σωκράτης και ο Άδωνης σταθμεύουν στο κτήριο στάθμευσης καθημερινά. Έχουν συμφωνία μεταξύ τους να πληρώνουν το ίδιο ποσό για στάθμευση για κάθε μέρα με κανόνα όμως να μην σταθμεύουν στον ίδιο όροφο. Εξαίρεση στον πιο πάνω κανόνα αποτελεί η στάθμευση στο ισόγειο.

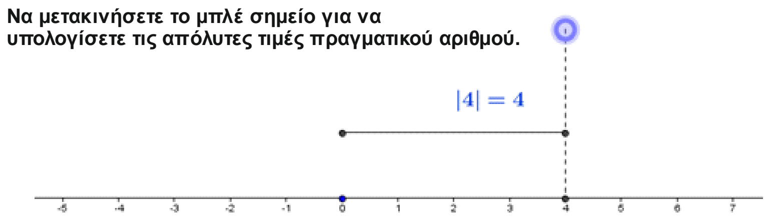
Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο "parking.ggb" και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.



Διερεύνηση

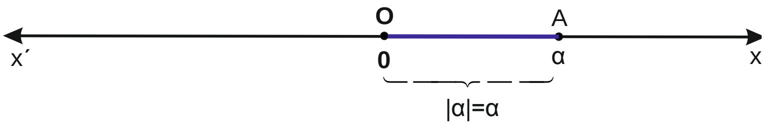
Να χρησιμοποιήσετε τα εφαρμογίδια "apoliti1.ggb" και "apoliti2.ggb" και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

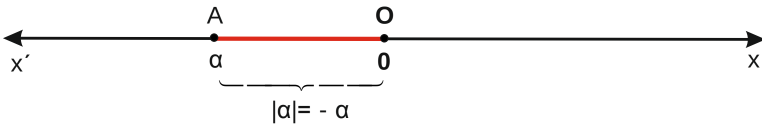




Μαθαίνω

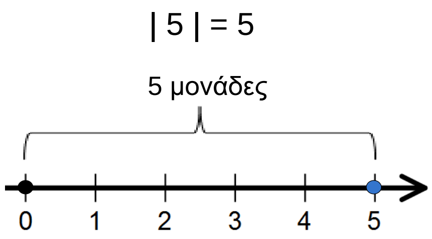
- Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο A πάνω σε έναν άξονα.

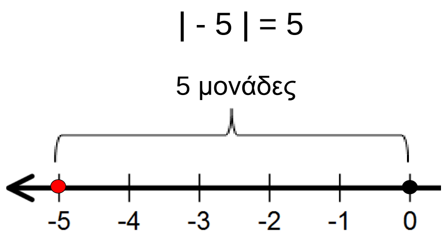




Η απόσταση του σημείου A από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA, ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του αριθμού α και συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$.

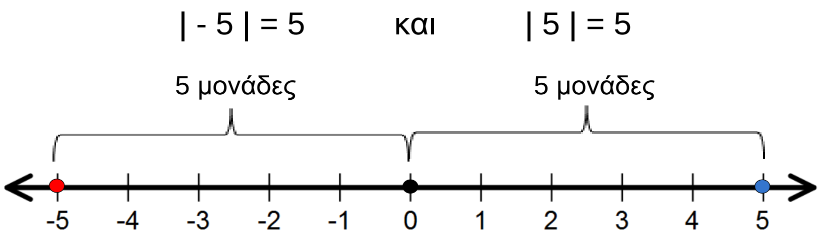
Παράδειγμα:





- Δύο αριθμοί που είναι τοποθετημένοι συμμετρικά της αρχής του άξονα των πραγματικών αριθμών έχουν ίσες απόλυτες τιμές και είναι αντίθετοι (αντίθετοι είναι οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 0). Δηλαδή $|\alpha| = |-\alpha|$ για κάθε τιμή του α.

Για παράδειγμα:



- Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του.
- Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού α είναι:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha\nu \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

- Ο συμβολισμός $|\alpha|$ αναπαριστά απόσταση και η απόσταση δεν είναι ποτέ αρνητικός αριθμός. Έτσι η $|\alpha|$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή $|\alpha| \geq 0$.

Οι αριθμοί 7 και -7 είναι αντίθετοι αριθμοί. Λέμε ότι ο αριθμός -7 είναι αντίθετος του 7. Το σύμβολο “$-$” χρησιμοποιείται, για να δηλώσει τον “αντίθετο”, όπως επίσης και το “αρνητικό”. Όταν το αρνητικό σύμβολο χρησιμοποιείται μπροστά από τον αριθμό, διαβάζεται ως “αρνητικός”. Όταν χρησιμοποιείται μπροστά από παρένθεση ή μεταβλητή διαβάζεται ως “αντίθετος”. Για παράδειγμα $-(7) = -7$ σημαίνει ότι ο αντίθετος του 7 είναι το -7. Το $-(-7) = 7$ σημαίνει ότι ο αντίθετος του αρνητικού αριθμού -7 είναι το 7. Γενικά έχουμε ότι $-(-\alpha) = \alpha$.

Ιδιότητες απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού

	Ιδιότητα	Παράδειγμα	Περιγραφή
1.	$\lvert\alpha\rvert \geq 0$	$\left\lvert -\frac{3}{2}\right\rvert = \frac{3}{2} \geq 0$	Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είναι πάντοτε θετικός αριθμός ή μηδέν.
2.	$\lvert\alpha\rvert = \lvert-\alpha\rvert$	$\lvert 5{,}3\rvert = \lvert-5{,}3\rvert$	Ένας αριθμός και ο αντίθετός του έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.
3.	$\lvert x\rvert = \theta\,,\quad \theta > 0 \;\Leftrightarrow$ $x = \theta$ ή $x = -\theta$	$\lvert x\rvert = 8 \;\Leftrightarrow$ $x = 8$ ή $x = -8$	Αν η απόλυτη τιμή ενός αριθμού ισούται με ένα θετικό αριθμό θ, τότε αυτός ο αριθμός είναι ίσος με το θ ή το $-\theta$ και αντίστροφα.
4.	$\lvert\alpha\beta\rvert = \lvert\alpha\rvert \cdot \lvert\beta\rvert$	$\lvert-2\cdot 7\rvert = \lvert-2\rvert \cdot \lvert 7\rvert$	Η απόλυτη τιμή γινομένου πραγματικών αριθμών ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους.
5.	$\lvert\alpha\rvert^2 = \alpha^2$	$\lvert-3\rvert^2 = (-3)^2 = 3^2$	Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής ενός αριθμού ισούται με το τετράγωνο του αριθμού.
6.	$\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert = \frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}\,,\;\; \mu\varepsilon\ \beta \neq 0.$	$\left\lvert\frac{15}{-3}\right\rvert = \frac{\lvert 15\rvert}{\lvert-3\rvert}$	Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών ισούται με το πηλίκο των απόλυτων τιμών των αριθμών αυτών.

Απόδειξη Ιδιοτήτων 4 – 6

4. $\lvert\alpha\cdot\beta\rvert = \lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert,\quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$

Απόδειξη:

Έστω $\lvert\alpha\cdot\beta\rvert = \lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert \;\Leftrightarrow\; \lvert\alpha\cdot\beta\rvert^2 = (\lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert)^2 \;\Leftrightarrow\; (\alpha\beta)^2 = \lvert\alpha\rvert^2\cdot\lvert\beta\rvert^2 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2$ που είναι αληθής.

5. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mu\varepsilon\ \beta \neq 0.$

Απόδειξη:

Ισχύει: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mu\varepsilon\ \beta \neq 0.$

Έστω $\frac{\alpha}{\beta} = x \Rightarrow \alpha = \beta x \Rightarrow |\alpha| = |\beta x| \Rightarrow |\alpha| = |\beta| \cdot |x| \Rightarrow |x| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

6. Αν $\theta > 0$, ισχύει η ισοδυναμία: $|x| = \theta \iff x = \theta$ ή $x = -\theta$

Απόδειξη:

Αναζητούμε τους πραγματικούς αριθμούς που απέχουν από το 0 απόσταση θ. Οι αριθμοί αυτοί, είναι $\theta, -\theta$.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή των αριθμών:

(α) $|3|$ (β) $|-3|$ (γ) $|0|$

(δ) $\left|\sqrt{2} - 1\right|$ (ε) $|3 - \pi|$

Λύση:

(α) $|3| = 3$

(β) $|-3| = -(-3) = 3$

(γ) $|0| = 0$

(δ) $\left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1$ (επειδή $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} - 1 > 0$)

(ε) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (επειδή $\pi > 3 \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

2. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x έτσι ώστε $|x| = 4$.

Λύση:

$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$

(χρησιμοποιείται η ιδιότητα $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$)

3. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί t έτσι ώστε $|t| = -13$.

Λύση:

$|t| = -13$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, γιατί η απόλυτη τιμή οποιουδήποτε αριθμού είναι θετικός αριθμός. Άρα, δεν υπάρχει τιμή του πραγματικού αριθμού t που να επαληθεύει την εξίσωση.

4. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ, έτσι ώστε να ισχύει $|\lambda| = 2 - \sqrt{3}$.

Λύση:

Είναι $2 > \sqrt{3} \Rightarrow 2 - \sqrt{3} > 0$,

$|\lambda| = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda = 2 - \sqrt{3}$ ή $\lambda = -(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2$

(χρησιμοποιείται η ιδιότητα $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$)

5. Να γράψετε την ανίσωση $|x| < 3$
   α) χωρίς τη χρήση της απόλυτης τιμής
   β) σε μορφή διαστήματος.

Λύση:

α) Ένας αριθμός έχει απόλυτη τιμή μικρότερη του 3 τότε και μόνο τότε, αν έχει απόσταση από το 0 μικρότερη του 3, δηλαδή ο αριθμός x πρέπει να είναι μεταξύ του -3 και του 3 και συμβολίζεται: $-3 < x < 3$.

β) $x \in (-3,3)$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω απόλυτες τιμές,

α) $|-16|$ β) $|9|$ γ) $|10|$

δ) $|6|$ ε) $|-7|$ στ) $|-12|$

ζ) $-|7|$ η) $-|12|$ θ) $-|-8|$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των μεταβλητών έτσι ώστε να επαληθεύονται οι εξισώσεις.

α) $|\,x\,| = 5$ β) $|\,k\,| = 18$ γ) $|\,\mu\,| = -7$

δ) $|\,y\,| = 0$ ε) $|\,\omega\,| = -\frac{1}{3}$ στ) $|\,\nu\,| = \frac{2}{3}$

ζ) $|\,z\,| - 8 = 6$ η) $4|\,\lambda\,| + 3 = 19$

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$, $=$ τις παρακάτω προτάσεις.

α) $-7 \cdots -9$ β) $|-7|\ \ldots\ 4$ γ) $-16 \cdots |-16|$

δ) $|-17| \ldots |13|$ ε) $|8|\ \ldots\ |-19|$ στ) $-|24|\ \ldots\ |-47|$

ζ) $|-8|\ \ldots\ -|-8|$ η) $-5\ \ldots\ |+5|$ θ) $|-5|\ \ldots\ 5$

4. Να αποδείξετε ότι:

α) $|12 - x - y| = |x - 12 + y|$ β) $|12 + a^2| = a^2 + 12$

5. Αν $x \in (3, \infty)$, να γράψετε την παράσταση χωρίς απόλυτες τιμές

$$A = |x - 2| + |11 + x|$$

6. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $|3 - 2\pi|$ β) $\big||-6| - |-4|\big|$ γ) $\frac{-5}{|-5|}$

δ) $|2 — 12|$ ε) $|-2 \cdot 7|$ στ) $\left|\frac{13-9}{9-13}\right|$

7. Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να απλοποιήσετε την παράσταση:
$A = |\alpha - \beta| - 3|a - \gamma| + |a - \gamma|$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις, όταν $x \in \mathbb{R}$.

α) $|x| = 9$ β) $|x| = 4 - \sqrt{17}$ γ) $|x - 1| = -3$

δ) $|3x - 5| = 5$ ε) $|x| = |-2|$ στ) $|x| = \left|1 - \sqrt{2}\right|$

ζ) $|x + 6| = -2$

9. Να εκφράσετε τις λεκτικές προτάσεις ως εξίσωση με απόλυτες τιμές ή με ανίσωση.
(α) Το x απέχει 3 μονάδες από το 2
(β) Το y είναι μικρότερο κατά 4 μονάδες από το -5

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τη λύση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

α) $x + 2 > 1$
β) $3x < -9$
γ) $-6x < 28$
δ) $x - 1 \geq 2x$
ε) $2x - 5 > x + 3$
στ) $2(x - 1) - 3x < 4(1 + x) - 1$
ζ) $\frac{3x}{2} - \frac{5}{6} \leq \frac{x}{3}$

2. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $x < 0 \;\; και \;\; x + 3 \geq -2$
β) $\frac{x-2}{3} + \frac{7}{6} \leq \frac{x-5}{4} \;\; και \;\; 1 - x \geq \frac{7}{12}$
γ) $\frac{2(x-5)}{2} \leq \frac{3(1-x)}{5} \;\; και \;\; x > 0$

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$, $=$ τις παρακάτω προτάσεις.

α) $-12 \cdots -9$ β) $|-6| \ldots -4$ γ) $-9 \cdots |-9|$

δ) $|-11| \ldots |10|$ ε) $|5| \ldots |-12|$ στ) $-|15| \ldots |-23|$

ζ) $|-5| \ldots -|-5|$ η) $-2 \ldots |+1|$ θ) $|-1| \ldots 1$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις, όταν $x \in \mathbb{R}$.

α) $|x| = 4$ β) $|x| = 3 - \sqrt{15}$ γ) $|x + 1| = -3$

δ) $3|x| + 1 = 10$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$.

2. Αν $\alpha \in \mathbb{R}^+$, να αποδείξετε ότι $\alpha + 1 \geq 2\sqrt{\alpha}$.

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$.

4. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) \geq 4$.

5. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ και $0 < \alpha < \beta$, να βάλετε στη σειρά μεγέθους τους $1, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Αλγεβρικές Παραστάσεις

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

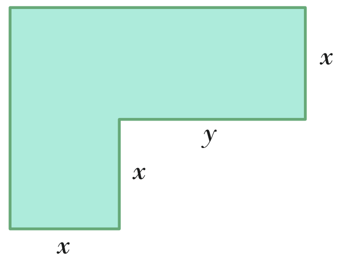
Αλγεβρικές Παραστάσεις

Διερεύνηση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη μιας αυλής.

α) Να βρείτε μια παράσταση που να εκφράζει το εμβαδόν της αυλής σε συνάρτηση των x και y.

β) Αν $x = 6$ και $y = 7$, ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν της αυλής;



Μαθαίνω

Αλγεβρικές παραστάσεις

Εκφράσεις που περιέχουν πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών τις ονομάζουμε **αλγεβρικές παραστάσεις.**

Παράδειγμα: $-2x + 5y^2$, $\frac{2}{3}x^4\alpha^3$, $\frac{x+y}{4z\sqrt{\alpha}}$, 2

- Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αντίστοιχες τιμές (αριθμούς) και εκτελέσουμε τις πράξεις, ο αριθμός που θα προκύψει (αποτέλεσμα) λέγεται **αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης**.

Παράδειγμα: Στην αλγεβρική παράσταση $A = 3x + y^2$, αν θέσουμε το $x = -2$ και $y = -1$ έχουμε,

$$A = 3(-2) + (-1)^2 = -6 + 1 = -5$$

- Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

- Μια αλγεβρική παράσταση $\left(\pi.\chi.\ 3x + \frac{1}{y},\ \frac{y}{x},\ \frac{2a}{\beta+3},\ \frac{x^2-7y}{x^2y-5y^3}\right)$ που περιέχει μια τουλάχιστον μεταβλητή στον παρονομαστή λέγεται **κλασματική** ή **ρητή** αλγεβρική παράσταση.

- Για να ορίζεται μια κλασματική παράσταση πρέπει οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός. Άρα, σε μια κλασματική παράσταση, **οι μεταβλητές δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή**.

  Παράδειγμα: Για να έχει έννοια η ρητή αλγεβρική παράσταση $-\frac{5x}{2ay}$ πρέπει πάντα ο παρανομαστής της να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή, πρέπει το $2ay \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ και $y \neq 0$.

- Μία αλγεβρική παράσταση (στην πιο απλή μορφή) λέγεται **άρρητη**, αν περιέχει μεταβλητή σε υπόριζο.

