ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ Γυμνασίου

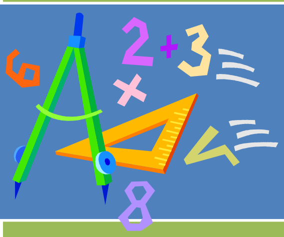
Α΄ Τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Α΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Α΄ τεύχος

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Μαθηματικά
Α΄ Γυμνασίου, Τεύχος Α΄

Συγγραφή: Αθανασίου Ανδρέας
Αντωνιάδης Μάριος
Γιασουμής Νικόλας
Ιωάννου Ιωάννης
Ματθαίου Κυριάκος
Μουσουλίδου Μαριλένα
Παπαγιάννης Κωνσταντίνος
Φιλίππου Ανδρέας

Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, *Καθηγητής Πανεπιστήμιο Κύπρου*

Εποπτεία: Θεοφίλου Στέλιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Κωστή Αντώνιος, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παντελή Παντελής, *Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης*
Παπαγιάννη Όλγα, *Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης*

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Σιαμμάς Χρύσης, *Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Συντονισμός έκδοσης: Παρπούνας Χρίστος, *Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων*

Έκδοση 2012

Εκτύπωση: Cassoulides Masterprinters Ltd

ISBN: 978-9963-0-4611-9

Στο εξώφυλλο χρησιμοποιήθηκε ανακυκλωμένο χαρτί σε ποσοστό τουλάχιστον 50%, προερχόμενο από διαχείριση απορριμμάτων χαρτιού. Το υπόλοιπο ποσοστό προέρχεται από υπεύθυνη διαχείριση δασών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο

Α΄ Γυμνασίου

ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΜΑΘΑΜΕ …

Αξία θέσης ψηφίου – Στρογγυλοποίηση

Παραδείγματα

1. Το βιβλίο *Guinness World Records του 2009* έκανε πωλήσεις 747 705 αντίτυπα.
   (α) Τι δηλώνει το ψηφίο 7 στις διαφορετικές θέσεις που βρίσκεται στον αριθμό;
   (β) Να γράψετε τον πιο πάνω αριθμό στην ανηγμένη του μορφή.

Λύση:

(α) *Η αξία κάθε ψηφίου καθορίζεται από τη θέση στην οποία βρίσκεται. Άρα:*

Δισεκατομμύρια			Χιλιάδες Εκατομμύρια			Εκατομμύρια			Χιλιάδες			Μονάδες					
Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Δέκατα	Εκατοστά	Χιλιοστά
									7	4	7	7	0	5			

(β) *Ο αριθμός* 745 705 *γράφεται στην ανηγμένη μορφή ως εξής:*

$$(7 \cdot 100\,000) + (4 \cdot 10\,000) + (7 \cdot 1000) + (7 \cdot 100) + (5 \cdot 1)$$

2. Δίνεται ο αριθμός 5746,25.
   (α) Να γράψετε τον αριθμό στην ανηγμένη του μορφή.
   (β) Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό:
      i. στο πλησιέστερο δέκατο
      ii. στην πλησιέστερη δεκάδα
      iii. στην πλησιέστερη χιλιάδα

> Το σύμβολο ≅ συμβολίζει ισότητα κατά προσέγγιση.

Λύση:

(α) *Ο αριθμός* 5746,25 γράφεται στην ανηγμένη του μορφή ως εξής:

$$(5 \cdot 1000) + (7 \cdot 100) + (4 \cdot 10) + (6 \cdot 1) + (2 \cdot 0{,}1) + (5 \cdot 0{,}01)$$

(β)

i. *Αφού το ψηφίο των εκατοστών είναι* 5 *και* $5 \geq 5$ *τότε:* $5746{,}2\mathbf{5} \cong 5746{,}3$

Στρογγυλοποιημένος στο πλησιέστερο δέκατο.

ii. *Αφού το ψηφίο των μονάδων είναι* 6 *και* $6 > 5$ *τότε:* $574\mathbf{6}, 25 \cong 5750$

Στρογγυλοποιημένος στην πλησιέστερη δεκάδα.

iii. *Αφού το ψηφίο των εκατοντάδων είναι* 7 *και* $7 > 5$ *τότε:* $5\mathbf{7}46{,}25 \cong 6000$

Στρογγυλοποιημένος στην πλησιέστερη χιλιάδα.

3. Σχηματίζουμε με τα ψηφία $1{,}6{,}7{,}8$ (μόνο μια φορά το καθένα) έναν αριθμό.
   (α) Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος τριψήφιος, που μπορεί να σχηματιστεί;
   (β) Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος περιττός τριψήφιος, που μπορεί να σχηματιστεί;
   (γ) Ποιος αριθμός είναι ο μεγαλύτερος άρτιος τετραψήφιος, που μπορεί να σχηματιστεί;

Λύση:

(α) *Ο μεγαλύτερος τριψήφιος που μπορεί να σχηματιστεί είναι ο αριθμός* 876.

(β) *Ο μεγαλύτερος περιττός τριψήφιος που μπορεί να σχηματιστεί είναι ο αριθμός* 871.

(γ) *Ο μεγαλύτερος άρτιος τετραψήφιος αριθμός που μπορεί να σχηματιστεί είναι το* 8716.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ο τριψήφιος αριθμός 671.
   (α) Να βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξετε τα ψηφία του.
   (β) Να γράψετε όλους τους αριθμούς με αύξουσα σειρά.
   (γ) Ποιος είναι ο μικρότερος περιττός αριθμός και ποιος ο μεγαλύτερος άρτιος αριθμός;

2. Να γράψετε σε κανονική μορφή τους πιο κάτω αριθμούς και να τους κατατάξετε σε φθίνουσα σειρά:
   (α) *εκατόν δυο*
   (β) *είκοσι τρία και επτά δέκατα*
   (γ) *δύο και τριάντα οκτώ εκατοστά*
   (δ) *τρία εκατομμύρια, τετρακόσιες χιλιάδες και ενενήντα επτά εκατοστά*
   (ε) *πέντε δισεκατομμύρια, εκατόν δύο χιλιάδες εκατομμύρια, δεκαεπτά εκατομμύρια, οκτακόσιες τρεις χιλιάδες, πεντακόσια ένα*

3. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία $0, 2, 3, 8, 9$ (μια μόνο φορά το καθένα), να βρείτε το μεγαλύτερο άρτιο αριθμό και το μικρότερο περιττό αριθμό που μπορεί να σχηματιστεί, όταν χρησιμοποιήσετε:
   (α) τρία από τα ψηφία
   (β) τέσσερα από τα ψηφία
   (γ) όλα τα ψηφία

4. Να βρείτε την αξία θέσης του ψηφίου 5 στους επόμενους αριθμούς:

   (α) 570 (β) 193,5 (γ) 4001,625 (δ) 50 200 300 200

5. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 7395,347
   (α) στο πλησιέστερο εκατοστό
   (β) στο πλησιέστερο δέκατα
   (γ) στην πλησιέστερη εκατοντάδα
   (δ) στην πλησιέστερη χιλιάδα

6. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) *Ο προηγούμενος φυσικός αριθμός ενός περιττού αριθμού είναι περιττός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β) *Ο επόμενος φυσικός αριθμός ενός άρτιου αριθμού είναι περιττός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ) *Μεταξύ δύο διαδοχικών άρτιων φυσικών αριθμών υπάρχει πάντα ένας άρτιος.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

7. Το παγκόσμιο ρεκόρ στο τριπλούν καταγράφεται από τους κριτές, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Ο αθλητικογράφος, στρογγυλοποίησε την τιμή του ρεκόρ και το κατάγραψε στο άρθρο τους ως εξής. Να εξετάσετε ποια θα μπορούσε να ήταν η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη τιμή του μήκους που καταγράφηκε από τους κριτές.