  Παραδείγματα: (i) Η παράσταση $\sqrt{x-3} - 2y$ είναι άρρητη. Για να έχει έννοια η άρρητη παράσταση, το υπόριζό της πρέπει να είναι θετικό ή μηδέν. Στο παράδειγμα $x - 3 \geq 0$, άρα $x \geq 3$.
  (ii) Η παράσταση $2\sqrt{3}\,x$ δεν είναι άρρητη γιατί δεν περιέχει μεταβλητή σε υπόριζο.

- Μια αλγεβρική παράσταση είναι ακέραια, όταν δεν είναι κλασματική αλλά ούτε και άρρητη.

Μονώνυμα

- Μια ακέραια αλγεβρική παράσταση που περιλαμβάνει μόνο την πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ πραγματικού αριθμού και μεταβλητών ονομάζεται **μονώνυμο**.

  Παράδειγμα: Τα $3\alpha\beta^5$και $8x^2$ είναι μονώνυμα.

- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας ονομάζεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο των μεταβλητών του ονομάζεται **κύριο μέρος** του.

  Παράδειγμα: Στο μονώνυμο $3\alpha\beta^5$ ο αριθμός 3 είναι ο συντελεστής και το $\alpha\beta^5$ είναι το κύριο μέρος.

- Ο συντελεστής **1** μπορεί και συνήθως παραλείπεται και γράφουμε μόνο το κύριο μέρος

  Παράδειγμα: $1 \cdot x^3y^4 = x^3y^4$

- **Όμοια** ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

- **Ίσα** ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή.

- **Αντίθετα** ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

- **Βαθμός μονωνύμου** ως προς μια μεταβλητή του ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής.

- **Βαθμός μονωνύμου** ονομάζεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών που παρουσιάζονται στο μονώνυμο.
  Παράδειγμα: Το μονώνυμο $\frac{2}{3}x^4\alpha^3$ είναι 7^{ου} βαθμού, αφού το $4 + 3 = 7$, ενώ είναι 4^{ου} βαθμού ως προς x και 3^{ου} βαθμού ως προς α.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα και στη συνέχεια να βρείτε το συντελεστή τους και το κύριο μέρος τους:

(α) $-5x^3y^2$ (β) $5a^2 \cdot 2\beta^5$ (γ) $\frac{9\alpha^2\beta^3\gamma^4}{5}$

(δ) xy^{-3} (ε) $6+3xy$ (στ) $(3-\sqrt{2})\alpha\beta^4$

Λύση

(α) Η παράσταση $-5x^3y^2$ είναι μονώνυμο με συντελεστή -3 και κύριο μέρος x^3y^2 .

(β) Η παράσταση $5a^2 \cdot 2\beta^5 = 10\alpha^2\beta^5$ είναι μονώνυμο με συντελεστή 10 και κύριο μέρος $\alpha^2\beta^5$.

(γ) Η παράσταση $\frac{9\alpha^2\beta^3\gamma^4}{5} = \frac{9}{5} \cdot \alpha^2\beta^3\gamma^4$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $\frac{9}{5}$ και κύριο μέρος $\alpha^2\beta^3\gamma^4$.

(δ) Η παράσταση xy^{-3} δεν είναι μονώνυμο, γιατί ο εκθέτης του y είναι αρνητικός.

(ε) Η παράσταση $6+3xy$ δεν είναι μονώνυμο, γιατί περιέχει την πράξη της πρόσθεσης.

στ) Η παράσταση $(3-\sqrt{2})\alpha\beta^4$ είναι μονώνυμο με συντελεστή $3-\sqrt{2}$ και το κύριο μέρος του είναι το $\alpha\beta^4$.

2. Να βρείτε τον βαθμό του μονωνύμου $-7x^2y^3\omega$, ως προς κάθε μεταβλητή του, καθώς και το βαθμό του ως προς όλες τις μεταβλητές του.

Λύση

Το μονώνυμο $-7x^2y^3\omega$ είναι:

- 2[ου] βαθμού ως προς x.
- 3[ου] βαθμού ως προς y.
- 1[ου] βαθμού ως προς ω.
- 6[ου] βαθμού ως προς x, y και ω (αφού $2+3+1=6$)

3. Θεωρούμε τα μονώνυμα: $7a^{\nu-3}\beta^{3-\mu}$ και $\frac{1}{4}\alpha^3\beta$ με $a,\beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τους αριθμούς ν και μ, ώστε τα μονώνυμα $7a^{\nu-3}\beta^{3-\mu}$ και $\frac{1}{4}\alpha^3\beta$ να είναι όμοια.

Λύση

Δύο μονώνυμα είναι όμοια, όταν έχουν το ίδιο κύριο μέρος, δηλαδή τις ίδιες μεταβλητές με ίσους εκθέτες για κάθε μεταβλητή. Επομένως, τα μονώνυμα θα είναι όμοια, όταν ισχύει:

$$\nu - 3 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 3 - \mu = 1$$

ή ισοδύναμα $\nu = 6$ και $\mu = 2$.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω μονώνυμα είναι όμοια μεταξύ τους:

α) $6x^2y^2$ β) $-\frac{3}{5}xy^3$ γ) $-x^3y\omega$ δ) $-5y^3x$

ε) $\frac{\omega y x^3}{4}$ στ) $\frac{5}{2}y^2x^2$ ζ) $\frac{xy^3}{7}$ η) $\sqrt{2}yx^3\omega$

2. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός Μονωνύμου
$5xy^5$					
$-xy^2$					
$\frac{1}{5}x^2y^2$					
$-\sqrt{3}x^5$					

3. Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή $-\frac{2}{3}$ και μεταβλητές α και β. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς α είναι 3 και ως προς α και β είναι 7.

4. Να αντιστοιχίσετε κάθε αλγεβρική παράσταση της στήλης **Α** με το αντίστοιχο είδος της στήλης **Β**.

Α	**Β**
$\dfrac{2(x^2+y^2)}{7x}$	
$\sqrt{3}x^4+x+2$	Ακέραια
$\dfrac{\sqrt{5}x^3+1}{\sqrt{5}x}$	Άρρητη
$\sqrt{\dfrac{x-7}{7}}$	Ρητή
$x^2+\dfrac{1}{2}x$	

5. Να προσδιορίσετε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, ώστε το μονώνυμο $3x^{\nu}y^2$:

   α) να είναι μηδενικού βαθμού ως προς x.

   β) να είναι πέμπτου βαθμού ως προς x και y.

   γ) να έχει αριθμητική τιμή 48, για $x=2$ και $y=-1$.

6. Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ και ν, ώστε τα μονώνυμα $4x^4y^{\nu}$, $\lambda x^{\kappa}y^2$ να είναι:

   α) όμοια β) ίσα γ) αντίθετα

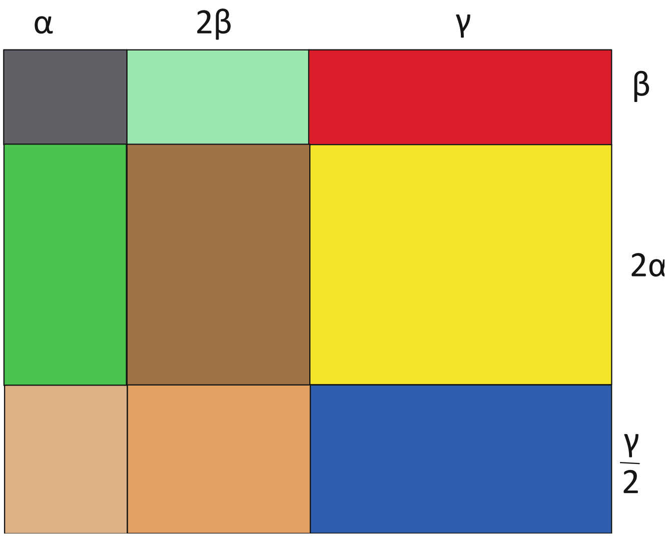
7. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

α)	Το μονώνυμο x^3y^4 δεν έχει συντελεστή.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
β)	Η αλγεβρική παράσταση $\frac{3}{x^2}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή 3.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
γ)	Η αλγεβρική παράσταση $\frac{x^2}{3}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή $\frac{1}{3}$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
δ)	Ο αριθμός 2013 μπορεί να χαρακτηριστεί μονώνυμο.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
ε)	Η παράσταση $(\sqrt{5}-2)x^2$ είναι μονώνυμο.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
στ)	Το κύριο μέρος του μονωνύμου $-4\alpha^3\beta^2$ είναι το $\alpha\beta$.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
ζ)	Η παράσταση $2x+\ 7x-x$ δεν είναι μονώνυμο.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

Πράξεις μονωνύμων

Διερεύνηση

Με βάση το πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις $\alpha + 2\beta + \gamma$ και $\beta + 2\alpha + \frac{\gamma}{2}$.



Μαθαίνω

- **Άθροισμα και διαφορά όμοιων μονώνυμων.**

  Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοιο με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

  Η διαφορά όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοιο με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή τη διαφορά των συντελεστών τους.

  Παράδειγμα: $2\alpha\beta^3 + 5\alpha\beta^3 \ = \ (2+5)\alpha\beta^3 \ = \ 7\alpha\beta^3$.

- **Πολλαπλασιασμός μονώνυμων.**

  Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε καθεμιά το άθροισμα των εκθετών τους.

  Παράδειγμα: Το γινόμενο των μονωνύμων $2a^2\beta$ και $-\frac{3}{4}\alpha\beta^4\gamma^3$ είναι:

  $(2a^2\beta) \cdot \left(-\frac{3}{4}\alpha\beta^4\gamma^3\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot a^2\beta \cdot \alpha\beta^4\gamma^3 = -\frac{3}{2}a^3\beta^5\gamma^3$.

- **Διαίρεση μονώνυμων**

  Το **πηλίκο δύο μονωνύμων** βρίσκεται, όπως και στους αριθμούς, αν πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

  Παραδείγματα:

$$(12\alpha^5\beta^3\gamma) : (-4a^3\gamma) = 12\alpha^5\beta^3\gamma \cdot \frac{1}{-4a^3\gamma} = \frac{12\alpha^5\beta^3\gamma}{-4a^3\gamma} = \frac{12}{-3} \cdot \frac{a^5}{a^3} \cdot \beta^3 \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = -4a^2\beta$$

$$(-10x^2y^2\omega):(-5xy^4\omega) = -10x^2y^2\omega \cdot \frac{1}{-5xy^4\omega} = \frac{=-10x^2y^2\omega}{-5xy^4\omega} = \frac{-10}{-5} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^2}{y^4} \cdot \frac{\omega}{\omega} = \frac{2x}{y^2}$$

  Παρατήρηση: Στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι το πηλίκο δύο μονωνύμων δεν είναι πάντοτε μονώνυμο.

Παραδείγματα

1. Να βρείτε το άθροισμα των μονωνύμων:

   α) $7x,\ 3x$ β) $-2a^3,\ a^3$ γ) $x^2, -4x^2,\ 3x^2$ δ) $a\beta^2, -\frac{1}{3}a\beta^2$

   Λύση:

   (α) $7x + 3x = (7+3)x = 10\,x$

   (β) $-2a^3 + a^3 = (-2+1)a^3 = -a^3$

   (γ) $x^2 + (-4x^2) + 3x^2 = x^2 - 4x^2 + 3x^2 = (1-4+3)x^2 = 0x^2 = 0$

   (δ) $a\beta^2 + \left(-\frac{1}{3}a\beta^2\right) = a\beta^2 - \frac{1}{3}a\beta^2 = \frac{3}{3}a\beta^2 - \frac{1}{3}a\beta^2 = \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right)a\beta^2 = \frac{2\,a\,\beta^2}{3}$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

   α) $2 \cdot (3x^2)$ β) $3a \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2\right)$ γ) $(-x^2) \cdot (-y^2)$

   δ) $2x \cdot (-3x^2y^3) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right)$

Λύση:

(α) $2 \cdot (3x^2) = (2 \cdot 3)x^2 = 6x^2$

(β) $3a \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (a \cdot a^2) = -\frac{3}{2}a^3$

(γ) $(-x^2) \cdot (-y^2) = x^2\, y^2$

(δ) $2x \cdot (-3x^2y^3) \cdot \left(-\frac{1}{4}xy^2\right) = \left[2 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right](x \cdot x^2y^3 \cdot xy^2) = \frac{3}{2}x^4\, y^5$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $30x : 5x$

β) $12a^2 : 9a^3$

γ) $75xya^2 : \left(\frac{5}{2}ay\right)$

δ) $-16a\beta^3x : (32a^2\beta)$

Λύση:

(α) $30x : 5x = \frac{30x}{5x} = 6$

(β) $12a^2 : 9a^3 = \frac{12a^2}{9a^3} = \frac{4}{3\alpha}$

(γ) $75xya^2 : \left(\frac{5}{2}ay\right) = \frac{75xya^2}{\frac{5}{2}ay} = 75 \cdot \frac{2}{5} \cdot xa$

(δ) $-16a\beta^3x : \left(32a^{2\beta}\right) = \frac{-16a\beta^3x}{32a^2\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2x}{a}$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $5x + 3x - 2x - 4x$

(β) $-x^3 + x^3$

(γ) $2ax^2 + 1{,}5x^2 - 0{,}25x^2$

(δ) $-xy^3 + \frac{1}{4}xy^3 + \frac{6}{8}xy^3$

(ε) $-\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{3} + 2a^3$

(στ) $2x + 3x^2 + 5x$

2. Να υπολογίσετε το γινόμενο των μονωνύμων:

(α) $\left(-3\alpha^2\right).\left(-5\alpha^3\right) =$

(β) $2x^3y^2.\left(-4x^2y^3\right).\left(-x^2y^2\right)$

(γ) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3.\left(-2x\right).\left(-4x^2y\right)^2$

(δ) $a^{\nu-2} \cdot a^{\nu-3} \cdot a^{5-2\nu}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $3x : 5x$

(β) $6ax^5 : (-3ax^2)$

(γ) $-5y : (3xy^4)$

(δ) $\frac{xy^3}{3} : \frac{x^3y}{6}$

(ε) $\left(\frac{2a\beta}{3}\right) : \left(-\frac{4}{9}a\right)$

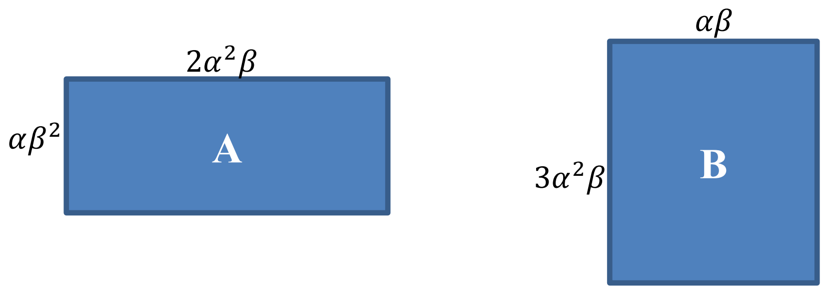
(στ) $21a^3x^2 : \left(-\frac{3}{4}ax^3\right)$

Πολυώνυμα - Πράξεις Πολυωνύμων

Πρόσθεση – Αφαίρεση – Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

Εξερεύνηση

Δίνονται τα ορθογώνια Α και Β. Να υπολογίσετε το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο των περιμέτρων τους.



Μαθαίνω

Πολυώνυμα

- **Πολυώνυμο** ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μη όμοιων μονωνύμων .

  Παράδειγμα: $3x^2 - 1$, $5\alpha^3\beta^2 + 3$, $2\alpha^2\beta^2$, $6\mu^2 - 5\mu\nu^3 + 4$, $3\mu^2\nu\rho^5$.

- Τα πολυώνυμα τα ονομάζουμε με ένα γράμμα (συνήθως κεφαλαίο) και σε παρένθεση τοποθετούμε τη μεταβλητή ή τις μεταβλητές.

  Παράδειγμα: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7$, $Q(x,y) = -2x^2y^3 + xy$

- Συμφωνούμε, ακόμα, ότι κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό** πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό** πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο **σταθερό** πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

- Τα μονώνυμα που αποτελούν το πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου.

- Αν σε μια αλγεβρική παράσταση υπάρχουν δύο ή περισσότερα όμοια μονώνυμα, τότε τα αντικαθιστούμε με το άθροισμά τους (**αναγωγή ομοίων όρων**).

- Μια αλγεβρική παράσταση με τη μορφή κλάσματος που οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς ρητή παράσταση.

  Για παράδειγμα η παράσταση $\frac{x^4+2x^2-5x+3}{x+2}$ *είναι ρητή αλγεβρική παράσταση.*

  Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

  Παρατήρηση: Τα μονώνυμα θεωρούνται πολυώνυμα με έναν όρο.

- Διάταξη πολυωνύμου κατά τις **φθίνουσες δυνάμεις** μιας μεταβλητής x είναι η διάταξη των όρων του από το μονώνυμο με το μεγαλύτερο βαθμό ως προς τη μεταβλητή x μέχρι το μονώνυμο με το μικρότερο βαθμό.

  Παράδειγμα: $A = 3x^2 + x^4 - 2x + 5x^3 + 6$

  $$A = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$

- **Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων** $A(x) \pm B(x)$

  Για να υπολογίσουμε το άθροισμα ή τη διαφορά των πολυωνύμων απαλείφουμε τις παρενθέσεις και κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

  Παράδειγμα: Έστω ότι $A = 4x^2 + 3x + 8$ *και* $B = x^2 + 4x - 2$

  $$\begin{aligned} A + B &= (4x^2 + 3x + 8) + (x^2 + 4x - 2) \\ &= 4x^2 + 3x + 8 + x^2 + 4x - 2 \\ &= 5x^2 + 7x + 6 \end{aligned}$$

  Παράδειγμα: Έστω ότι $A = 4x^2 + 3x + 2$ *και* $B = x^2 + 4x - 2$

  $$\begin{aligned} A - B &= (4x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 4x - 2) \\ &= 4x^2 + 3x + 2 - x^2 - 4x + 2 \\ &= 3x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

- **Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων** $A(x) \cdot\ B(x)$

  (α) *Πολλαπλασιασμός μονώνυμου με πολυώνυμο* (Επιμεριστική ιδιότητα). Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

  Παράδειγμα: $(-2x)\cdot(x^2-2x+1) = (-2x)\cdot(x^2)+(-2x)\cdot(-2x)+(-2x)\cdot 1$

  $$= -2x^3 + 4x^2 - 2x$$

  (β*) Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου με πολυώνυμο.* Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

  Παράδειγμα:

  $$\left(\alpha - 2\right)\cdot\left(\alpha^2 - 3\alpha - 4\right) = \alpha\cdot\left(\alpha^2 - 3\alpha - 4\right) - 2\cdot\left(\alpha^2 - 3\alpha - 4\right)$$

  $$= \alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha^2 + 6\alpha + 8$$

  $$= \alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha + 8$$

Παραδείγματα

1. Να γίνουν οι πράξεις :

   (α) $(-2x^2-3x)-(2x^2-2x-1)$

   (β) $-(x^3y+x^2)+10+6x^2-(3x^2-5x^3y)$

Λύση:

(α) $(-2x^2-3x)-(2x^2-2x-1) = -2x^2-3x-2x^2+2x+1$

$$= -4x^2-x+1$$

(β) $-(x^3y+x^2)+10+6x^2-(3x^2-5x^3y)$

$$= -x^3y-x^2+10+6x^2-3x^2+5x^3y$$

$$= 4x^3y+2x^2+10$$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $3(6a+5\beta)$ (β) $5\delta(\delta^3-3\delta)$ (γ) $-a\beta(a-\beta)$ (δ) $2xy(3x^2+xy^2)$

Λύση:

(α) $3(6a+5\beta)=18a+15\beta$

(β) $5\delta(\delta^3-3\delta)=5\delta\cdot\delta^3-5\delta\cdot 3\delta=5\delta^4-15\delta^2$

(γ) $-a\beta(a-\beta)=-a^2\beta-a\beta^2$

(δ) $2xy(3x^2+xy^2)=2xy\cdot 3x^2+2xy\cdot xy^2=6x^3y+2x^2y^3$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$A=3x^2-5x+2,\quad B=4x^3-3x+4,\quad \Gamma=2x^4-3x^3+4x^2-x$

Να βρείτε: (α) $A-B$ (β) $A-(B-\Gamma)$

Λύση:

(α) $A-B=(3x^2-5x+2)-(4x^3-3x+4)=$

$=3x^2-5x+2-4x^3+3x-4$

$=-4x^3+3x^2-2x-2$

(β) $A-(B-\Gamma)=3x^2-5x+2-[4x^3-3x+4-(2x^4-3x^3+4x^2-x)]=$

$=3x^2-5x+2-(4x^3-3x+4-2x^4+3x^3-4x^2+x)$

$=3x^2-5x+2-(-2x^4+7x^3-4x^2-2x+4)$

$=3x^2-5x+2+2x^4-7x^3+4x^2+2x-4$

$=2x^4-7x^3+7x^2-3x-2$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(x+1)(x+2)$ (β) $(3x^3+2y)\cdot(2x^2-y)$

(γ) $(x^2-2x+4)(x+2)-8$ (δ) $3x^2(-2x+3)(5-x)$

Λύση:

(α) $(x+1)(x+2)=x\cdot x+2\cdot x+1\cdot x+1\cdot 2$

$=x^2+3x+2$

(β) $(3x^3+2y)\cdot(2x^2-y) = 3x^3\cdot 2x^2 + 3x^3\cdot(-y) + 2y\cdot 2x^2 + 2y\cdot(-y)$

$= 6x^5 - 3x^3y + 4x^2y - 2y^2$

(γ) $(x^2-2x+4)(x+2)-8 = x^3+2x^2-2x^2-4x+4x+8-8$

$= x^3$

(δ) $3x^2(-2x+3)(5-x) = (-6x^3+9x^2)(5-x)$

$= -30x^3+45x^2+6x^4-9x^3$

$= 6x^4-39x^3+45x^2$

5. Αν για τους αριθμούς x , y ισχύει ότι: $x^3 - y^3 = 3xy(x-y)$, να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = (x-y)(x^2-2xy+y^2)+3$ είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών.

Λύση:

$A = (x-y)(x^2-2xy+y^2)+3 = x^3-2x^2y+xy^2-yx^2+2xy^2-y^3+3$

$= x^3-y^3-3x^2y+3xy^2+3$

$= 3xy(x-y)-3x^2y+3xy^2+3$ *(από την δεδομένη σχέση)*

$= 3x^2y-3xy^2-3x^2y+3xy^2+3$

$= 3$

Άρα $A=3$, δηλαδή η τιμή της παράστασης A είναι ανεξάρτητη των μεταβλητών x, y.

6. Αν $P(x) = -2x^2+5x-3$ και $Q(x) = 4x-5$ να βρείτε τα πολυώνυμα:

(α) $P(x)\cdot[-3Q(x)+11x-12]$ (β) $[P(x)-2]\cdot[Q(x)+3]$

Λύση:

(α) $P(x)\cdot[-3Q(x)+11x-12] = (-2x^2+5x-3)\cdot[-3(4x-5)+11x-12]$

$= (-2x^2+5x-3)\cdot(-12x+15+11x-12)$

$= (-2x^2+5x-3)\cdot(-x+3) = 2x^3-11x^2+18x-9$

(β) $[P(x)-2]\cdot[Q(x)+3] = (-2x^2+5x-3-2)\cdot(4x-5+3)$

$= (-2x^2+5x-5)\cdot(4x-2)$

$= 10-30x+24x^2-8x^3$

Δραστηριότητες

1. Να γίνει διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x των πιο κάτω πολυώνυμων:

   (α) $A = -2x^3 + x^2 + 6x - 5x^4 + 2$

   (β) $B = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \sqrt{\frac{1}{9}}x^3 - 6x - 6x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 1$

   (γ) $\Gamma = 2x^3y - 5xy^3 + 5x^2y - 8y^4$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα:

   $A = 6x^4 + 5x^3 - 2x + 7$ $\qquad B = 5x^3 - 2x^2 - 9x + 4$

   $\Gamma = -x^4 - 3x^2 + 11$ $\qquad \Delta = -7x^3 + 8x^2 - x + 6$

   Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $A - B$ (β) $(A + B) - (\Gamma + \Delta)$ (γ) $A - (B - \Gamma) - \Delta$ (δ) $A + B + \Gamma + \Delta$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 7x^2 - 5x + 4$ και $Q(x) = -3x^2 + 5x - 9$. Να υπολογίσετε τα $A(-2)$ και $B(3)$, όπου $A(x) = P(x) + Q(x)$ και $B(x) = P(x) - 4Q(x)$.

4. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $-2x(x-y) + 2y(y-x) - 2(y^2 - x^2)$

   (β) $3a(3-2a) - 6(2-a^2) - 9(a+1) + 20$

   (γ) $-x^2(x-2) + x(x^2-1) + x(2x+1)$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $(3x^2 - 2x + 6)(x^2 - x + 2)$ (β) $(x^2 - 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)$

   (γ) $(\alpha - 2\beta + \gamma)(\alpha + 2\beta - \gamma)$ (δ) $(x^2 + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

   (ε) $-2(3x^3 + 4x - 2)(2x - 1)$ (στ) $(x + 2)(x - 4)(x + 2)(x + 4)$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $3x(x^2-1)-4x^2(x+2)-3x+4(x^2-1)$

(β) $-3x^2(x^3+x^2+3)+(2-3x)(-5x^3)+x(1-x)-3x$

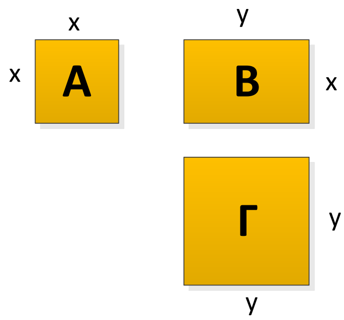
(γ) $2\alpha(\beta^2+\alpha\beta-\alpha^2)-\alpha^3-(\alpha-\beta)(3\alpha\beta)-4\alpha\beta^2$

(δ) $2[x^2-(x+2)x-3x+1]-3x^2[x-x(2-x)]+3$

Διαίρεση Πολυωνύμων

Εξερεύνηση

Για την πλακόστρωση του δαπέδου ενός δωματίου το οποίο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, χρησιμοποιήθηκαν 45 πλακάκια τύπου A, 56 τύπου B και 16 τύπου Γ. Αν το πλάτος του δωματίου είναι $5x + 4y$, ποιο είναι το μήκος του;



Μαθαίνω

- **Διαίρεση πολυωνύμου με μονώνυμο**

  Για να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με ένα μονώνυμο διαιρούμε τον κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο και προσθέτουμε τα πηλίκα που προκύπτουν.

  Παράδειγμα: $(9a^7 - 6a^5) : 3a^3 \quad = (9a^7 : 3a^3) - (6a^5 : 3a^3) = 3a^4 - 2a^2$

- **Διαίρεση πολυωνύμου με πολυώνυμο**

  Αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\boldsymbol{\Delta(x)}$ **(διαιρετέος)** και $\boldsymbol{\delta(x)}$ **(διαιρέτης)** με $\boldsymbol{\delta(x) \neq 0}$ και κάνουμε την διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ (πηλίκο) και $\upsilon(x)$ (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

  $\boldsymbol{\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)}$ **(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης),**

  όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

  Παρατηρήσεις:

  α) Ισχύει ότι ο βαθμός του $\boldsymbol{\Delta(x)}$ είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών του $\boldsymbol{\delta(x)}$ και του $\boldsymbol{\pi(x)}$.

  β) Ο βαθμός του $\boldsymbol{\upsilon(x)}$ είναι πάντοτε μικρότερος του βαθμού του $\boldsymbol{\delta(x)}$.

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(12x + 15y): 3$

β) $(a\beta + a\gamma): a$

γ) $(-6a^2\beta - 12a\beta): (-2a\beta)$

δ) $\frac{x^4y^5 - x^3y^2 + xy}{x^4y^5}$

ε) $(9y^8 - 6y^6): (-3y^3)$

στ) $\frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{2\pi R}$

Λύση:

α) $(12x + 15y): 3 = (12x: 3) + (15y: 3)$
$= 4x + 5y$

β) $(a\beta + a\gamma): a = (a\beta: a) + (a\gamma: a)$
$= \beta + \gamma$

γ) $(-6a^2\beta - 12a\beta): (-2a\beta) = (-6a^2\beta): (-2a\beta) - (12a\beta): (-2a\beta)$
$= 3a + 6$

δ) $\frac{x^4y^5 - x^3y^2 + xy}{x^4y^5} = \frac{x^4}{x^4y^5} - \frac{x^3y^2}{x^4y^5} + \frac{xy}{x^4y^5}$
$= \frac{1}{y^5} - \frac{1}{xy^3} + \frac{1}{x^3y^4}$

ε) $(9y^8 - 6y^6): (-3y^3) = (9y^8) : (-3y^3) - (6y^6) : (-3y^3)$
$= 3y^5 + 2y^3$

στ) $\frac{2\pi R^2 + 2\pi Rh}{2\pi R} = \frac{2\pi R^2}{2\pi R} + \frac{2\pi Rh}{2\pi R}$
$= R + h$

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου με το $4x + 7$ είναι πολυώνυμο:

Α. $1^{ου}$ βαθμού **Β.** $2^{ου}$ βαθμού **Γ.** $3^{ου}$ βαθμού **Δ.** μηδενικού βαθμού

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου με το $x^2 - 4x + 9$ δεν μπορεί να είναι:

Α. 5 Β. $3x - 2$ Γ. $x^2 + 3$ Δ. $4x$

iii) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $2x^2 + x + 5$ δίνει πηλίκο $x^4 + x - 2$, τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι:

Α. 4 Β. 6 Γ. 8 Δ. οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός

Λύση:

i) Η απάντηση είναι η Δ, δηλαδή μηδενικού βαθμού, γιατί ο βαθμός του υπολοίπου είναι μικρότερος κατά ένα τουλάχιστον από το βαθμό του διαιρέτη.

ii) Η απάντηση είναι η Γ, δηλαδή το $x^2 + 3$, γιατί ο βαθμός του υπολοίπου είναι μικρότερος κατά ένα τουλάχιστον από το βαθμό του διαιρέτη.

iii) Η απάντηση είναι η Β, δηλαδή 6, γιατί σύμφωνα με την ευκλείδεια διαίρεση το $P(x)$ γράφετε $P(x) = (2x^2 + x + 5) \cdot (x^4 + x - 2) + \upsilon$. Άρα ο βαθμός του $P(x)$ είναι το άθροισμα των βαθμών του διαιρέτη και του πηλίκου.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	
7		2
	6	3

Λύση:

Ο βαθμός του διαιρετέου είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών του διαιρέτη και του πηλίκου, άρα:

Βαθμός Διαιρετέου	Βαθμός Διαιρέτη	Βαθμός Πηλίκου
8	3	5
7	5	2
9	6	3

4. Να κάνετε τη διαίρεση $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+2x^3 & +x^2 & -3x & +6 & x & +2 & \\ \cline{5-6}
-2x^3 & -4x^2 & & & 2x^2 & -3x & +3 \\ \cline{1-2}
 & -3x^2 & -3x & +6 & & & \\
 & +3x^2 & +6x & & & & \\ \cline{2-3}
 & & +3x & +6 & & & \\
 & & -3x & -6 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

- Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.
- Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη, δηλ. $(2x^3) : (x) = 2x^2$ και βρίσκουμε τον πρώτο όρο του πηλίκου.
- Πολλαπλασιάζουμε το $2x^2$ με το διαιρέτη $(2x^2) \cdot (x + 2) = 2x^3 + 4x^2$ και αφαιρούμε το αποτέλεσμα $(2x^3 + 4x^2)$ από το διαιρέτη, δηλαδή προσθέτουμε το αντίθετο πολυώνυμο.
- Προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα βρίσκουμε το άθροισμα τους που είναι το **πρώτο μερικό υπόλοιπο**.
- Θεωρούμε το **πρώτο μερικό υπόλοιπο** ως νέο διαιρετέο και επαναλαμβάνουμε την πιο πάνω διαδικασία.
- Η διαδικασία τερματίζεται, όταν το μερικό υπόλοιπο θα είναι μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη.