   Το παγκόσμιο ρεκόρ στο άλμα τριπλούν είναι 18,26 m. Σημειώθηκε από τον Τζόναθαν Έντουαρντς στις 07.08.1995 στο ...

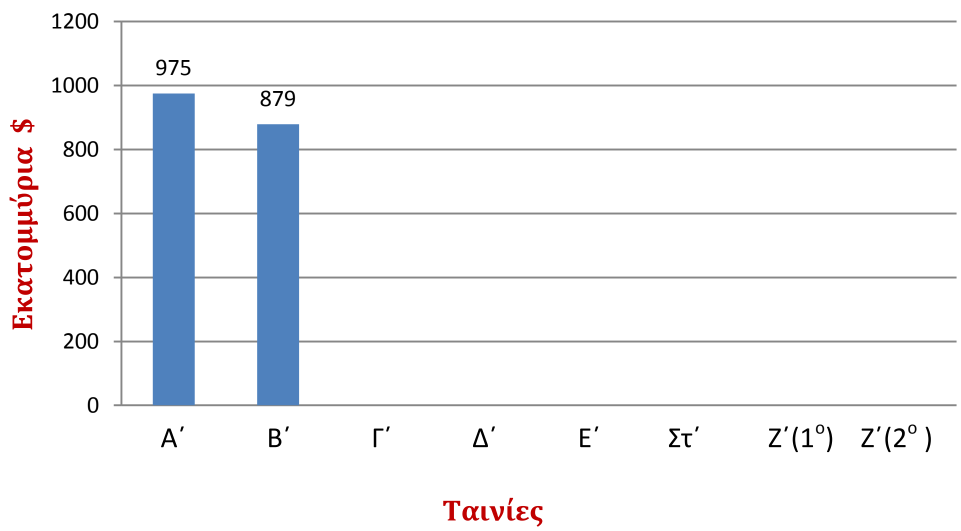
8. Ο Νικόλας έγραψε ένα διψήφιο αριθμό. Στη συνέχεια, αντέστρεψε τα ψηφία του αριθμού και πρόσθεσε το νέο διψήφιο που προέκυψε με τον αρχικό αριθμό. Αν το άθροισμα είναι 132, να βρείτε όλους τους πιθανούς αριθμούς που μπορεί να έγραψε.

9. Να βρείτε το φυσικό αριθμό ο οποίος έχει ψηφίο μονάδων το 9 και ο οποίος όταν στρογγυλοποιείται στη δεκάδα, ή στην εκατοντάδα ή στη χιλιάδα δίνει πάντα αποτέλεσμα 2000.

10. Μια από τις πιο δημοφιλείς σειρές μυθιστορημάτων φαντασίας όλων των εποχών, είναι ο Χ. Π.. Τα βιβλία μεταφέρθηκαν στον κινηματογράφο σημειώνοντας μεγάλη επιτυχία, με συνολικές εισπράξεις \$ 7707.147.978. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται οι εισπράξεις καθεμιάς από τις 8 ταινίες της σειράς:

ΤΑΙΝΙΑ	ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ	ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ *Στρογγυλοποιήμενες στις εκατοντάδες εκατομμύρια \$*	ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ *Στρογγυλοποιήμενες στα εκατομμύρια \$*
Α΄	\$974.755.371		
Β΄	\$878.979.634		
Γ΄	\$796.688.549		
Δ΄	\$896.911.078		
Ε΄	\$939.885.929		
Στ΄	\$935.416.487		
Ζ΄ (1ο Μέρος)	\$956.399.711		
Ζ΄ (2ο Μέρος)	\$1328.111.219		

(α) Να κατατάξετε τις ταινίες κατά αύξουσα σειρά σε βάση τις εισπράξεις τους.
(β) Να στρογγυλοποιήσετε τις εισπράξεις στις εκατοντάδες εκατομμύρια δολάρια.
(γ) Να εξετάσετε αν διαφοροποιείται η κατάταξη των ταινιών μετά την στρογγυλοποίηση που έχετε κάνει.
(δ) Ο Ανδρέας έχει στρογγυλοποιήσει τις εισπράξεις στα εκατομμύρια δολάρια και έχει κάνει το ακόλουθο διάγραμμα για να παρουσιάσει τις εισπράξεις. Να παρουσιάσετε τις εισπράξεις των υπόλοιπων ταινιών με παρόμοιο τρόπο.



Πράξεις αριθμών

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
   (α) $4 \cdot 11 \cdot 25$
   (β) $85 \cdot 98$

   Λύση:

   (α) $4 \cdot 11 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 11 = 100 \cdot 11 = 1100$

   Εφαρμόζουμε την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα, για να είναι πιο εύκολες οι πράξεις.

   (β) $85 \cdot 99 = 85 \cdot (100 - 1) = 85 \cdot 100 - 85 \cdot 1 = 8500 - 85 = 8415$

   Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στη διαφορά, για να είναι πιο εύκολες οι πράξεις.

2. Η τιμή ενός μηνιαίου περιοδικού είναι €2,45, ενώ η αγορά του με ετήσια συνδρομή κοστίζει €21. Να υπολογίσετε πόσο φθηνότερο είναι ένα τεύχος του περιοδικού, όταν αγοράζεται με ετήσια συνδρομή.

   Λύση:

   Η ετήσια συνδρομή είναι για 12 τεύχη. Άρα για να υπολογίσουμε την τιμή του ενός τεύχους, πρέπει να διαιρέσουμε την ετήσια συνδρομή με τον αριθμό των τευχών $21 : 12$.

   $$\begin{array}{r|l} 21{,}00 & 12 \\ \cline{2-2} -12 & 1{,}75 \\ \hline 90 & \\ -84 & \\ \hline 60 & \\ -60 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

   Άρα το κάθε τεύχος στοιχίζει €1,75.

   $$\begin{array}{r} 2{,}45 \\ -1{,}75 \\ \hline 0{,}70 \end{array}$$

   Αφαιρούμε τις δύο τιμές για να βρούμε τη διαφορά.

   Άρα το κάθε τεύχος στοιχίζει 70 σεντ λιγότερα.

Δραστηριότητες

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $A, B, Γ, Δ$ και E και να τις κατατάξετε κατά αύξουσα σειρά:

   $A = 2 + 0 + 0 + 8$ $\qquad B = \frac{200}{8}$

   $Γ = 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 8$ $\qquad Δ = 200 - 8$

   $E = (2 - 0) \cdot (0 + 8)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$125 + 15$	(β)	$32{,}3 + 2{,}98$	(γ)	$1234 - 456$
(δ)	$23 \cdot 8$	(ε)	$12 \cdot 429$	(στ)	$6{,}2 \cdot 3$
(ζ)	$2{,}25 \cdot 3{,}5$	(η)	$36 : 2$	(θ)	$56 : 0{,}4$

3. Ο Χριστόφορος παρατήρησε ότι η υπολογιστική του δεν εμφανίζει το ψηφίο της υποδιαστολής. Ο Χριστόφορος πληκτρολόγησε τις ακόλουθες παραστάσεις. Να σημειώσετε στην κατάλληλη θέση το ψηφίο της υποδιαστολής στις απαντήσεις που εμφανίστηκαν στην οθόνη.

(α) $5{,}33 \cdot 5 = 2665$
(β) $4 \cdot 2{,}5 = 10$
(γ) $2{,}3 \cdot 3{,}4 = 782$
(δ) $3{,}14 \cdot 5{,}2 = 16328$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής αριθμομηχανής:

(α)	$57 \cdot 100$	(β)	$8{,}2 \cdot 1000$	(γ)	$230 \cdot 200$
(δ)	$0{,}3 \cdot 0{,}3$	(ε)	$2200 : 20$	(στ)	$400 : 0{,}2$

5. Να περιγράψετε τι θα συμβεί:

(α) Στη διαφορά δύο αριθμών αν:
   i. *Αυξήσουμε το μειωτέο κατά* 8.
   ii. *Αυξήσουμε τον αφαιρετέο κατά* 8.
   iii. *Αυξήσουμε το μειωτέο κατά* 8 *και τον αφαιρετέο κατά* 5.

(β) Στο πηλίκο δύο αριθμών αν:
   i. *Διπλασιάσουμε το διαιρέτη.*
   ii. *Διπλασιάσουμε το διαιρετέο.*
   iii. *Τετραπλασιάσουμε το διαιρετέο και διπλασιάσουμε το διαιρέτη.*

6. Να περιγράψετε τα μοτίβα και να βρείτε τους τρείς επόμενους όρους:

(α) $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{9}$, $\boxed{27}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$

(β) $\boxed{155}$, $\boxed{137}$, $\boxed{119}$, $\boxed{101}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$

(γ) $\boxed{4{,}1}$, $\boxed{4{,}7}$, $\boxed{5{,}3}$, $\boxed{5{,}9}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$

(δ) $\boxed{12800}$, $\boxed{6400}$, $\boxed{3200}$, $\boxed{1600}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$

7. Να συμπληρώσετε με τον κατάλληλο αριθμό τα κουτάκια, ώστε να προκύπτουν αληθείς ισότητες:

(α) $123 : \square = 1{,}23$ (β) $\square \cdot 1000 = 57{,}4$

(γ) $7{,}5 \cdot \square = 0{,}075$ (δ) $2{,}32 : \square = 232\,000$

(ε) $\square : 1000 = 57{,}4$ (στ) $\square : 0{,}1 = 5{,}3$

8. Να εξετάσετε αν ισχύουν τις πιο κάτω ισότητες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)

i. $323 + 0 = 323$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ii. $323 - 0 = 0$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iii. $323 \cdot 0 = 323$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iv. $0 : 323 = 0$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(β)

i. $12 + 4 = 4 + 12$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ii. $12 - 4 = 4 - 12$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iii. $12 \cdot 4 = 4 \cdot 12$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iv. $12 : 4 = 4 : 12$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(γ)

i. $24 + (4 + 2) = (24 + 4) + 2 = (24 + 2) + 4$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ii. $24 \cdot (4 \cdot 2) = (24 \cdot 4) \cdot 2 = (24 \cdot 2) \cdot 4$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iii. $(4 + 2) \cdot 24 = 4 \cdot 24 + 2 \cdot 24$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iv. $24 : (4 + 2) = 24 : 4 + 24 : 2$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

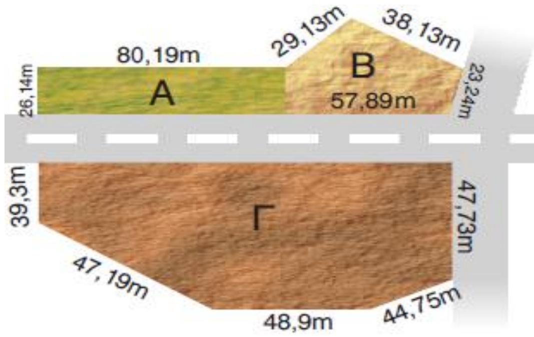
9. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα, γνωρίζοντας ότι $218 \cdot 37 = 8066$

$A = 2180 \cdot 370$ $B = 2{,}18 \cdot 37$

$\Gamma = 21800 \cdot 0{,}37$ $\Delta = 2180 \cdot 3{,}7$

10. Ο Αλέξανδρος και η Κατερίνα είχαν να διαιρέσουν έναν αριθμό με το 100. Η Κατερίνα, κατά λάθος τον πολλαπλασίασε με 100 και βρήκε αποτέλεσμα 450. Ποιόν αριθμό βρήκε ο Αλέξανδρος που έκανε σωστά την πράξη;

11. Ο κύριος Γιάννης είναι ιδιοκτήτης του οικοπέδου Β. Θέλει να περιφράξει το οικόπεδο του με συρματόπλεγμα, το οποίο στοιχίζει €1,20 το τρέχον μέτρο. Ένας εργάτης χρεώνει για την τοποθέτηση €2,50 το τρέχον μέτρο. Πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστεί και πόσο θα κοστίσει η περίφραξη;



12. Δίπλα παρουσιάζεται ο τρόπος που ακολούθησε ο Αλέξης για να υπολογίσει με γρήγορο τρόπο το γινόμενο $2012 \cdot 99$. Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργάστηκε και ύστερα να υπολογίσετε τα πιο κάτω γινόμενα, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία:

$$\begin{aligned} 2012 \cdot 99 &= 2012 \cdot (100-1) \\ &= 2012 \cdot 100 - 2012 \cdot 1 \\ &= 201\,200 - 2012 \\ &= 199\,188 \end{aligned}$$

(α) $514 \cdot 11$ (β) $68 \cdot 90$ (γ) $38 \cdot 999$

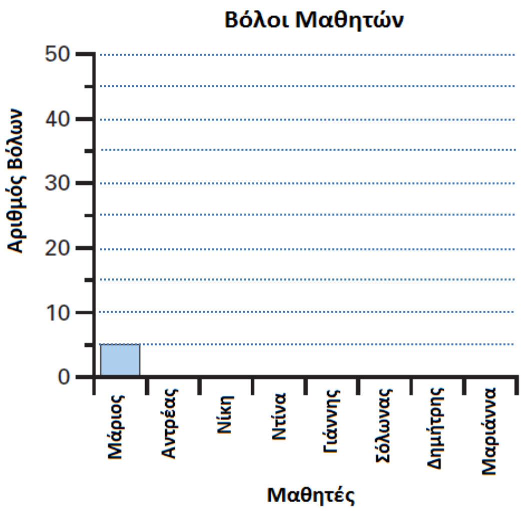
13. Γνωρίζοντας ότι $A = 23 \cdot 45 = 1035$, να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις είναι ίσες με την A, χωρίς να κάνετε τις πράξεις:

(α) $B = (20 + 3) \cdot 45$ (β) $\Gamma = 40 \cdot 23 + 5 \cdot 23$

(γ) $\Delta = 23 \cdot (58 - 13)$ (δ) $E = 23 \cdot 100 - 23 \cdot 60$

14. Τρία αδέλφια θα πρέπει να μοιραστούν εξίσου μια κληρονομιά η οποία είναι ένα χωράφι και ένα διαμέρισμα. Ο πρώτος πήρε το χωράφι, ο δεύτερος πήρε το διαμέρισμα, αλλά έδωσε στο πρώτο €600 και στον τρίτο €15.000. Να βρείτε ποια ήταν η αξία του χωραφιού και ποια του διαμερίσματος.