Άρα έχουμε ότι: $2x^3 + x^2 - 3x + 6 = (x + 2)(2x^2 - 3x + 3)$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ίσο με μηδέν, άρα έχουμε **τέλεια διαίρεση.**

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

   α) $(x^3 - x^2 - 21x + 45):(x+5)$

   β) $(18x^3 + 9x^2 - 50x - 25):(3x-5)$

   γ) $(\omega^3 + 4\omega^2 - 11\omega - 30):(\omega^2 - \omega - 6)$

   δ) $(2x^5 + 4x^6 - 6 + x^2 + 5x - 3x^3):(x - 3 + x^2 + 2x^3)$

2. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

i.	Το πηλίκο της διαίρεσης του $(2x + 1)(x + 3)$ με το $2x + 1$ είναι το $x + 3$.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
ii.	Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με το $x + 6$ είναι το $x^2 + 2$.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
iii.	Αν διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο 6^{ου} βαθμού με ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, τότε το πηλίκο είναι πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
iv.	Το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 + 1) : (x + 1)$ είναι το $x^2 - x + 1$.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

3. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

   (α) $\left[(3x+5)^2 + \left((2x+3)\right)^2 - 3x(2x+4) - (x+1)^2\right]:(3x-2)$

   (β) $[(x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2]:(x^2+x-12)$

4. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο, όταν το πολλαπλασιάσουμε με το $x^2 - x + 1$, δίνει γινόμενο το $x^4 - x^2 + 2x - 1$.

5. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $(2\alpha+3)(4\alpha^2 - \alpha + 2)$

   (β) $-(\gamma^2-1)(\gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 - \alpha)$

   (γ) $-3(4x^2+2x-5)(2x-1)$

   (δ) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$

   (ε) $(x+2y)(x+2y)(x-2y)$

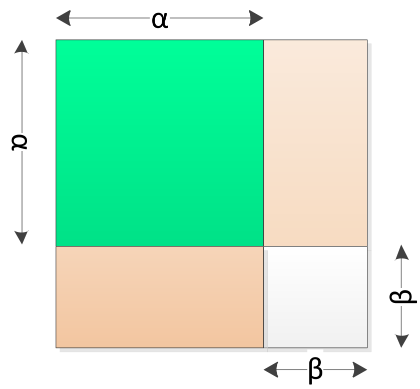
   (στ) $(x-y)(x-y)(x-y)$

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

Διερεύνηση (1)

Με τη βοήθεια των εμβαδών στο πιο κάτω σχήμα να δείξετε ότι ισχύει:

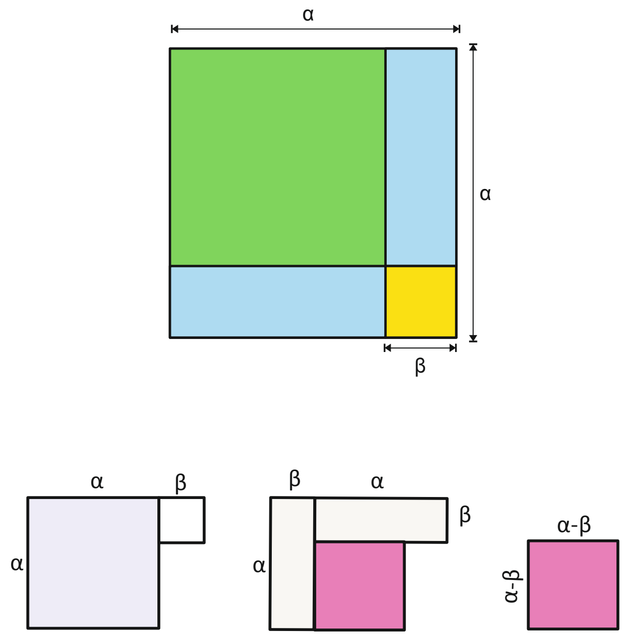
$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$



Διερεύνηση (2)

Με τη βοήθεια των εμβαδών στο πιο κάτω σχήμα να δείξετε ότι ισχύει:

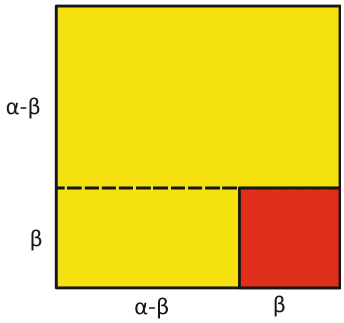
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$



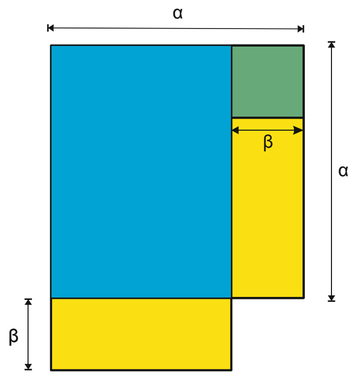
Διερεύνηση (3)

Με τη βοήθεια των εμβαδών στα πιο κάτω σχήματα να δείξετε ότι ισχύει:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$



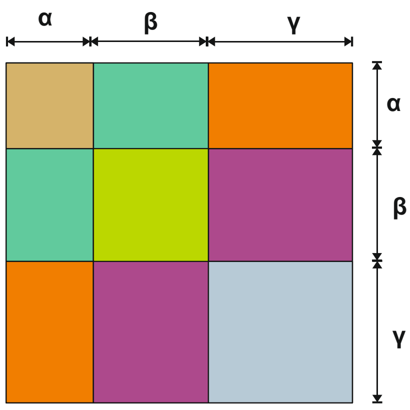
ή



Διερεύνηση (4)

Με τη βοήθεια των εμβαδών στο πιο κάτω σχήμα να δείξετε ότι ισχύει:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$



Μαθαίνω

Αλγεβρική **ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Ανάπτυγμα μιας ταυτότητας είναι το αποτέλεσμα που προκύπτει ύστερα από την εκτέλεση όλων των πράξεων.

I. **Τετράγωνο αθροίσματος**: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^2=\boldsymbol{\alpha}^2+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^2 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2\\ &= \boldsymbol{\alpha}^2+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2\end{aligned}$$

II. **Τετράγωνο διαφοράς**: $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^2=\boldsymbol{\alpha}^2-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^2 &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2\\ &= \boldsymbol{\alpha}^2-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^2 &= [\alpha+(-\beta)]^2\\ &= \alpha^2+2\alpha(-\beta)+(-\beta)^2\\ &= \boldsymbol{\alpha}^2-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2\end{aligned}$$

III. **Τετράγωνο αθροίσματος τριών όρων:**

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\gamma\alpha$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})^2 &= [\alpha+(\beta+\gamma)]^2\\ &= \alpha^2+2\alpha(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2\\ &= \boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\gamma}^2+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

IV. **Κύβος αθροίσματος:** $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^3=\boldsymbol{\alpha}^3+3\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\beta}^3$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^3 &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)^2\\
&= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\
&= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha^2\beta++\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \boldsymbol{\alpha}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\beta}^3
\end{aligned}
$$

V. **Κύβος διαφοράς:** $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^3=\boldsymbol{\alpha}^3-3\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\beta}^3$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\beta})^3 &= (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)^2\\
&= (\alpha-\beta)\cdot(a^2-2a\beta+\beta^2)\\
&= a^3-2a^2\beta+a\beta^2-\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2-\beta^3\\
&= \boldsymbol{\alpha}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^2-\boldsymbol{\beta}^3
\end{aligned}
$$

VI. **Γινόμενο αθροίσματος με διαφορά:** $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\beta}^2$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) &= (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)\\
&= \alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2\\
&= \boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\beta}^2
\end{aligned}
$$

VII. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2)=\boldsymbol{\alpha}^3+\boldsymbol{\beta}^3$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^2) &= \alpha^2-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\
&= \boldsymbol{\alpha}^3+\boldsymbol{\beta}^3
\end{aligned}
$$

VIII. $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\alpha\beta} + \boldsymbol{\beta}^2) = \boldsymbol{\alpha}^3 - \boldsymbol{\beta}^3$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\alpha\beta} + \boldsymbol{\beta}^2) &= \alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 \\ &= \boldsymbol{\alpha}^3 - \boldsymbol{\beta}^3\end{aligned}$$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha + 4)^2$ β) $(2\kappa - \lambda)^3$ γ) $(3 - 5\varphi)(3 + 5\varphi)$

Λύση:

(α) Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα του τετραγώνου αθροίσματος:

$(\alpha + 4)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 4 + 4^2 = \alpha^2 + 8\alpha + 16$

(β) Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα του κύβου διαφοράς:

$(2\kappa - \lambda)^3 = (2\kappa)^3 - 3 \cdot (2\kappa)^2 \cdot \lambda + 3 \cdot (2\kappa) \cdot \lambda^2 - \lambda^3 = 8\kappa^3 - 12\kappa\lambda + 6\kappa\lambda^2 - \lambda^3$

(γ) Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα του γινομένου αθροίσματος με διαφορά:

$(3 - 5\varphi)(3 + 5\varphi) = 3^2 - (5\varphi)^2 = 9 - 25\varphi^2$

2. Αν $x + y = 5$ και $xy = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = x^2 + y^2$.

Λύση:

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του τετραγώνου αθροίσματος.

Ισχύει ότι:

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2 - 2 \cdot 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 - 8$

$\Rightarrow \boldsymbol{x^2 + y^2 = 17}$

3. Αν ισχύει $2(x^2+y^2)=(x+y)^2$ να αποδείξετε ότι $x=y$.

Λύση:

$2(x^2+y^2)=(x+y)^2$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2=x^2+2xy+y^2$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2-x^2-y^2-2xy=0$

$\Rightarrow\ x^2+y^2-2xy=0$

$\Rightarrow (x-y)^2=0$

$\Rightarrow\ x-y=0$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{x=y}$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

i.	Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάποιες τιμές αυτών των μεταβλητών.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
ii.	Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές αυτών των μεταβλητών.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
iii.	Η ισότητα $x^2+y^2-2xy=\left(x-y\right)^2$ δεν είναι ταυτότητα.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
iv.	Αν $\alpha+\beta=5$ τότε $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=25$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
v.	Ισχύει: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
vi.	Ισχύει: $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
vii.	Ισχύει: $x^3+y^3+3xy(x+y)=(x+y)^3$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
viii.	Ισχύει: $x^3-y^3-3xy(x-y)=(x-y)^3$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
ix.	$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
x.	$\kappa^2-\lambda^2=(\lambda+\kappa)\cdot(\kappa-\lambda)$	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

α) $(\ldots - \ldots.)^{\cdots} = x^2 - \ldots\ldots + y^2$

β) $(\ldots - \ldots.)^{\cdots} = x^3 - \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - y^3$

γ) $(\ldots + \ldots.)^{\cdots} = x^2 + \ldots\ldots + y^2$

δ) $(\ldots + \ldots.)^{\cdots} = x^3 + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + y^3$

ε) $(x - y)(\ldots.+ \ldots.) = .\ldots.- \ldots..$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-2)^2$ β) $(\alpha+3)^2$ γ) $(3\kappa-2\lambda)^2$

δ) $(2x-3)^3$ ε) $(5x-2y)\cdot(2y+5x)$ στ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

ζ) $\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{3}\right)^2$ η) $(x^{1003}-1)^2$ θ) $\left(x^{\kappa}-y^{\lambda}\right)^2$

ι) $(-x+3)^3$ ια) $(-2x-5y)^2$ ιβ) $(\alpha+2\beta+\gamma)^2$

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+1)^3$ β) $(x+2)^3$ γ) $(2\alpha+3)^3$

δ) $(1+3\alpha)^3$ ε) $(\alpha+5\beta)^3$ στ) $\left(3\kappa-2\lambda\right)^3$

ζ) $(x^2-1)^3$ η) $\left(x^3-2\right)^3$ θ) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2x-1)^2-(x-2)(x-1)+3x^2$

β) $(3x+1)^2-2(x+3)(2-x)$

γ) $(x+2)^3-2x(1-x)^2+(2-3x)^2$

δ) $2(x-2)(x+2)-3x(2+x)^2-5x^3$

ε) $(x+2)(x-1)^2-(x+2)^3+x(x^2-2x+4)$

στ) $(2x+3)(x^2-x+2)-(1-2x)^3+x(x-2)^2$

6. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

   α) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

   β) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

   γ) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

   δ) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

7. Δίνονται η παράσταση: $A = (x-1)^3 - x(x^2 - 4x - 2)$,

   α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2 + 5x - 1$.

   β) Αν $B = 1 - x^2$, να υπολογίσετε συναρτήσει του x την παράσταση $A - B$

8. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$ και $B = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$

   α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A , B.

   β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A \cdot B$ είναι ίση με 1.

9. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

   $A = 200^2 - 190^2$, $\quad B = 111^2 - 11^2$, $\Gamma = 7{,}55^2 - 2{,}45^2$

10. Δίνονται οι ταυτότητες:

    $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$, $\quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

    Να χρησιμοποιήσετε τις πιο πάνω ταυτότητες για να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

    $A = 99^2 + 198 + 1 =$

    $B = 1001^2 - 2002 + 1 =$

    $\Gamma = \left(\alpha - 1\right)^2 - 2(\alpha^2 - 1) + (\alpha + 1)^2 =$

    $\Delta = \left(3 - x\right)^2 + (3 + x)^2 - 2(x^2 - 9) =$

11. Δίνεται ότι $A = 3^{-1821} + 3^{1821}$ και $B = 3^{-1821} - 3^{1821}$. Να υπολογίσετε την παράσταση $A^2 - B^2$.

12. α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - \left(\alpha - \beta\right)^2 = 4\alpha\beta$.

    β) Αν για τους αριθμούς α, β γνωρίζουμε ότι: $(a + \beta) = \sqrt{5}$ και $a - \beta = \sqrt{3}$, να δείξετε ότι $a\beta = \frac{1}{2}$.

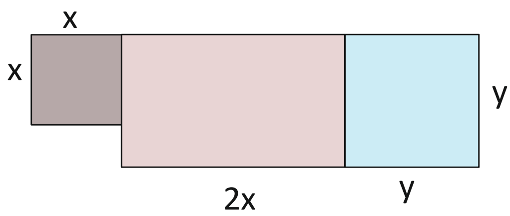
13. Αν $A = 4\sqrt{3} - \sqrt{5}$ και $B = 4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ να υπολογίσετε την παράσταση: $\frac{A^2+B^2}{AB}$

Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων

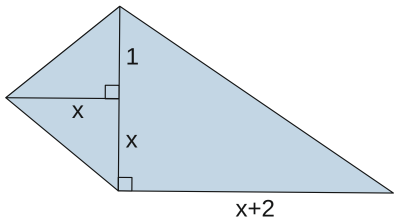
Διερεύνηση

Να υπολογίσετε συναρτήσει των x, y, την πλευρά ενός τετραγώνου, του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν του σχήματος σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις.

(α)



(β)



Μαθαίνω

- **Παραγοντοποίηση** ή **ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων** ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια αλγεβρική παράσταση ή ένα πολυώνυμο από άθροισμα σε γινόμενο.

  π.χ. $8\alpha^2\beta - 4\alpha\beta = 4\alpha\beta(2\alpha - 1)$

  Στο παράδειγμα η παράσταση $4\alpha\beta(2\alpha - 1)$ δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση. Για αυτό λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί **σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.**

  Στο εξής, όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μια παράσταση θα εννοούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- **Βασικές μέθοδοι παραγοντοποίησης**

  1. **Κοινός Παράγοντας.** Αν όλοι οι όροι της παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε χρησιμοποιείται η επιμεριστική ιδιότητα για την μετατροπή της παράστασης σε γινόμενο παραγόντων.

     Παραδείγματα:

     α) $5\alpha - 5\beta + 5\gamma = \mathbf{5}\alpha - \mathbf{5}\beta + \mathbf{5}\gamma$

     $= \mathbf{5}(\alpha - \beta + \gamma)$

β) $12x^2 - 8x = \mathbf{4x} \cdot 3x - \mathbf{4x} \cdot 2$

$$= \mathbf{4x}(3x - 2)$$

γ) $20a^5\beta^3 - 15a^2\beta + 5a\beta = \mathbf{5a\beta} \cdot 4a^4\beta^2 - \mathbf{5a\beta} \cdot 3a + \mathbf{5a\beta} \cdot 1$

$$= \mathbf{5a\beta}(4a^4\beta - 3a + 1)$$

2. **Κοινός Παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση).** Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες με τέτοιο τρόπο ώστε:

   - Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
   - Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες.

   Παράδειγμα:

   $$\kappa x + \kappa y + \lambda x + \lambda y = \underbrace{\boldsymbol{\kappa} x + \boldsymbol{\kappa} y} + \underbrace{\boldsymbol{\lambda} x + \boldsymbol{\lambda} y}$$

   $$= \kappa(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$$

   $$= (x + y)(\kappa + \lambda)$$

3. **Διαφορά τετραγώνων.** Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην ταυτότητα

   $$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

   Αν το πολυώνυμο γράφεται σε μορφή διαφοράς τετραγώνων δύο μονωνύμων, τότε μετατρέπεται σε γινόμενο αθροίσματος μονωνύμων επί την διαφορά τους.

   Παραδείγματα:

   $x^2 - 25 = \boldsymbol{x}^2 - \mathbf{5}^2 = (x + 5)(x - 5)$

   $(\mathbf{2x - 1})^2 - \boldsymbol{y}^2 = (2x - 1 + y)(2x - 1 - y)$

4. **Διαφορά – Άθροισμα κύβων.** Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στις ταυτότητες

   $$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

   $$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

   Παραδείγματα:

   $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

   $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

   $8a^3 - \beta^3 = (2a)^3 - \beta^3 = (2a - \beta)(4a^2 + 2a\beta + \beta^2)$

5. Τριώνυμο 2ου βαθμού. Το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού.

(α) Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου, όταν $\alpha = 1$, δηλαδή $x^2 + \beta x + \gamma$ γίνεται ως εξής:

Αναζητούμε δύο αριθμούς κ, λ, αν υπάρχουν, που να έχουν γινόμενο γ και άθροισμα β, δηλαδή $\kappa \cdot \lambda = \gamma$ και $\kappa + \lambda = \beta$.

Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων $x + \kappa$, $x + \lambda$ και έχουμε:

$$(x + \boldsymbol{\kappa})(x + \boldsymbol{\lambda}) = x^2 + \lambda x + \kappa x + \kappa\lambda = x^2 + (\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\lambda})x + \boldsymbol{\kappa\lambda}$$

οπότε $\kappa + \lambda = \beta$ και $\kappa \cdot \lambda = \gamma$.

Παράδειγμα:

$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

(β) Ανάπτυγμα τετραγώνου. Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στις ταυτότητες

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παραδείγματα:

$4\alpha^2 + 12\alpha + 9 = (2\alpha)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = (2a + 3)^2$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6y + (6y)^2 = (x - 6y)^2$

6. Συνδυασμός των πιο πάνω μεθόδων. Σε πολλές αλγεβρικές παραστάσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε συνδυασμό των πιο πάνω μεθόδων.

Παράδειγμα:

$12\alpha^2 - 3\beta^2 = 3(4\alpha^2 - \beta^2)$ κοινός παράγοντας

$= 3(2\alpha + \beta)(2\alpha - \beta)$ διαφορά τετραγώνων

Παραδείγματα

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $16-8x$ β) x^3-x^2y γ) xy^2-x^2y

δ) $\alpha\beta^2\gamma^3-\alpha^2\beta\gamma^2$ ε) $2x(x-y)+5y(x-y)$ στ) $10(x+y)+2a(x+y)$

Λύση:

α) $16-8x=8(2-x)$

β) $x^3-x^2y=x^2(x-y)$

γ) $xy^2-x^2y=xy(y-x)$

δ) $\alpha\beta^2\gamma^3-\alpha^2\beta\gamma^2=\alpha\beta\gamma(\beta\gamma^2-\alpha\gamma)$

ε) $2x(x-y)+5y(x-y)=(x-y)(2x-5y)$

στ)$10(x+y)+2a(x+y)=2(x+y)(5+a)$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $\beta x-\alpha\beta+x^2-\alpha x$ β) $6x^2-4ax-9\beta x+6\alpha\beta$

γ) $a^3+15+5a^2+3a$ δ) $x^3-5x^2+2x-10$

Λύση:

α) $\underline{\beta x-\alpha\beta}+\underline{x^2-\alpha x}=\beta(x-\alpha)+x(x-\alpha)$

$$=(x-a)(\beta+x)$$

β) $\underline{6x^2-4ax}-\underline{9\beta x+6\alpha\beta}=2x(3x-2a)-3\beta(3x-2a)$

$$=(3x-2a)(2x-3\beta)$$

γ) $\underline{a^3}+\underline{\underline{15}}+\underline{5a^2}+\underline{\underline{3a}}=\alpha^2(\alpha+5)+3(\alpha+5)$

$$=(\alpha+5)(\alpha^2+3)$$

δ) $\underline{x^3-5x^2}+\underline{\underline{2x-10}}=x^2(x-5)+2(x-5)$

$$=(x-5)(x^2+2)$$

3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 2x - y^2 + 1$ β) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

γ) $9x^2 - 36y^2 - 30x + 25$ δ) $x^2 + 6ax - 9y^2 + 9a^2$

Λύση:

α) $x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x-1)^2 - y^2$

$= (x - 1 - y)(x - 1 + y)$

β) $y^2 - x^2 - 10y + 25 = (y-5)^2 - x^2$

$= (y - 5 - x)(y - 5 + x)$

γ) $9x^2 - 36y^2 - 30x + 25 = (3x-5)^2 - 36y^2$

$= (3x - 5 - 6y)(3x - 5 + 6y)$

δ) $x^2 + 6ax - 9y^2 + 9a^2 = (x-3a)^2 - 9y^2$

$= (x - 3a - 3y)(x - 3a + 3y)$

4. Αν δύο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12.

Λύση:

Αν α και β είναι οι δύο ακέραιοι τότε είναι:

$\alpha = 6\kappa + \upsilon$ και $\beta = 6\lambda + \upsilon$ οπότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
a^2 - \beta^2 &= (6\kappa + \upsilon\,)^2 - (6\lambda + \upsilon)^2 \\
&= (6\kappa + \upsilon + 6\lambda + \upsilon)(6\kappa + \upsilon - 6\lambda - \upsilon) \\
&= (6\kappa + 6\lambda + 2\upsilon)(6\kappa - 6\lambda) \\
&= 2(3\kappa + 3\lambda + \upsilon)6(\kappa - \lambda) \\
&= 12(\kappa - \lambda)(3k + 3\lambda + \upsilon) \\
&= 12 \cdot a \qquad \text{(πολλαπλάσιο του 12).}
\end{aligned}
$$

Δραστηριότητες

1. Ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι γινόμενο παραγόντων;

α) $2(x-y)(x+y)$ β) $2+(x-y)(x+y)$ γ) $4\left(\alpha-\beta\right)^2$

δ) $4+\left(\alpha-\beta\right)^2$ ε) $(x+2y)x-y$ στ) $(x+2y)(x-y)$

ζ) $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)$ η) $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)+1$

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Η παράσταση $3x^3+3x^2+x+1$ παραγοντοποιείται ως εξής:

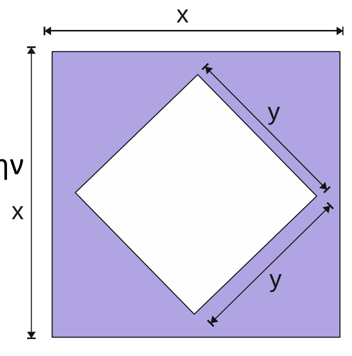
Α. $3x^2(x+1)$ Β. $(x+3)(3x^2-1)$ Γ. $(x+1)(3x^2+1)$ Δ. $x(3x^2+x+1)$

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

$\boldsymbol{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}$	$\boldsymbol{\alpha\beta}$	$\boldsymbol{\alpha+\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{(x+\alpha)(x+\beta)}$
x^2+3x+2					
x^2-3x+2					
x^2+5x-6					
x^2+5x+6					
x^2-x-2					
x^2+x-2					

4. Ένας μαθητής ισχυρίστηκε ότι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους ισούται με $(x-y)(x+y)$.

Να ελέγξετε τον ισχυρισμό του και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $5x + 5y$ β) $4x + 4$ γ) $16 - 8x$

δ) $x^3 - x^2y$ ε) $6x^2 - 4x$ στ) $3\alpha^2xy - 12\alpha^3x^2y$

ζ) $xy^3 - x^3y$ η) $(x^2+4)^2 - 16x^2$ θ) $(13x^2 - 5y^2)^2 - (12x^2 + 4y^2)^2$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ β) $x^3 - x^2 + x - 1$

γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$ δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ η) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2}$

θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,x - 2$

7. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις $A = x^4 - 4x^2$, $B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ και $A - B$.

8. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων την παράσταση:

$\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta)$.

9. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων την παράσταση:

$\alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + 2\alpha\beta\gamma$.

10. α) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β Ισχύει $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $992^2 + 2 \cdot 8 \cdot 992 + 8^2$ β) $0{,}58^2 + 0{,}42^2 + 2 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}48$

γ) $6001 \cdot 5999$ δ) $8005^2 - 7995^2$

12. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $xy(a^4+\beta^4)+a^2\beta^2(x^2+y^2)$ β) $xy(a^4+\beta^4)-a^2\beta^2(x^2+y^2)$

13. Αν $\beta^2-\gamma^2=a^2$, να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων την παράσταση $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

14. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων την παράσταση:

$a^2\beta^2(\gamma^4+1)-(a^4+\beta^4)\gamma^2$.

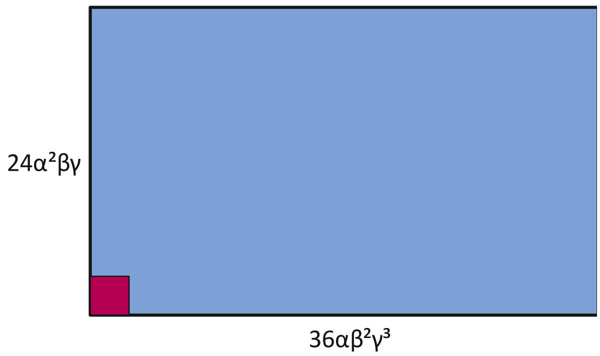
15. Αν είναι $X=2^{2013}+2^{-2013}$ και $Y=2^{2013}-2^{-2013}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης X^2-Y^2.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) και
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)
Ακέραιων Αλγεβρικών Παραστάσεων

Διερεύνηση

Θέλουμε να χωρίσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $24\alpha^2\beta\gamma$ και $36\alpha\beta^2\gamma^3$ σε ίσα τετράγωνα. Να υπολογίσετε τον ελάχιστο αριθμό των ίσων τετραγώνων και την πλευρά τους.

Να υπολογίσετε τη δεύτερη διάσταση ορθογωνίου παραλληλογράμμου το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με το δεδομένο και τη μία του διάσταση ίση με την πλευρά του τετραγώνου.



Μαθαίνω

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (ΕΚΠ) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο όλων των παραγόντων τους με εκθέτη το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.
- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (ΜΚΔ) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των **κοινών παραγόντων** τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το $ΕΚΠ$ και το $ΜΚΔ$ των μονωνύμων $12x^3y^2, 24x^2y^3\omega, 300x^4y$.

Λύση:

Αναλύουμε τα μονώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

$12x^3y^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot x^3y^2$

$24x^2y^3\omega = 2^3 \cdot 3 \cdot x^2y^3\omega$

$300x^4y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot x^4y$

$ΕΚΠ[12x^3y^2, 24x^2y^3\omega, 300x^4y] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot x^4y^3\omega = 600x^4y^3\omega$

$ΜΚΔ(12x^3y^2, 24x^2y^3\omega, 300x^4y) = 12x^2y$

2. Να βρείτε το $ΕΚΠ$ και το $ΜΚΔ$ των παραστάσεων:

α) $4(x^2 - y^2)$, $6(x+y)^2$, $3\left(x - y\right)^2$

β) $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8$, $\alpha^2 - 4$, $\alpha^2 - 2\alpha$

Λύση:

Αναλύουμε τις παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

α) $4(x^2 - y^2) = 2^2 \cdot (x-y)(x+y)$

$6(x+y)^2 = 2 \cdot 3(x+y)^2$

$3\left(x - y\right)^2$

$ΕΚΠ = 2^2 \cdot 3\left(x - y\right)^2(x+y)^2 = 12(x-y)^2(x+y)^2$

$ΜΚΔ = 1$

β) $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = (\alpha - 2)^3$

$\alpha^2 - 4 = (\alpha - 2)(\alpha + 2)$

$\alpha^2 - 2\alpha = \alpha(\alpha - 2)$

$ΕΚΠ = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 2)^3$

$ΜΚΔ = \alpha - 2$

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε το $ΕΚΠ$ και το $ΜΚΔ$ των παραστάσεων:

   α) $12\alpha^3\beta^2\gamma$, $15\alpha^2\beta^3\gamma$, $6\alpha^4\beta^3$

   β) $8\alpha^2x^3$, $4\alpha^3x^5$, $12\alpha^3x^3$

   γ) $3\alpha^2(\alpha - \beta)^2$, $6\alpha^2\beta(\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)$

2. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, αντιστοιχίζοντας κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α με το $ΕΚΠ$ τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β (ΕΚΠ)
α) $x^4(x+2)^2$, $x(x+2)^3$	1. $6x^2(x + 2)^2$
β) $x^3(x+2)$, $x(x+2)^3$	2. $x^3(x + 2)^3$
γ) $6x^2(x+2), 2x(x+2)^2$	3. $6x^2(x + 2)$
	4. $x^4(x + 2)^3$

α)	
β)	
γ)	

Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Μαθαίνω

- Ισχύει η ιδιότητα “$\alpha \cdot \beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta \neq 0$”.

  Δηλαδή όταν το γινόμενο δύο αριθμών διαφορετικών από το μηδέν είναι διάφορο του μηδενός, τότε και οι δύο αριθμοί είναι διάφοροι του μηδενός.

- Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ κλασματικές παραστάσεις με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$, ισχύουν:
  - $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, όταν $\alpha\delta = \beta\gamma$
  - $\kappa \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa\alpha}{\beta}$
  - $\frac{\lambda\, \alpha}{\lambda\, \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\lambda \neq 0$

- Οι μεταβλητές μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν. Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοείται ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

  π.χ. η κλασματική παράσταση $\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)}$, ορίζεται για $\alpha \neq 1$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha \neq -1$.

- Μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα. (Ο παράγοντας που θα απλοποιηθεί πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός).

  Το κλάσμα που προκύπτει μετά την απλοποίηση έχει έννοια για τις ίδιες τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζεται και η αρχική παράσταση.

  π.χ. Η κλασματική παράσταση $\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)}$

  ορίζεται για κάθε $a \neq -1$, και $a \neq 1$. Έχουμε επομένως,

$$\frac{3a-3}{(a-1)(a+1)} = \frac{3(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{3}{\alpha+1}$$

  Προσοχή: Η απλοποιημένη παράσταση που προέκυψε ορίζεται (έχει νόημα) και πάλι για $a \neq -1,\ 1$.

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων για τις οποίες ορίζονται οι πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις.

α) $\frac{13}{x^2}$ β) $\frac{y}{x+5}$ γ) $\frac{x-4}{x^2-4}$

Λύση:

α) Η παράσταση $\frac{13}{x^2}$ δεν ορίζεται, όταν $x^2 \neq 0$, δηλαδή, όταν $x \neq 0$.

β) Η παράσταση $\frac{y}{x+5}$ δεν ορίζεται, όταν $x+5 \neq 0$, δηλαδή, όταν $x \neq -5$.

γ) Η παράσταση $\frac{x-4}{x^2-4}$ δεν ορίζεται, όταν $x^2-4 \neq 0$, δηλαδή, $(x-2)(x-2) \neq 0$, ή $x \neq -2$ και $x \neq +2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{5x^2y^3}{10x^5y^2}$ β) $\frac{12(a+1)^4}{4(a+1)^5}$

γ) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

Λύση:

α) Για να ορίζεται η παράσταση, θα πρέπει $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Επομένως,

$$\frac{5x^2y^3}{10x^5y^2} = \frac{5 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y}{2 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot y^2} = \frac{y}{2x^3}$$

β) Για να ορίζεται πρέπει $4(a+1)^5 \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq -1$.

Άρα $\frac{12(a+1)^4}{4(a+1)^5} = \frac{3}{\alpha+1}$

γ) Για να ορίζεται πρέπει $x^2 - 2xy + y^2 \neq 0$, δηλαδή $(x-y)^2 \neq 0$. Άρα, $x \neq y$.

Επομένως, $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες **δεν** ορίζεται η πράξη της διαίρεσης της παράστασης $\frac{x^2-3x}{x-2}$ με την παράσταση $\frac{2x-8}{x(x-9)}$.

2. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\frac{x}{x^2}$ β) $\frac{ax^3}{xa^3}$ γ) $\frac{10a}{5(a+1)}$

δ) $\frac{9x(a-9)}{36(9-a)x^3}$ ε) $\frac{6(\omega+1)}{2(\omega+1)^2}$ στ) $\frac{3\cdot 2^{\nu+1}(\nu+1)}{6\cdot 2^{\nu}\cdot \nu}$

ζ) $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-1}$ η) $\frac{a\beta^2\gamma^3}{a^2\beta\gamma^2}$ θ) $\frac{6(a+1)(a-2)^2}{24\,(x-2)(x+1)^2}$

ι) $\frac{a^2+2a\beta+\beta^2}{(a+\beta)^2}$

3. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\frac{2a-8}{a^2-4a}$ β) $\frac{x^2-1}{x^2-x}$ γ) $\frac{a\beta-a\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$

δ) $\frac{x^2y-xy^2}{x^3y-xy^3}$ ε) $\frac{15a^2-6a\beta}{25a^3-4a\beta^2}$ στ) $\frac{a\beta-a\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$

ζ) $\frac{4x^2-4x+1}{1-4x^2}$ η) $\frac{x^5-x}{x^3-x^2}$ θ) $\frac{2a^3-2\beta^3}{a^2+a\beta+\beta^2}$

4. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\frac{2x+3yx+6y+4}{3xy+3y+2x+2}$ β) $\frac{x^2+2a+x+2ax}{x^4-x^2-4a^2x^2+4a^2}$

γ) $\frac{x^6-y^6}{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}$ δ) $\frac{a^3-a^2\beta-a\beta^2+\beta^3}{a^3-3a\beta(a-\beta)-\beta^3}$

5. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{333334\cdot 666663\cdot 333331+333327}{333333^2}$ είναι ακέραιος. Να βρεθεί αυτός ο ακέραιος.

Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση

Μαθαίνω

- Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ παραστάσεις τότε:
  - $\kappa \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa\alpha}{\beta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$
  - $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

Παραδείγματα

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $\frac{2\alpha+3\beta}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\beta^2-\alpha^2}{9\beta^2-4x^2}$

Λύση:

Για να ορίζεται, πρέπει

$\alpha - \beta \neq 0$ δηλαδή, $\alpha \neq \beta$

και $9\beta^2 - 4\alpha^2 \neq 0 \Rightarrow (3\beta - 2\alpha)(3\beta + 2\alpha) \neq 0$ δηλαδή, $2\alpha \neq 3\beta$ $2\alpha \neq -3\beta$.

Άρα,

$$\frac{2\alpha+3\beta}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\beta^2-\alpha^2}{9\beta^2-4\alpha^2} = \frac{2\alpha+3\beta}{\alpha-\beta} \cdot \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{(3\beta-2\alpha)(3\beta+2\alpha)} = \frac{-(2\alpha+3\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{-(\alpha-\beta)(2\alpha-3\beta)(2\alpha+3\beta)} = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta}.$$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{1}{3x}:12x$

β) $\frac{x^2}{2y}:\frac{x^3}{6y^4}$

γ) $\frac{1-4x+4x^2}{x^2-4}:\frac{2x-1}{x+2}$

δ) $\frac{\frac{1}{a^2-\beta^2}}{\frac{a^2-a\beta+\beta^2}{a^3+\beta^3}}$

Λύση:

α) Για να ορίζεται, πρέπει $x \neq 0$.

Άρα, $\frac{1}{3x}:12x = \frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{12x} = \frac{1}{(3x)\cdot(12x)} = \frac{1}{36x^2}$

β) Για να ορίζεται, πρέπει $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Άρα, $\frac{x^2}{2y}:\frac{x^3}{6y^4} = \frac{x^2}{2y}\cdot\frac{6y^4}{x^3} = \frac{3y^3}{x}$

γ) Για να ορίζεται, πρέπει

$2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$ και

$x^2-4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow\ x \neq 2$ και $x \neq -2$.

Άρα, $\frac{1-4x+4x^2}{x^2-4}:\frac{2x-1}{x+2} = \frac{(1-2x)^2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x+2}{2x-1} = \frac{(2x-1)^2\cdot(x+2)}{(x-2)(x+2)(2x-1)} = \frac{2x-1}{(x-2)}$

δ) Για να ορίζεται, πρέπει

$a^2-\beta^2 \neq 0 \Rightarrow (a-\beta)(a+\beta) \neq 0 \Rightarrow\ a \neq \beta$ και $a \neq -\beta$.

Από το $a \neq \beta$ και $a \neq -\beta$ ισχύει επίσης ότι:
$a^3+\beta^3 = (a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2) \neq 0$

Άρα, $\frac{\frac{1}{a^2-\beta^2}}{\frac{a^2-a\beta+\beta^2}{a^3+\beta^3}} = \frac{\frac{1}{(a-\beta)(a+\beta)}}{\frac{a^2-a\beta+\beta^2}{(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)}} = \frac{(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)}{(a-\beta)(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)} = \frac{1}{a-\beta}$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $\frac{2}{a\beta}\cdot\frac{a}{4\beta}\cdot\frac{3\beta^2}{a}$

β) $\left(-\frac{3a^2}{50a}\right)\cdot\frac{25}{ax}$

γ) $\frac{4}{x^3}\cdot\frac{x^3}{2y^2}$

δ) $-\frac{4a}{xy\omega}\cdot\frac{x}{y^2}\cdot\left(\frac{y}{2a}\right)^2$

ε) $\frac{3}{(x-2)^2}\cdot\frac{x-2}{6x}\cdot(2-x)$

2. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $\frac{3a^2}{\beta}:\frac{\beta^2}{6a}$

β) $\frac{a^5}{\beta^5}:\left(\frac{a}{\beta}\right)^6$

γ) $\frac{x+a}{\beta^2-x^2}\cdot\frac{x+\beta}{a^2-x^2}$

δ) $\frac{x}{x-1}:\frac{x^2-x}{x^3}$

ε) $\frac{6}{x+y}:\frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$

στ) $\frac{x^3}{x^3-1}:\frac{x^3+x^2+x}{3}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\frac{x-\omega}{x+\omega}}{(x+\omega)^2}$

β) $\dfrac{\frac{xy-xy^3}{4+4y}}{\frac{xy-x^3y}{6-6x}}$

γ) $\dfrac{a}{\frac{a^2+a}{a^2-1}}$

δ) $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x-1}{x+1}}:\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$

4. Αν για τους αριθμούς α,β,x,y ισχύει: $a-x=y-\beta$ και $x\neq\pm y$ να δείξετε ότι η παράσταση: $A=\frac{a+\beta}{x^2-y^2}:\frac{1}{x-y}$ είναι ίση με 1.

5. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ και ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=0$, να δείξετε ότι:

α) Η παράσταση $\dfrac{\beta^2+2\beta\gamma-a^2}{a+\beta}$ είναι ίση με γ.

β) Η παράσταση $\dfrac{\beta^2+2\beta\gamma-a^2}{a+\gamma}+\dfrac{a^2+2a\beta-\gamma^2}{a+\gamma}+\dfrac{\gamma^2+2\gamma a-\beta^2}{\gamma+\beta}$ είναι ίση με 0.

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{x^5-x^3}{x^3-x} \cdot \frac{1}{x}$ για $x = 2003$.

7. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \frac{x^2y^2 - y^4}{x^3 - y^3} : \frac{xy^2 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$$

είναι σταθερή.

Πρόσθεση – Αφαίρεση Αλγεβρικών Παραστάσεων

Μαθαίνω

- Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε ρητές παραστάσεις χρησιμοποιούμε τους κανόνες:

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}} \quad , \qquad \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}} \quad , \qquad \boldsymbol{\beta\neq 0}$$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ β) $\frac{x}{x+y}-\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}$

Λύση:

α) Για να ορίζεται η παράσταση $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ πρέπει $x, y\neq 0$.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}=\frac{y+x}{xy}$$

β) Για να ορίζεται η παράσταση $\frac{x}{x+y}-\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}$ πρέπει:

$x^2-y^2\neq 0 \Rightarrow (x-y)(x+y)\neq 0 \Rightarrow x-y\neq 0 \ \ και \ \ x+y\neq 0 \Rightarrow$
$x\neq y \quad και \quad x\neq -y$

Άρα, για $x\neq \pm y$ έχουμε:

$$\frac{x}{x+y}-\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}=\frac{x}{x+y}-\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{y}{x-y}=$$

$$=\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x(x-y)-1+y(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x^2 - xy - 1 + xy + y^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x+y)(x-y)}$$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

   (α) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x}$ (β) $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ (γ) $\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{\kappa}{\lambda}$ (δ) $\frac{\alpha}{\beta} - 1$

   (ε) $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{4}{5}$ (στ)$3x + \frac{1}{3x}$ (ζ) $\frac{1}{x} - x + 1$ (η) $\frac{4x}{x+1} + \frac{4}{x+1}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

   α) $\frac{\alpha}{2\beta} + 1 + \frac{\beta}{2\alpha}$ β) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3}$

   γ) $\frac{3}{2x} - \frac{1}{xy} + \frac{2}{3y}$ δ) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2y} + \frac{1}{xy}$

   ε) $2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

   α) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ β) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

   γ) $\frac{1}{2-x} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ δ) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$

   ε) $\frac{1}{x+2} - \frac{x}{(x+2)^2} - \frac{2x}{(x+2)^3}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

   α) $\frac{1}{xy+x^2} + \frac{1}{y^2+xy} - \frac{1}{xy}$ β) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-2\alpha\beta} - \frac{2\beta}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)^2}$

   γ) $\frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha+1} - \frac{2\alpha-1}{\alpha^3+1} - \frac{1}{\alpha+1}$ δ) $\frac{1-\alpha}{\alpha-2} - \frac{\alpha-3}{\alpha+2} - \frac{4}{4-\alpha^2}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{3}{5}-\frac{5+9\alpha}{15\alpha}$ β) $\frac{\beta+4}{4\beta}-\frac{1}{\beta}$ γ) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}$

δ) $\frac{2}{x-y}+\frac{4y}{y^2-x^2}$ ε) $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a-3}-\frac{6}{a^2-9}$ στ) $\frac{x-a}{x-\beta}+\frac{x-\beta}{x-a}-\frac{(a-\beta)^2}{(x-a)(x-\beta)}$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{4xy}{x^2-y^2}$ β) $\frac{a^2+\beta^2}{a^2-a\beta}+\frac{a^2+\beta^2+2a\beta}{a^2-\beta^2}$

γ) $\frac{a^2}{a\beta+\beta^2}-\frac{a^2+\beta^2}{a\beta}+\frac{a^2}{a^2+a\beta}$ δ) $\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{xy-y^2}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $a(a+1)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)$ β) $(a-\beta):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\beta}\right)$

γ) $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)$ δ) $\frac{\frac{a}{\beta}+\frac{\beta}{a}-1}{a^3+\beta^3}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)$

ε) $\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x^3}-1\right)$ στ) $\left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{\beta}{a}}-\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a}{\beta}-1}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}\right)$

ζ) $\left(1+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)+\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{a}\right)$

8. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(y-z)(y-x)}+\frac{1}{(z-x)(z-y)}=0$$

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$ (β) $\frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$ (γ) $\frac{15x^2}{9x}$

(δ) $\frac{2a^3}{3\beta^2} : \frac{4a^2}{6\beta}$ (ε) $(-5\omega^3) \cdot \frac{7}{15\omega^2}$ (στ) $\left(-\frac{3a\beta}{5\beta}\right) \cdot (-4a\beta^3)$

(ζ) $\frac{3x+6}{x^2} : \frac{x+2}{9x}$ (η) $\frac{a-4}{4+a} \cdot \frac{a+4}{4-a}$ (θ) $\frac{x-\omega}{x^3\omega^2} : \frac{x^2-\omega^2}{x^4\omega^3}$

(ι) $\frac{a^2-4}{a^2+a-6} \cdot \frac{a+3}{a^2+2a}$ (ια) $\frac{y^2-4}{y^2+y} : \frac{y^2+5y+6}{y^2+3y}$ (ιβ) $\frac{x^3+8}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x^2-2x+4}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(x-3y)(x^2+3y) - x^4 + 9y^2$

(β) $(2x+3)(x^2+x-1) - (x^2-1)(x+2) - 2x^3$

(γ) $(a+2)(a^2+x-1) - a(a^2-2)$

(δ) $2x^3y - xy(x-y)(2x-y) + xy^3$

3. Αν είναι $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 3$, να κάνετε τη διαίρεση:

$[\varphi(x) + \varphi(x-2) - \varphi(x-1)] : (x-3)$

4. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

α) $(2x+3x^2)^2$ β) $\left(\frac{1}{a} + a\right)^2$

γ) $(2x+3y)^3$ δ) $(2x+y-\omega)^2$

ε) $(y^2-\omega)(y^2+\omega)$ στ) $(3a-2\beta)^3$

ζ) $(1+\beta)(\beta^4-1)(\beta-1)(1+\beta^4)$ η) $(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta-2)$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x(x-1)+4(x-1)}{x^2+2x-3}$ β) $\frac{y(y-3)+y^2-9}{4y^2-9}$

γ) $\frac{(2\omega+1)^2-(\omega+2)^2}{\omega^4-1}$ δ) $\frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2-4(\alpha+1)}{\alpha^3+\alpha^2}$

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 80$.

(α) Να αποδείξετε ότι $P(x-1) = P(x)$.

(β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή $P(100)$ και $P(-99)$.

7. Αν $a + \beta = -\frac{1}{3}$ και $a\beta = -\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:

α) $a^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

β) $(3a+1)^2 + (3\beta+1)^2 + 10(a+\beta) = 40$

8. α) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $x^2 + 4x + 3$, $x^2 + 2x - 3$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+2x-3}$

9. Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x+3)$ και $(x+1)(x+2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $B = A + 2$ και $AB + 1 = (A+1)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$.

10. Αν ο αριθμός κ είναι ακέραιος, αν αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος.

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2x+y)^2 - (3y-2x)^2$

β) $(2+5y)(2-3y) - 2(3+2y)^2$

γ) $(3x+2)^2 - (2-5x)^2 - (4x+1)(1-4x)$

12. Αν $\alpha\beta = 9$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\left(\frac{5a-\beta}{3}\right)^2 - \left(\frac{5a+\beta}{3}\right)^2$

13. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $a\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)$

β) $(a+1)^2 - 9$

γ) $3x^5+9x^4+2x^3+6x^2+x+3$

δ) $(x-y)^2 - (x+y)^2$

ε) $a^3x^3-\beta^3x^3+a^3-\beta^3$

στ) $x^3-y^3+x^2-y^2$

ζ) $4a^2(\beta^2-1)+4\beta^2(1-\beta^2)$

η) $y^2-x^2-10y+25$

θ) $x^3+y^3-3x-3y$

ι) $a^3+2a^2+a+a\beta+\beta$

ια) $(3a-9)(a^2-9)-(a-3)^2$

ιβ) $2(x^2+4x-21)+3(x^2-6x+9)$

ιγ) $100\omega^3+100\omega^2-\omega-1$

ιδ) $x^2+4x-36a-12+ax^2$

ιε) $a^2-\beta^2-\gamma^2-10a+25+2\beta\gamma$

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Το τρίγωνο του Πασκάλ και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του $\alpha + \beta$

   Οι αντίστοιχοι συντελεστές σε κάθε ανάπτυγμα σχηματίζουν μια γραμμή σ' ένα αριθμητικό τρίγωνο, που είναι γνωστό ως τρίγωνο του Πασκάλ. Το τρίγωνο αυτό πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) και οι αριθμοί του κρύβουν πολλές ιδιότητες. Ο πρώτος και ο τελευταίος αριθμός κάθε σειράς είναι 1.

1	$(\alpha+\beta)^0 =$	$\mathbf{1}$
$1 \quad 1$	$(\alpha+\beta)^1 =$	$\mathbf{1}\alpha + \mathbf{1}\beta$
$1 \quad 2 \quad 1$	$(\alpha+\beta)^2 =$	$\mathbf{1}\alpha^2 + \mathbf{2}\alpha\beta + \mathbf{1}\beta^2$
$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$	$(\alpha+\beta)^3 =$	$\mathbf{1}\alpha^3 + \mathbf{3}\alpha^2\beta + \mathbf{3}\alpha\beta^2 + \mathbf{1}\beta^3$
$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$	$(\alpha+\beta)^4 =$	$\mathbf{1}\alpha^4 + \mathbf{4}\alpha^3\beta + \mathbf{6}\alpha^2\beta^2 + \mathbf{4}\alpha\beta^3 + \mathbf{1}\beta^4$
$1 \ \square \ \square \ \square \ \square \ 1$	$(\alpha+\beta)^5 =$	$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$
$1 \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ 1$	$(\alpha+\beta)^6 =$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

(α) Να παρατηρήσετε τα αναπτύγματα των δυνάμεων του αθροίσματος $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$.