15. Τα απογεύματα τα παιδιά της γειτονιάς μαζεύονται για να παίξουν το αγαπημένο τους παιχνίδι με τους βόλους.
   (α) Να συμπληρώσετε το πιο κάτω ραβδόγραμμα που παριστάνει τον αριθμό των βόλων του κάθε παιδιού, σύμφωνα με τις πιο κάτω πληροφορίες:



- *Ο Ανδρέας έχει διπλάσιους βόλους από το Μάριο.*
- *Η Νίκη έχει τετραπλάσιους από τον Ανδρέα.*
- *Η Ντίνα έχει τέσσερεις περισσότερους από το Μάριο.*
- *Ο Γιάννης έχει τόσους βόλους όσους ο Μάριος.*
- *Ο Σόλωνας έχει πέντε λιγότερους από τον Ανδρέα.*
- *Ο Δημήτρης δεν έχει βόλους.*
- *Η Μαριάννα έχει δύο περισσότερους από τους διπλάσιους βόλους του Σόλωνα.*

   (β) Ποιο παιδί έχει τους περισσότερους βόλους;
   (γ) Να κάνετε μία ερώτηση που να μπορεί να απαντηθεί από το πιο πάνω ραβδόγραμμα.

Κλασματικοί αριθμοί

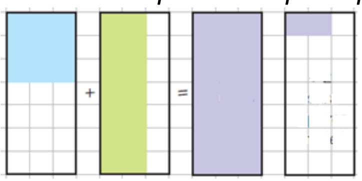
Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}$
   (β) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}$
   (γ) $4\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$

Λύση:

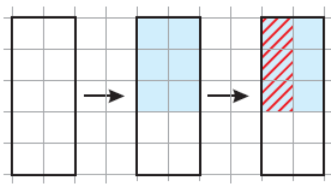
(α) $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\overset{3)}{\frac{3}{7}}+\overset{7)}{\frac{2}{3}}$
$=\frac{9}{21}+\frac{14}{21}$
$=\frac{23}{21}$
$=1\frac{2}{21}$

Μετατρέπω τα κλάσματα σε ομώνυμα.



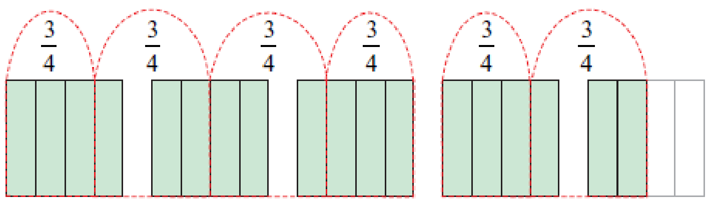
$\frac{9}{21} + \frac{14}{21} = 1\frac{2}{21}$

(β) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}$
$=\frac{3}{10}$



$1 \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \frac{1}{2}$ του $\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

(γ) $4\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{9}{2}:\frac{3}{4}$
$=\frac{18}{4}:\frac{3}{4}$
$=6$



ή

ή

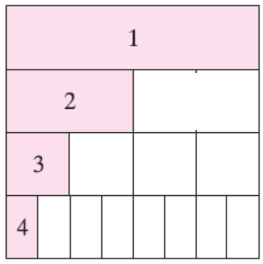
$4\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=\frac{9}{2}:\frac{3}{4}$
$=\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}$
$=\frac{36}{6}$
$=6$

Μετατρέπω το μικτό κλασματικό αριθμό σε καταχρηστικό κλάσμα. Αντιστρέφω τον διαιρέτη και κάνω πολλαπλασιασμό.

2. Σε μια τάξη με 24 μαθητές απουσιάζουν σήμερα 6. Να βρείτε τι μέρος των μαθητών της τάξης απουσιάζει.

Λύση:
Απουσιάζουν 6 από τους 24 μαθητές. Άρα $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ *των μαθητών απουσιάζουν.*

3. Να παρατηρήσετε το διπλανό σχήμα και να βρείτε τι μέρος αντιπροσωπεύει το καθένα από τα αριθμημένα μέρη.



Λύση:
- *Το ορθογώνιο σχήμα με αριθμό 1 είναι το* $\frac{1}{4}$ *του αρχικού τετραγώνου.*
- *Το ορθογώνιο σχήμα με αριθμό 2 είναι το μισό του πρώτου, άρα είναι το* $\frac{1}{8}$ *του αρχικού τετραγώνου.*
- *Το τετράγωνο σχήμα με αριθμό 3 είναι το μισό του δεύτερου, άρα είναι το* $\frac{1}{16}$ *του αρχικού τετραγώνου.*
- *Το ορθογώνιο σχήμα με αριθμό 4 είναι το μισό του τρίτου, άρα είναι το* $\frac{1}{32}$ *του αρχικού τετραγώνου.*

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$, $=$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $\frac{5}{2012} \ldots \frac{5}{2013}$ (β) $\frac{1}{2} \ldots \frac{3}{5}$ (γ) $3\,\frac{1}{2} \ldots 3\frac{2}{3}$

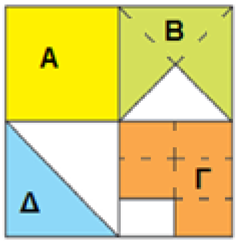
2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} + 2\frac{1}{8}$ (β) $2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}$ (γ) $2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

(δ) $3\,\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4}$ (ε) $1\frac{1}{3} \cdot 6$ (στ) $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}$

(ζ) $\frac{5}{8} : \frac{5}{2}$ (η) $\frac{1}{9} \cdot \left(2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3}\right)$ (θ) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 6\frac{1}{5}$

3. Να βρείτε τι μέρος του μεγάλου τετραγώνου είναι τα σχήματα Α, Β, Γ και Δ.



4. Η συνολική επιφάνεια της Γης είναι περίπου 513 000 000 τετραγωνικά χιλιόμετρα. Αν η θάλασσα καλύπτει περίπου τα $\frac{2}{3}$ της επιφάνειας της, να βρείτε πόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα είναι η ξηρά.