Μπορείτε να ανακαλύψετε με ποιον τρόπο προκύπτουν οι υπόλοιποι αριθμοί κάθε σειράς;

(β) Να συνεχίσετε την κατασκευή του τριγώνου και να υπολογίσετε τα αναπτύγματα $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^5$ και $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^6$.

(γ) Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα του $(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^6$.

(δ) Μπορείτε να βρείτε άλλες ιδιότητες που κρύβουν οι αριθμοί του τριγώνου του Πασκάλ;

2. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίνονται από τις ισότητες $\alpha = \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}}$ και $\beta = \frac{3}{4-\sqrt{14}} + \frac{3}{4+\sqrt{14}}$.. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.

3. Αν $\alpha = 2\sqrt{4} - \sqrt{15}$ και $\beta = \sqrt{6} - \sqrt{10}$ τότε:
   i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 - \beta^2$
   ii. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι

4. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(1-\alpha)^2 - (3\alpha+2)^3 - \alpha(\alpha+2)(\alpha-2)$
   (β) $(x+y)^3 - y(x+y)(x-y) - x(x-y)$
   (γ) $(\beta+2)^3 - 3\beta(\beta-1)^2 + (\beta+1)(\beta-1)(\beta-2)$

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^2 + (x-1)^3 - x^3 + 7$
   α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$
   β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

6. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^2 - 3x + 5$
   α) Να προσδιορίσετε τα πολυώνυμα : $P(-2x)$ και $P(x-2)$
   β) Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο : $Q(x) = x^2 \cdot P(-2x) - P(x-2)$
   γ) Να βρείτε το άθροισμα : $Q(0) + Q(1)$

7. Αν $f(x) = 3x - 1$ και $g(x) = 1 - 2x$ να υπολογίσετε την παράσταση:
   $[f(x) - 2g(x+1)] \cdot [f(1-x) + g(2x)] + 3f(x)$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Στατιστική
Πιθανότητες

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μέτρα Θέσης

Εξερεύνηση

- Στους αγώνες ρυθμικής γυμναστικής, έξι κριτές βαθμολογούν το διαγωνιζόμενο από το 1 μέχρι το 10. Αφού αφαιρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη βαθμολογία, αθροίζουν τις υπόλοιπες τέσσερεις και διαιρούν το άθροισμα με το 4. Αυτή είναι η τελική βαθμολογία του κάθε διαγωνιζόμενου.

  Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τη βαθμολογία των ολυμπιονικών, στους Ολυμπιακούς αγώνες της Αθήνας το 2004.

GYMNAST	JUDGES' SCORES					
Carly Patterson, USA	9.80	9.75	9.80	9.75	9.75	9.80
Alexandra Eremia, ROM	9.70	9.70	9.70	9.65	9.70	9.70
Catalina Ponor, ROM	9.80	9.80	9.80	9.75	9.75	9.80

α) Γιατί, νομίζετε, ότι αφαιρείται η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή;

β) Να υπολογίσετε τη βαθμολογία της αθλήτριας που πήρε το χρυσό.

Διερεύνηση (1)

- Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των γραμμάτων του ονοματεπώνυμου 21 μαθητών ενός τμήματος.

7	7	8	11	11	11	11	12	12	12	12	13	13	13	14	14	15	15	17	19	19

α) Πόσα γράμματα έχει το μικρότερο ονοματεπώνυμο;

β) Πόσα γράμματα έχει το μεγαλύτερο ονοματεπώνυμο;

γ) Ποιος αριθμός γραμμάτων εμφανίζεται τις περισσότερες φορές;

δ) Αν διπλώσουμε στη μέση το χαρτί που είναι γραμμένος ο ποιο πάνω πίνακας, ποια παρατήρηση θα βρούμε εκεί που διπλώνει το χαρτί; Να σχολιάσετε την παρατήρηση σας.

ε) Αν τη συγκεκριμένη μέρα απουσίαζε ο μαθητής Χρίστος Γεωργίου, να εξετάσετε πώς θα επηρεαστεί η διαδικασία στο ερώτημα (δ) αν συμπεριληφθεί το όνομά του;

στ) Αν ο μαθητής που απουσίαζε ονομαζόταν Χρυσοβαλάντης Παπαχριστοδούλου, θα άλλαζε η απάντηση σας στο ερώτημα (ε);

ζ) Να αφαιρέσετε δύο ονόματα έτσι ώστε η μεσαία παρατήρηση:

i. να μην αλλάξει,

ii. να μεγαλώσει.

Διερεύνηση (2)

- Ο πιο κάτω πίνακας δίνει τις μέγιστες θερμοκρασίες (σε °C) για τις πρώτες 15 μέρες του Ιανουαρίου.

15	15	12	9	5
11	15	16	15	16
16	14	14	13	11

α) Ποια θερμοκρασία εμφανίζεται τις περισσότερες φορές;

β) Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή της θερμοκρασίας;

γ) Ποια είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη θερμοκρασία;

δ) Αν βάλουμε τις θερμοκρασίες με τη σειρά από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη, ποια θερμοκρασία θα βρίσκεται στη μέση;

ε) Αν προσθέσουμε όλες τις θερμοκρασίες και διαιρέσουμε με 15, τι αποτέλεσμα θα βρούμε;

στ) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το αποτέλεσμα στο (ε) είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το (δ);

Μαθαίνω

- **Μέση Τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται το πηλίκο του αθροίσματος των τιμών των παρατηρήσεων δια του πλήθους των παρατηρήσεων.
- **Διάμεσος** ενός συνόλου παρατηρήσεων διατεταγμένων σε αύξουσα σειρά είναι:
  - ✓ η μεσαία τιμή-παρατήρηση για περιττό αριθμό παρατηρήσεων,
  - ✓ η μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων για άρτιο αριθμό παρατηρήσεων.
- **Επικρατούσα τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα (εμφανίζεται τις περισσότερες φορές).

  Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες έχουμε περισσότερες από μία επικρατούσες τιμές.

  π.χ.

  Δίνονται οι θερμοκρασίες σε βαθμούς Κελσίου που καταγράφηκαν το πρώτο δεκαπενθήμερο του Ιουλίου στην Λευκωσία:

  $$36, 37, 37, 38, 40, 40, 39, 36, 37, 38, 37, 39, 39, 40, 40$$

  Παρατηρούμε ότι οι θερμοκρασίες 37 και 40 βαθμοί Κελσίου είναι οι θερμοκρασίες με τη μεγαλύτερη συχνότητα (καταγράφηκαν από 4 φορές η κάθε μια). Άρα, οι επικρατούσες τιμές είναι 37 και 40.

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι βαθμοί 11 μαθητών που πήραν στο διαγώνισμα των μαθηματικών. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμολογιών

79 84 63 95 89 71 90 81 77 54 75

Λύση:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των βαθμών}}{\text{πλήθος βαθμών}} = \frac{79+84+63+95+89+71+90+81+77+54+75}{11} = \frac{858}{11} = 78$$

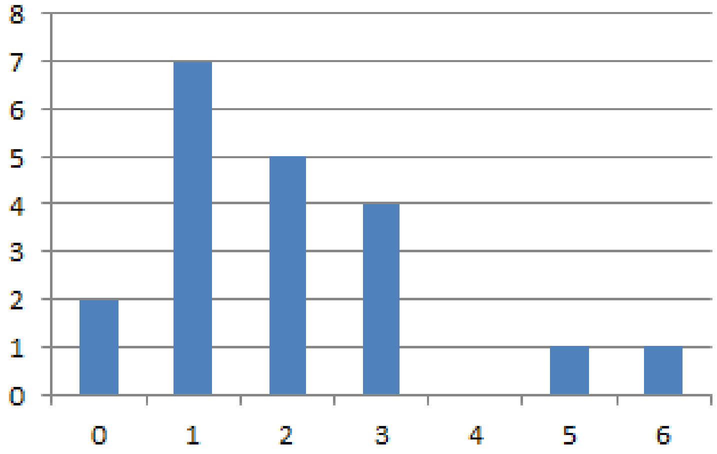
Η μέση τιμή των βαθμών είναι 78.

Για να βρούμε τη **διάμεσο** πρέπει να διατάξουμε τις βαθμολογίες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη:

$$\overbrace{54,\ 63,\ 71,\ 75,\ 77,}^{\text{5 παρατηρήσεις}}\ 79\ \overbrace{81,\ 84,\ 89,\ 90,\ 95}^{\text{5 παρατηρήσεις}}$$

Ο αριθμός των βαθμών είναι περιττός (11). Άρα η **διάμεσος** είναι ο μεσαίος, δηλ. το 79.

2. Το διάγραμμα που ακολουθεί δείχνει πόσα αδέλφια έχουν οι μαθητές μιας τάξης. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.



Λύση:

Μέση τιμή= $\frac{2\cdot0+7\cdot1+5\cdot2+4\cdot3+1\cdot5+1\cdot6}{20}$= 2 αδέλφια

$$\overbrace{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2}^{\text{10 παρατηρήσεις}}, \overbrace{2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 6}^{\text{10 παρατηρήσεις}}$$

Υπάρχουν 20 αριθμοί, έτσι η διάμεσος είναι η μέση τιμή των δύο μεσαίων αριθμών δηλ. του $10^{ου}$ και του $11^{ου}$ αριθμού. Ο $10^{ος}$ και $11^{ος}$ είναι 2 και 2. Άρα η διάμεσος είναι 2 αδέλφια.

Η επικρατούσα τιμή, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, είναι ένας αδελφός αφού στην τιμή 1 αντιστοιχεί η μεγαλύτερη συχνότητα που είναι το 7.

Δραστηριότητες

1. Ο Γιάννης πήρε τρεις βαθμολογίες 17, 16, 15 και η Μαίρη πήρε βαθμολογίες 14, 15, 19. Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τη μέση τιμή των βαθμολογιών τους.

2. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

α) Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων $0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 7$ είναι ο αριθμός 7.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
β) Η διάμεσος των παρατηρήσεων $0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5$ είναι ο αριθμός 2.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
γ) Η διάμεσος των παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν ο αριθμός τους είναι περιττός.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
δ) Αν αντικαταστήσουμε τη μεγαλύτερη παρατήρηση με μια πολύ μεγαλύτερη τιμή τότε η διάμεσος των παρατηρήσεων θα αλλάξει.	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

3. Ο αριθμός των μαθητών των 16 τμημάτων ενός Λυκείου είναι:

$$25,\ 24,\ 23,\ 25,\ 24,\ 22,\ 21,\ 20,\ 21,\ 22,\ 19,\ 21,\ 23,\ 22,\ 22,\ 20.$$

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής "αριθμός μαθητών ανά τμήμα".

4. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι $3, 4, 5, 6, 11$. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς, αν γνωρίζουμε ότι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.

5. Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή Λυκείου είναι:

$$13, 9, 6, 10, 15, 12, 11, 10, 20, 14.$$

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή,
β) τη διάμεσο,
γ) την επικρατούσα τιμή,

6. Τα ύψη 8 αθλητών μιας ομάδας καλαθόσφαιρας είναι (σε cm):

172, 175, 183, 177, 190, 193, 189, 195.

α) Να βρείτε:
 i) Το μέσο ύψος των αθλητών.
 ii) Τη διάμεσο των υψών.

β) Να υπολογίσετε ξανά τη μέση τιμή και διάμεσο, για τις πιο κάτω περιπτώσεις:
Περίπτωση 1: Αν από την ομάδα φεύγει ο αθλητής με ύψος 172 cm.
Περίπτωση 2: Αν στην ομάδα έρχεται ακόμα ένας αθλητής με ύψος 197 cm.
Περίπτωση 3: Αν από την ομάδα φεύγει ο αθλητής με ύψος 195 cm και έρχεται ένας αθλητής με ύψος 198 cm.

Στατιστική με χρήση Λογιστικού Φύλλου στον Υπολογιστή

Σε όλους τους υπολογιστές σήμερα υπάρχουν εγκατεστημένα λογιστικά φύλλα τα οποία μας επιτρέπουν να επεξεργαζόμαστε δεδομένα.

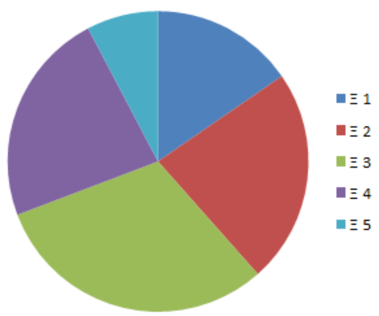
- **Δημιουργία Διαγραμμάτων**

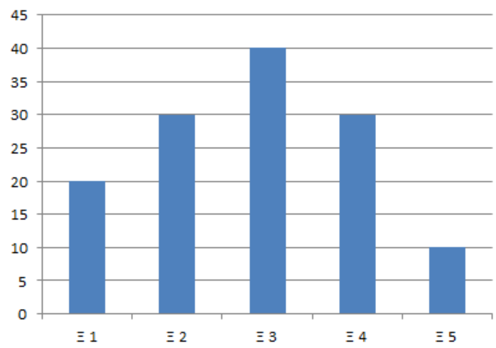
Ραβδόγραμμα ή Κυκλικό Διάγραμμα: Μπορούμε εύκολα να δημιουργήσουμε ένα Ραβδόγραμμα ή Κυκλικό Διάγραμμα ακολουθώντας τη πιο κάτω διαδικασία:

I. Καταγράφουμε τον πίνακα συχνοτήτων στο λογιστικό φύλλο κι επιλέγουμε την περιοχή αυτή (A1:B6)

II. Επιλέγουμε τη γραμμή εργαλείων «Εισαγωγή (Insert)».

III. Επιλέγουμε ένα από τα γνωστά μας διαγράμματα, ραβδόγραμμα ή κυκλικό διάγραμμα.





Ο υπολογιστής θα δημιουργήσει αυτόματα ένα από τα δύο διαγράμματα. Ακολούθως υπάρχουν πολλές επιλογές για καλύτερη μορφοποίηση του διαγράμματος, αν το επιθυμούμε.

- **Υπολογισμός περιγραφικών μέτρων**

	A
1	**Δεδομένα**
2	11
3	12
4	12
5	14
6	17
7	15
8	14
9	13
10	14
11	10

Καταχωρούμε τα δεδομένα στο πρόγραμμα όπως φαίνεται στον πίνακα. Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες συναρτήσεις στον υπολογιστή, υπολογίζουμε γνωστά περιγραφικά μέτρα:

Συνάρτηση στο λογιστικό φύλλο	**Στατιστικό περιγραφικό μέτρο**	**Αποτέλεσμα**
=AVERAGE(A2:A11)	Μέσος όρος	13,2
=MODE(A2:A11)	Επικρατούσα τιμή	14
=MEDIAN(A2:A11)	Διάμεσος	13,5
=MIN(A2:A11)	Ελάχιστη τιμή	10
=MAX(A2:A11)	Μέγιστη τιμή	17

Δραστηριότητες

1. **<u>Ομαδική Εργασία (2-3 Άτομα):</u>**

Μια Διεθνής Εκπαιδευτική Έρευνα στην οποία συμμετείχε η Κύπρος είναι η έρευνα TIMSS. Μερικά από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν στα πλαίσια της έρευνας δίνονται στο αρχείο: ***“BEn9_DATA.xlsx ”*** (*Δεδομένα από Έρευνα TIMSS*). Τα δεδομένα αναφέρονται σε μαθητές της Β΄ Γυμνασίου ενός σχολείου της Κύπρου.

α) Να επεξεργαστείτε τα δεδομένα κατασκευάζοντας στον υπολογιστή κατάλληλα διαγράμματα ή υπολογίζοντας μέτρα θέσης και απόκλισης.
β) Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επεξεργασία των δεδομένων.
γ) Τι εισηγήσεις θα μπορούσατε να κάνατε προς τους συμμαθητές ή προς τους καθηγητές σας με βάση τα αποτελέσματα αυτά.