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων Α, Β, Γ και Δ:

$$\mathrm{A} = \left(12\tfrac{2}{5} + 1{,}5\right) - \left(0{,}2 + 11\tfrac{1}{2} + 1{,}3\right)$$

$$\mathrm{B} = 3 + 1\tfrac{1}{2} - (2{,}3 + \tfrac{3}{5})$$

$$\Gamma = \mathrm{A} + \mathrm{B}$$

$$\Delta = \mathrm{A} : \mathrm{B}$$

6. Ένα ενυδρείο χωράει 15 λίτρα νερό. Μία κανάτα χωράει $\frac{3}{4}$ του λίτρου. Πόσες κανάτες νερό χρειάζονται για να γεμίσει το ενυδρείο;

7. Ένα ποτήρι που χωράει $\frac{1}{3}$ του λίτρου νερό, είναι γεμάτο κατά τα $\frac{3}{4}$. Αν ο Γιάννης πιει $\frac{1}{5}$ του λίτρου νερό από το ποτήρι, πόσο νερό θα μείνει στο ποτήρι;

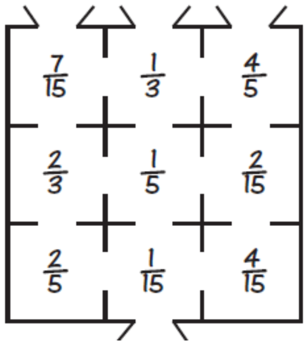
8. Τοποθετούμε τα σημεία A, B και Γ στην αριθμητική γραμμή. Να εξετάσετε, αν το σημείο B είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$.

	Σημειο Α	Σημειο Β	Σημειο Γ
(α)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
(β)	0,35	$\frac{65}{100}$	1,35
(γ)	$11\frac{1}{2}$	11,75	12

9. Να εξετάσετε αν έγινε δίκαια η μοιρασιά.

Τρεις φίλοι ανακάλυψαν σ' ένα νησί ένα μπαούλο με χρυσά νομίσματα. Επειδή ήταν αργά, αποφάσισαν να κατασκηνώσουν εκεί και να κάνουν τη μοιρασιά το πρωί.
Ένας από αυτούς, φοβούμενος ότι οι άλλοι δύο δεν θα μπορούσαν να μοιράσουν δίκαια τα νομίσματά, αφού δεν ήξεραν μαθηματικά, μέτρησε και πήρε το $\frac{1}{3}$ ***των νομισμάτων και έφυγε. Αργότερα εκείνο το βράδυ, ξύπνησε και ο δεύτερος φίλος μέτρησε και αυτός το*** $\frac{1}{3}$ ***των νομισμάτων που υπήρχαν στο κουτί και έφυγε κρυφά.***
Το πρωί, ο τρίτος φίλος, ανακάλυψε ότι οι άλλοι δυο σύντροφοί του έφυγαν παίρνοντας μαζί τους ένα μέρος των νομισμάτων. Σίγουρος ότι οι σύντροφοι του μοίρασαν και πήραν δίκαια το μερίδιο τους, πήρε τα χρήματα και έφυγε ευτυχισμένος.

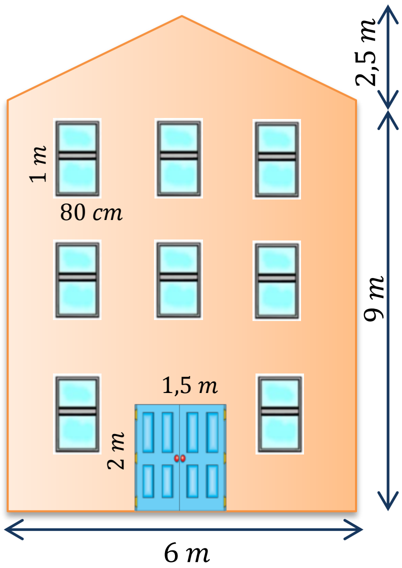
10. Να σημειώσετε τη διαδρομή με άθροισμα 1. Μπορείτε να ξεκινήσετε από οποιαδήποτε από τις τρεις εισόδους του πάνω μέρους του τετραγώνου.



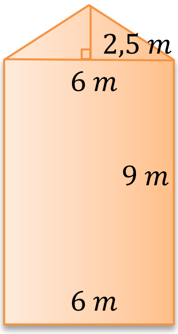
Μέτρηση Τριγώνων και Τετραπλεύρων

Παραδείγματα

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πρόσοψη μιας πολυκατοικίας. Οι ένοικοι ζήτησαν από έναν ελαιοχρωματιστή να βάψει την πρόσοψη της πολυκατοικίας. Πόσα χρήματα θα κοστίσει, αν ο ελαιοχρωματιστής πληρώνεται €12 το τετραγωνικό μέτρο.



Λύση:



Για να υπολογίσουμε το κόστος πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την επιφάνεια του κτιρίου.

Η πρόσοψη αποτελείται από:

- *ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 6 m και 9 m και*
- *ένα τρίγωνο με βάση 6 m και ύψος 2,5 m.*

$$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{ορθογωνίου}} &= \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \\ &= 6 \cdot 9 \\ &= 54\ m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{τριγώνου}} &= \frac{\text{βάση} \cdot \text{υψος}}{2} \\ &= \frac{6 \cdot 2{,}5}{2} \\ &= \frac{15}{2} \\ &= 7{,}5\ m^2 \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν των παραθύρων και το εμβαδόν της πόρτας για να τα αφαιρέσουμε:

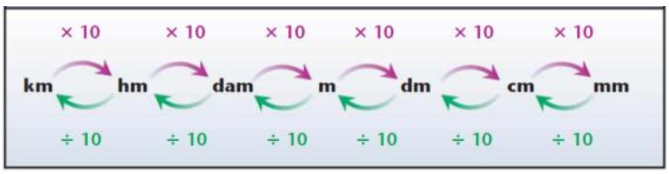
$$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{παραθύρου}} &= \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \\ &= 1 \cdot 0{,}8 \\ &= 0{,}8\ m^2 \end{aligned}$$

Αφού, υπάρχουν 8 παράθυρα τότε:

$$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{παραθύρων}} &= 8 \cdot \text{Ε}_{\text{παραθύρου}} \\ &= 8 \cdot 0{,}8 \\ &= 6{,}4\ m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{πόρτας}} &= \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \\ &= 2 \cdot 1{,}5 \\ &= 3\ m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{ολικό}} &= \text{Ε}_{\text{ορθ}} + \text{Ε}_{\text{τρι}} - (\text{Ε}_{\text{πορτ}} + \text{Ε}_{\text{παρ}}) \\ &= 54 + 7{,}5 - (3 + 6{,}4) \\ &= 54 + 7{,}5 - 9{,}4 \\ &= 61{,}5 - 9{,}4 \\ &= 52{,}1\ \ m^2 \end{aligned}$$



Το κόστος θα είναι: $\text{Κόστος} = 52{,}1 \cdot 12$
$= 625{,}2\ \textit{ευρώ}.$

2. Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι $32\ dm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

   Λύση:
   Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου, πρέπει να γνωρίζουμε την πλευρά του.

   Για να υπολογίσουμε την πλευρά του τετραγώνου:

   $$\text{Περίμετρος} = 4 \cdot \text{πλευρά}$$

   Άρα,

   $$\text{Πλευρά} = \text{Περίμετρος} : 4$$
   $$\text{Πλευρά} = 32 : 4$$
   $$\text{Πλευρά} = 8\ dm$$

   Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι:

   $$\begin{aligned} \text{Ε}_{\text{τετραγώνου}} &= \text{πλευρά} \cdot \text{πλευρά} \\ &= 8 \cdot 8 \\ &= 64\ dm^2 \end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:
   (α) Η περίμετρος ορθογωνίου με μήκος $5\ m$ και πλάτος $4\ m$ είναι:
   Α. $20\ m$ Β. $9\ m$ Γ. $18\ m$ Δ. $121\ m$

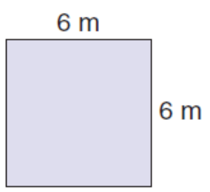
   (β) Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά $5\ cm$ είναι:
   Α. $10\ cm^2$ Β. $25\ cm^2$ Γ. $20\ cm^2$ Δ. $40\ cm^2$

   (γ) Το εμβαδόν παραλληλόγραμμου με βάση $9\ dm$ και αντίστοιχο ύψος $6\ dm$ είναι:
   Α. $30\ dm^2$ Β. $54\ dm^2$ Γ. $60\ dm^2$ Δ. $32 dm^2$

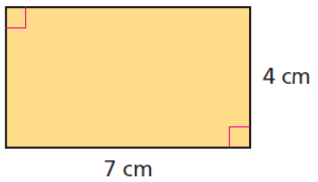
   (δ) Το εμβαδόν τριγώνου με βάση $8\ dm$ και αντίστοιχο ύψος $6\ dm$ είναι:
   Α. $12\ dm^2$ Β. $24\ dm^2$ Γ. $48\ dm^2$ Δ. $32 dm^2$

2. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων:

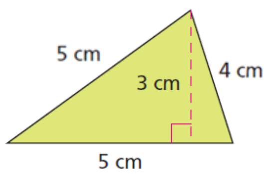
   (α)



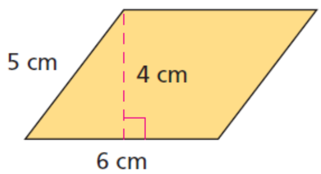
   (β)



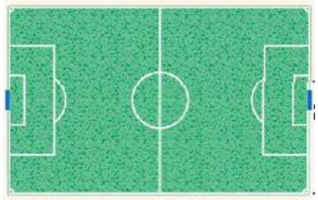
   (γ)



   (δ)

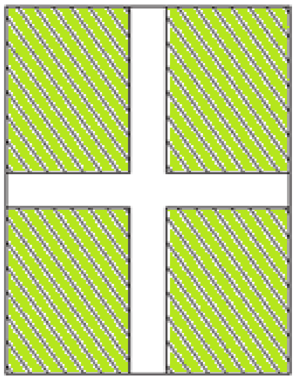


3. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου έχει μήκος $110\ m$ και πλάτος $70\ m$. Ένας ποδοσφαιριστής έτρεξε 5 φορές γύρω από το γήπεδο για προθέρμανση. Να βρείτε την συνολική απόσταση που διένυσε.



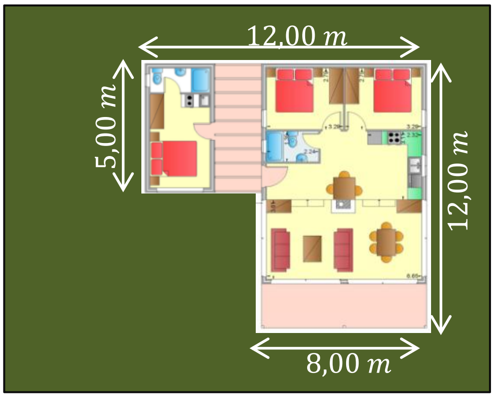
4. Από ένα σύρμα μήκους $10\ m$ κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αν το τρίγωνο έχει πλευρά $2\ m$, να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

5. Τέσσερα αδέλφια κληρονόμησαν από κοινού ένα κτήμα σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $50\ m$ και $60\ m$. Θέλουν να το χωρίσουν σε τέσσερα ίσα οικόπεδα, κατασκευάζοντας δύο δρόμους πλάτους $6\ m$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
   Αν η κατασκευή του δρόμου τους κοστίζει €100 το τετραγωνικό μέτρο, να βρείτε:
   (α) Πόσο θα κοστίσει η κατασκευή του δρόμου.
   (β) Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο του καθενός.

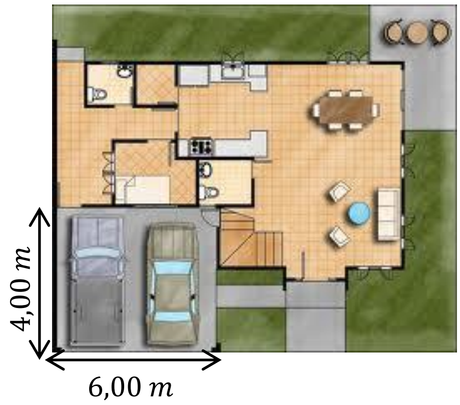


6. Παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν $120\ cm^2$ και ύψος $15\ cm$. Να υπολογίσετε τη βάση που αντιστοιχεί στο ύψος αυτό.

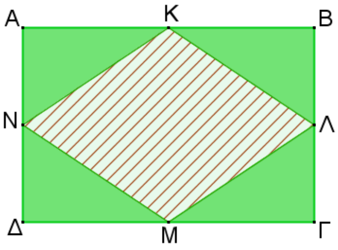
7. Το οικόπεδο στο οποίο είναι κτισμένο το διπλανό σπίτι, έχει διαστάσεις $20\ m$ και $16\ m$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της αυλής.



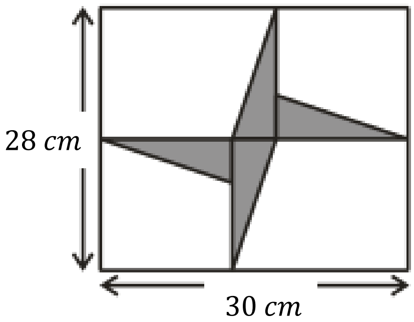
8. Ένας εργολάβος θα τοποθετήσει κεραμικό στο χώρο στάθμευσης. Να υπολογίσετε πόσα κιβώτια κεραμικό πρέπει να παραγγείλει, αν κάθε κιβώτιο περιέχει 3,50 τετραγωνικά μέτρα.



9. Τα σημεία $Κ, Λ, Μ, Ν$, είναι τα μέσα των πλευρών της ορθογώνιας πλατείας με διαστάσεις $6\,m$ και $4\,m$. Τα τέσσερα τρίγωνα στις γωνίες της πλατείας θα φυτευτούν με γρασίδι και το τετράπλευρό ΚΛΜΝ θα πλακοστρωθεί. Να υπολογίσετε:
   (α) πόση επιφάνεια θα καλυφθεί με γρασίδι,
   (β) τι μέρος της επιφάνειας της πλατείας θα πλακοστρωθεί.