2. **<u>Ομαδική Εργασία (3-5 Άτομα):</u>**

Να βρείτε από την ιστοσελίδα της Στατιστικής Υπηρεσίας: ***http://www.mof.gov.cy/cystat*** στατιστικά στοιχεία για την Κύπρο, να τα επεξεργαστείτε με κατάλληλες μεθόδους και να τα παρουσιάσετε στους συμμαθητές σας.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Πείραμα Τύχης – Αρχή της Απαρίθμησης

Διερεύνηση

- Ο Παύλος και η Μυρτώ παίζουν με το διπλανό τροχό της τύχης. Γυρίζουν το δείκτη δύο φορές και καταγράφουν τα αποτελέσματά τους. Αν το άθροισμα είναι θετικός αριθμός, κερδίζει ο Παύλος. Αν είναι αρνητικός αριθμός, κερδίζει η Μυρτώ.

  Ποιος έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

Μαθαίνω

- Σε ένα πείραμα τύχης, με ισοπίθανα αποτελέσματα, η **πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου $\boldsymbol{A}$** ή **πιθανότητα του ενδεχομένου $\boldsymbol{A}$** είναι ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του A προς το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.

Δηλαδή:

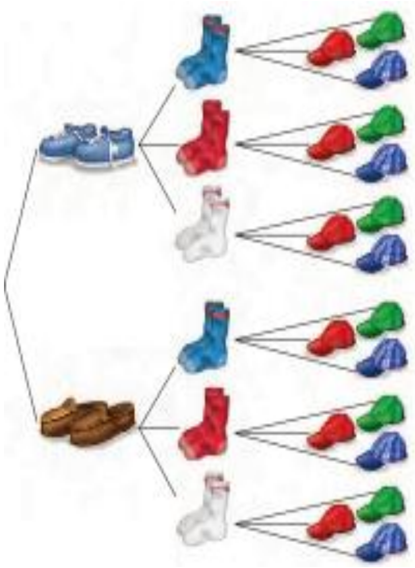
$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων του } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος}} = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}}$$

- Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$.

- Όταν η εκτέλεση ενός πειράματος τύχης πραγματοποιείται σε δύο ή περισσότερες φάσεις, τότε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος μπορούν να βρεθούν και με τη βοήθεια ενός δενδροδιαγράμματος.

π.χ.

Σε ένα παιχνίδι επιλέγουμε διαδοχικά, ένα ζευγάρι από δύο διαφορετικά ζεύγη παπουτσιών, ένα από τρία διαφορετικά ζεύγη καλτσών και ένα από τρία διαφορετικά χρώματα καπέλων.



➔ **μπλε παπούτσια μπλε κάλτσες πράσινο καπέλο**
➔ **μπλε παπούτσια μπλε κάλτσες κόκκινο καπέλο**
➔ **μπλε παπούτσια μπλε κάλτσες μπλε καπέλο**

.
.
.
.
.
.
.
.

➔ **καφέ παπούτσια άσπρες κάλτσες πράσινο καπέλο**
➔ **καφέ παπούτσια άσπρες κάλτσες κόκκινο καπέλο**
➔ **καφέ παπούτσια άσπρες κάλτσες μπλε καπέλο**

Ο δειγματικός χώρος του πιο πάνω πειράματος περιλαμβάνει:

$$3+3+3+3+3+3 \;=\; 18\;\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha$$

<u>Ισχύει γενικότερα:</u> Όταν ένα πείραμα εκτελείται σε τρεις ή περισσότερες *<u>φάσεις</u>* και κάθε φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$,… *<u>τρόπους</u>*, αντίστοιχα, τότε το πείραμα έχει $\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mu}\cdot$ … δυνατά αποτελέσματα.
Η πιο πάνω διαδικασία ονομάζεται «**Αρχή της απαρίθμησης**».

Στο πιο πάνω παράδειγμα, αν εφαρμόσουμε την ***αρχή της απαρίθμησης*** θα έχουμε:

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{3} = 18\;\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}\alpha.$$

<u>Α’ φάση:</u>
Έχω δύο ζευγάρια παπούτσια για να επιλέξω

<u>Β’ φάση:</u>
Έχω τρία ζευγάρια κάλτσες για να επιλέξω

<u>Γ’ φάση:</u>
Έχω τρία καπέλα για να επιλέξω

Παραδείγματα

1. Να καταγράψετε όλα τα πιθανά αποτελέσματα από τη ρίψη δύο ζαριών. Ακολούθως να υπολογίσετε την πιθανότητα:

α) τα δύο ζάρια να έχουν την ίδια ένδειξη και
β) τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια να φέρει την ένδειξη 6.

Λύση:

Για να βρούμε το δειγματικό χώρο του πειράματος χρησιμοποιούμε πίνακα διπλής εισόδου. Όπως φαίνεται στον πίνακα υπάρχουν 36 δυνατά αποτελέσματα.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

α) *Παρατηρούμε ότι έχουμε έξι αποτελέσματα στα οποία τα δύο ζάρια έχουν την ίδια ένδειξη:*

$$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$$

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 6.

$$P(ίδια\ ένδειξη) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

β) *Παρατηρούμε ότι έχουμε έντεκα αποτελέσματα στα οποία τουλάχιστο το ένα ζάρι φέρει την ένδειξη 6:*

$$(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6),\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5).$$

Το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 11.

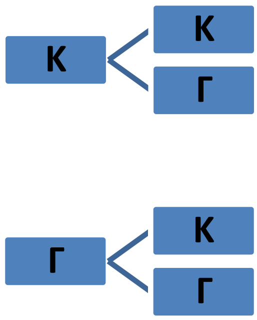
$$P(τουλάχιστον\ μία\ ένδειξη\ 6) = \frac{11}{36}$$

2. Ο Ανδρέας και ο Λεωνίδας, για να επιλέξουν ποιος θα παίξει πρώτος με ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι, αποφάσισαν να ρίξουν διαδοχικά δύο νομίσματα του ενός ευρώ. Συμφώνησαν να παίξει πρώτος ο Αντρέας αν τα νομίσματα έχουν την ίδια όψη. Διαφορετικά θα παίξει πρώτος ο Λεωνίδας. Να εξετάσετε κατά πόσο ο τρόπος που επέλεξαν είναι δίκαιος.

Λύση:

Ονομάζουμε την μια όψη του νομίσματος «Κορώνα» και τη συμβολίζουμε με «**Κ**» και την άλλη όψη «Γράμματα» και τη συμβολίζουμε με «**Γ**».

Κατασκευάζουμε το πιο κάτω δενδροδιάγραμμα:



Ο δειγματικός χώρος είναι: $\Omega = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$

Η πιθανότητα να ξεκινήσει ο Ανδρέας το παιχνίδι είναι:

$$P(ίδιες\ ενδείξεις) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα να ξεκινήσει ο Λεωνίδας το παιχνίδι είναι:

$$P(διαφορετικές\ ενδείξεις) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Τα δύο ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έτσι το πείραμα τύχης δίνει την ίδια πιθανότητα και στα δύο παιδιά. Άρα, είναι ένας δίκαιος τρόπος να αποφασίσουν.

Δραστηριότητες

1. Το κεντρικό μαθητικό συμβούλιο ενός σχολείου αποφάσισε ότι η επιτροπή αξιολόγησης στο διαγωνισμό καθαριότητας του σχολείου θα αποτελείται από ένα άτομο από την επιτροπή περιβάλλοντος και ένα άτομο από την επιτροπή εκδηλώσεων. Να βρείτε όλους τους δυνατούς τρόπους σύνθεσης της επιτροπής.

Επιτροπή Περιβάλλοντος
Άννα
Μάριος
Αντρέας
Παναγιώτης

Επιτροπή Εκδηλώσεων
Γιώργος
Ειρήνη

2. Τρία ζάρια, ένα κόκκινο, ένα μαύρο και ένα άσπρο, τοποθετούνται σε ένα κουτί. Σε ένα πείραμα επιλέγουμε τυχαία ένα ζάρι από το κουτί, το ρίχνουμε και καταγράφουμε πρώτα το χρώμα και ακολούθως την ένδειξή του. Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου του πειράματος.

3. Ρίχνω πρώτα ένα νόμισμα και ακολούθως ένα ζάρι.

α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει στο νόμισμα η ένδειξη κορώνα και στο ζάρι ο αριθμός 6.

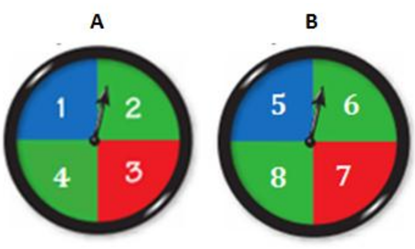
4. Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου κληρώθηκαν να παίξουν στον ίδιο όμιλο οι ομάδες Μ, Α, Π και Γ. Οι 4 ομάδες παίζουν μεταξύ τους δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας).

α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο.

β) Να καταγράψετε τις περιπτώσεις στις οποίες η ομάδα Μ αγωνίζεται εκτός έδρας.

γ) Να καταγράψετε τις περιπτώσεις στις οποίες η ομάδα Π θα παίξει με την ομάδα Γ.

5. Γυρίζουμε τον τροχό A και ακολούθως τον τροχό B τύχης. Αφού καταγράψετε το δειγματικό χώρο, να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:



α) Στον πρώτο τροχό να εμφανιστεί 2 και στο δεύτερο 7.

β) Και στους δύο τροχούς να εμφανιστεί άρτιος αριθμός.

γ) Το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι 9.

δ) Οι ενδείξεις των δύο τροχών να διαφέρουν κατά 1.

6. Ο Μηνάς και ο Χαράλαμπος θα παίξουν το παιχνίδι «Πρόβλεψη γινομένου». Θα ρίξουν δύο ζάρια. Αν το γινόμενο των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι άρτιος, ο Μηνάς παίρνει ένα βαθμό. Αν όμως το γινόμενο είναι περιττός, ένα βαθμό παίρνει ο Χαράλαμπος.

α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα για να βρείτε όλα τα πιθανά γινόμενα από τη ρίψη των δύο ζαριών.

·	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

β) Να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο Μηνάς το παιχνίδι.

7. Ο Ανδρέας και ο Αλέξης κρατούν από ένα ζάρι και το ρίχνουν διαδοχικά από μία φορά. Κάθε φορά προσπαθούν να προβλέψουν το άθροισμα των δύο ζαριών. Αυτός που θα προβλέψει σωστά κερδίζει. Ο Ανδρέας προβλέπει άθροισμα 5, ο Αλέξης 7 και ακολούθως ρίχνουν τα ζάρια. Αφού καταγράψετε το δειγματικό χώρο, να εξετάσετε ποιός έκανε την καλύτερη πρόβλεψη. Ποια είναι η πιθανότητα να μην κερδίσει κανένας από τους δύο;

Δραστηριότητες ενότητας

1. Στον πιο κάτω πίνακα καταγράφονται οι θερμοκρασίες σε συγκεκριμένες ώρες τεσσάρων ημερών.

ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ (σε °C)					
	6 π.μ.	**9 π.μ.**	**μεσημέρι**	**3 μ.μ.**	**8 μ.μ.**
Δευτέρα	15°	17°	20°	21°	19°
Τρίτη	15°	15°	15°	10°	9°
Τετάρτη	8°	10°	14°	13°	15°
Πέμπτη	8°	11°	14°	17°	20°

α) Ποια στιγμή σημειώθηκε η χαμηλότερη και ποια στιγμή η ψηλότερη θερμοκρασία;

β) Να υπολογίσετε τη Μέση Θερμοκρασία κάθε μέρας.

γ) Ποια μέρα είχαμε τη ψηλότερη και ποια τη χαμηλότερη Μέση Θερμοκρασία;

2. Ο ακόλουθος πίνακας περιλαμβάνει την ποσότητα χαρτιού που ανακυκλώθηκε στην Κύπρο από το 2000 μέχρι το 2007.

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Χαρτί (σε τόνους)	6,45	6,60	6,85	6,99	7,97	8,77	9,82	10,21

α) Ποιο έτος παρουσιάζεται η μεγαλύτερη και ποιο έτος η μικρότερη ποσότητα ανακύκλωσης χαρτιού;

β) Ποιο έτος σημειώθηκε η μεγαλύτερη αύξηση σε σχέση με το προηγούμενο έτος; Πόσους τόνους αυξήθηκε;

γ) Πόση ήταν η μέση ποσότητα ανακύκλωσης χαρτιού για τα πιο πάνω έτη;

δ) Ποια έτη ανακυκλώθηκε μεγαλύτερη ποσότητα χαρτιού από τη μέση ποσότητα της περιόδου 2000-2007;

3. Σε ένα Λύκειο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 10 μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών στο τέλος του β΄ τετραμήνου. Πήραμε τις ακόλουθες βαθμολογίες:

$$15\,,11\,,10\,,10\,,14\,,16\,,19\,,18\,,13\,,17$$

Να βρείτε:

α) Ποια είναι η μέση τιμή της βαθμολογίας των 10 μαθητών ;

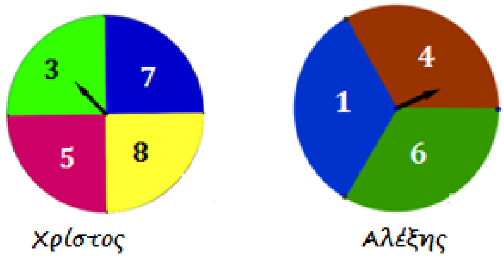
β) Τι ποσοστό των μαθητών έχουν βαθμό μικρότερο από τη μέση τιμή της βαθμολογίας;

γ) Να υπολογίσετε μια βαθμολογία (από τις πιο πάνω ή άλλη μη ακέραια) η οποία να είναι μεγαλύτερη ή ίση με το 50 % των βαθμολογιών και μικρότερη ή ίση με το 50 % των βαθμολογιών.

δ) Ποια είναι η διαφορά της μεγαλύτερης από τη μικρότερη βαθμολογία;

4. Σε ένα παιχνίδι η Ελευθερία και ο Μιχάλης ρίχνουν δύο ζάρια. Αν το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι πρώτος αριθμός, κερδίζει η Ελευθερία. Αν όμως το άθροισμα των ενδείξεων είναι σύνθετος αριθμός, κερδίζει ο Μιχάλης. Αφού καταγράψετε το δειγματικό χώρο, να εξετάσετε ποιος είναι πιο πιθανόν να κερδίσει.

5. Ο Χρίστος και ο Αλέξης γυρίζουν τους πιο κάτω τροχούς της τύχης από μία φορά. Κερδίζει όποιος πετύχει μεγαλύτερο αριθμό από τον άλλο. Αφού καταγράψετε το δειγματικό χώρο, να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει ο Αλέξης;



6. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αφού καταγράψετε το δειγματικό χώρο, να βρείτε την πιθανότητα:

   α) A: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι μικρότερο του 6.

   β) B: η ένδειξη και στα δύο ζάρια να είναι 5.

   γ) Γ: το γινόμενο των δύο ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός.

   δ) Δ: η μια τουλάχιστον ένδειξη να είναι 4.

   ε) E: τα ζάρια να μην έχουν την ίδια ένδειξη.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να μελετήσετε τον πίνακα που παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μιας τάξης στο διαγώνισμα των μαθηματικών και της Φυσικής. Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα αυτά στους συμμαθητές σας, χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους.
Να συγκρίνετε και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα στα δύο μαθήματα.

Μάθημα	Βαθμοί
Μαθηματικά	$17, 18, 18, 16, 1, 15, 15, 17, 18, 15, 20, 14, 17, 2, 17$
Φυσική	$17, 18, 17, 17, 15, 17, 17, 17, 20, 17, 17, 20, 17, 17, 17$

2. *ΟΜΑΔΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ (Να εργαστείτε σε ομάδες των $3-5$ ατόμων)*

Να συγκεντρώσετε δεδομένα για κάποιο θέμα που σας ενδιαφέρει. Στη συνέχεια, να οργανώσετε και να παρουσιάσετε τα δεδομένα χρησιμοποιώντας κατάλληλες στατιστικές μεθόδους. Να σχολιάσετε και να καταγράψετε διάφορα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν εύκολα με βάση τον τρόπο που οργανώσατε τα δεδομένα ή με βάση τις στατιστικές μεθόδους που χρησιμοποιήσατε.

3. Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα άσπρο και ένα μαύρο, με τη σειρά που αναφέρονται.

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: «η ένδειξη του άσπρου ζαριού είναι μικρότερη από την ένδειξη του πράσινου»

Β: «το άθροισμα των ενδείξεων είναι 8»

Γ: «το γινόμενο των ενδείξεων είναι περιττός αριθμός».

4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα διαδοχικά μέχρι να φέρουμε μία φορά γράμμα $(Γ)$ ή τρεις συνεχόμενες φορές κορώνα (K). Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.