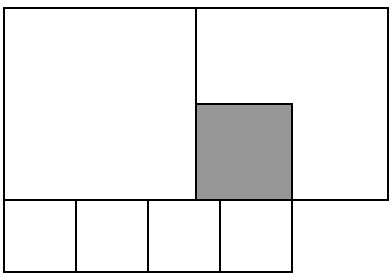
10. Στο διπλανό σχήμα, τέσσερα ίδια ορθογώνια τρίγωνα είναι τοποθετημένα μέσα στο ορθογώνιο, όπως φαίνεται στην εικόνα. Οι κάθετες πλευρές των τριγώνων είναι παράλληλες με τις πλευρές του ορθογωνίου. Να βρεθεί το συνολικό εμβαδόν των τεσσάρων τριγώνων.



11. Μια αίθουσα διδασκαλίας με σχήμα ορθογωνίου έχει διαστάσεις $5\,m$ και $7{,}6\,m$. Αν για κάθε μαθητή προβλέπεται $1{,}5\,m^2$, πόσους μαθητές το πολύ μπορεί να στεγάζει η αίθουσα;

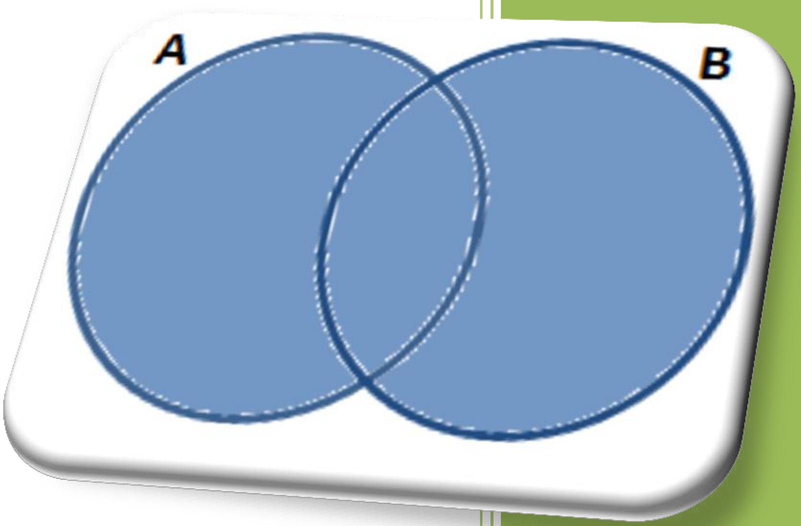
12. Το δημοτικό συμβούλιο θέλει να κατασκευάσει έναν υπαίθριο στεγασμένο χώρο, στο πάρκο της γειτονιάς.
   (α) Να υπολογίσετε την επιφάνεια του δαπέδου που θα καλύπτει το στέγαστρο.
   (β) Να υπολογίσετε πόσα τετραγωνικά μέτρα πλαστικό κεραμίδι θα χρειαστεί, για το στέγαστρο.

13. Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από 7 τετράγωνα. Αν τα μεγάλα τετράγωνα έχουν πλευρά $8\,cm$ και τα μικρά τετράγωνα $3\,cm$, να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου τετραγώνου.



ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Σύνολα



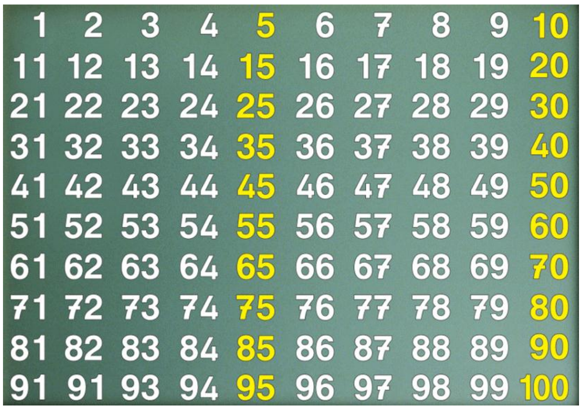
Α΄ Γυμνασίου

ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Εξερεύνηση

Να παρατηρήσετε τις πιο κάτω εικόνες και να τις περιγράψετε.



Μαθαίνω

Η έννοια του **συνόλου** στα μαθηματικά είναι πρωταρχική και από τις πιο βασικές στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.

Σύνολο είναι μια καλώς ορισμένη συλλογή διαφορετικών μεταξύ τους αντικειμένων.

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου.

- Με τη λέξη **αντικείμενα** εννοούμε, χειροπιαστά αντικείμενα αλλά και αριθμούς, γράμματα, σύμβολα, κτλ.
- Ένα σύνολο συμβολίζεται συνήθως με ένα κεφάλαιο γράμμα, π.χ. A
- Αν το στοιχείο α **ανήκει** στο σύνολο A γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$. Αν ένα στοιχείο α **δεν ανήκει** στο σύνολο Α τότε γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \notin \boldsymbol{A}$.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A, λέγεται **πληθικός αριθμός** του συνόλου και συμβολίζεται $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{A})$.

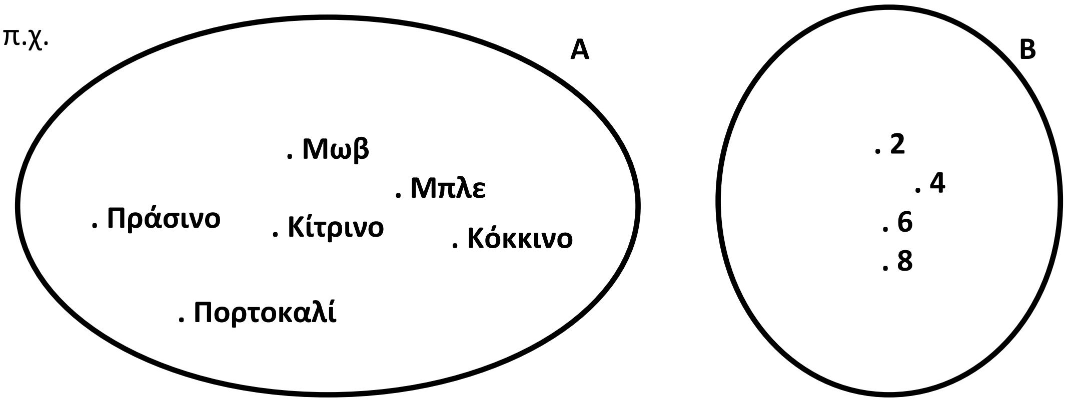
Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

- Με αναγραφή,
  Γράφουμε τα στοιχεία του ανάμεσα σε δύο **άγκιστρα** $\{\quad\}$ και τα χωρίζουμε μεταξύ τους με κόμματα.

  π.χ. $A = \{Μωβ, Μπλε, Πράσινο, Κίτρινο, Πορτοκαλί, Κόκκινο\}$,
  $B = \{2, 4, 6, 8\}$

- Με διάγραμμα Venn – Βέννειο διάγραμμα
  Σε μια οποιαδήποτε απλή κλειστή γραμμή στο εσωτερικό της οποίας σημειώνουμε με τελείες τα στοιχεία του συνόλου.

π.χ.



- Το σύνολο το οποίο δεν έχει στοιχεία, δηλαδή ο πληθικός αριθμός του είναι μηδέν, λέγεται **κενό σύνολο**. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\{\ \}$ ή $\emptyset$.

Σημείωση:

Με το $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών. Δηλαδή $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Με το $\mathbb{N}_0$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός. Δηλαδή $\mathbb{N}_0 = \{0,1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Παράδειγμα

Να γράψετε τα στοιχεία του συνόλου A: Οι περιττοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 12. Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου A;

Λύση:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9,11\}$

$\nu(A) = 6$

Σημείωση: Οι περιττοί αριθμοί, όπως και οι άρτιοι είναι μέρος του συνόλου $\mathbb{N}$.

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τα στοιχεία των πιο κάτω συνόλων με αναγραφή:
   A: τα πέντε πρώτα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου
   B: οι ημέρες της εβδομάδας που αρχίζουν από Θ
   Γ: οι μήνες του έτους που αρχίζουν από I.
2. Να βρείτε τον πληθικό αριθμό του συνόλου B: οι μήνες του έτους που έχουν 32 ημέρες.
3. Να περιγράψετε τα πιο κάτω σύνολα:
   $A = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$
   $B = \{τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο\}$
   $\Gamma = \{Μάρτιος, Απρίλιος, Μάιος\}$
4. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.
   i. Αν το σύνολο A είναι το σύνολο των άρτιων αριθμών τότε: $18 \in A$ — **ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
   ii. Αν το σύνολο E είναι το σύνολο των χωρών μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, τότε: $Σλοβενία \notin E$ — **ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
   iii. Αν $B = \{15, 25, 35, 45\}$, τότε: $55 \in B$. — **ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

Πράξεις με σύνολα

Διερεύνηση

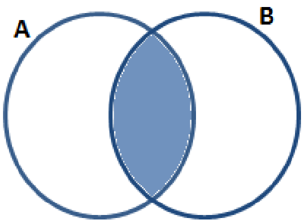
Στη συμβολή των οδών Ανθέων και Αμμοχώστου, σε γωνιακό οικόπεδο, έχει ανεγερθεί μια καινούρια τριώροφη πολυκατοικία. Κάθε όροφος έχει τρία διαμερίσματα. Τα διαμερίσματα $101, 201$ και 301 έχουν μπαλκόνι που βλέπει στην οδό Ανθέων, τα διαμερίσματα $102, 202$ και 302 είναι γωνιακά και το μπαλκόνι τους βλέπει και στους δύο δρόμους, ενώ τα διαμερίσματα $103, 203$ και 303 έχουν μπαλκόνι στην οδό Αμμοχώστου.

Να κατασκευάσετε ένα βέννειο διάγραμμα το οποίο να απεικονίζει τη θέση των διαμερισμάτων της πολυκατοικίας ως προς τους δυο δρόμους.

Μαθαίνω

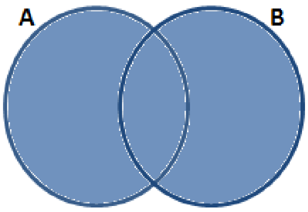
Τομή δύο συνόλων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ λέγεται το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο αυτών συνόλων.

- Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$.



Ένωση δύο συνόλων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ λέγεται το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία τα οποία ανήκουν είτε στο σύνολο $\boldsymbol{A}$ είτε στο σύνολο $\boldsymbol{B}$.

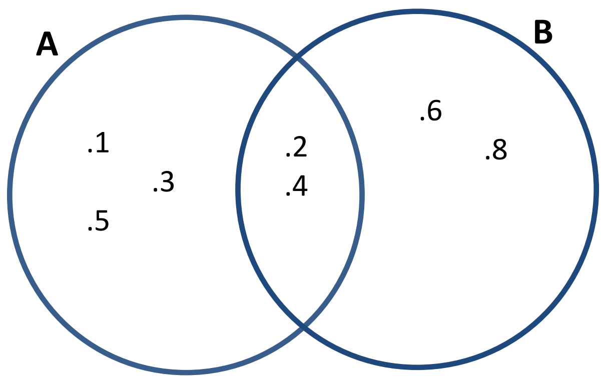
- Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.



Παράδειγμα:

Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Να παραστήσετε τα δύο σύνολα με ένα βέννειο διάγραμμα και να βρείτε την τομή και την ένωση των δύο συνόλων.

Λύση:



Τοποθετούμε τα στοιχεία που ανήκουν και στο ένα και στο άλλο σύνολο στο κοινό μέρος των δύο συνόλων και τα υπόλοιπα στο μέρος που αναλογεί στο κάθε ένα σύνολο ξεχωριστά.

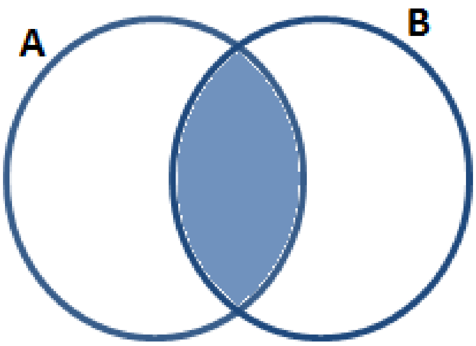
$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Δραστηριότητες

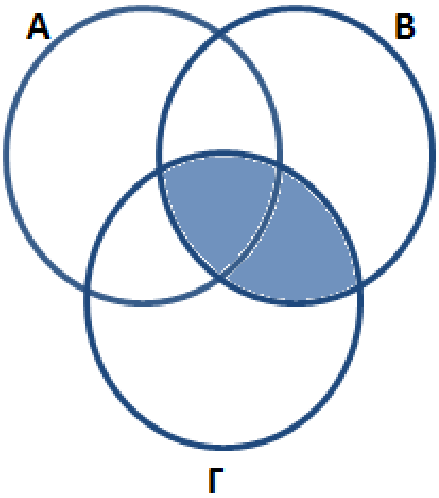
1. Να χρησιμοποιήσετε το συμβολισμό των πράξεων των συνόλων, για να περιγράψετε το σκιασμένο μέρος κάθε διαγράμματος.

i.



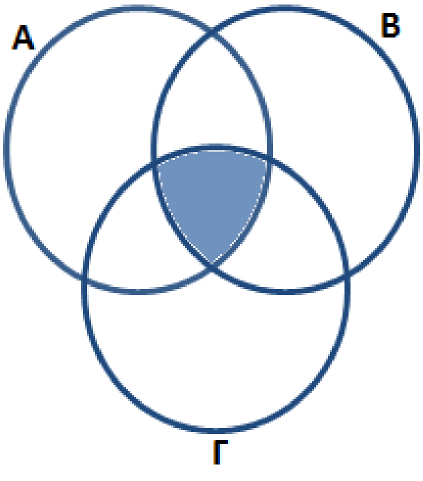
……………………..

ii.



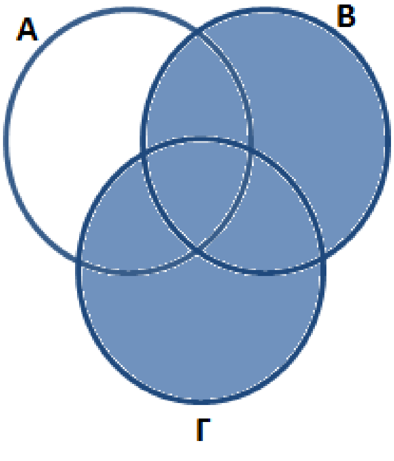
……………………

iii.



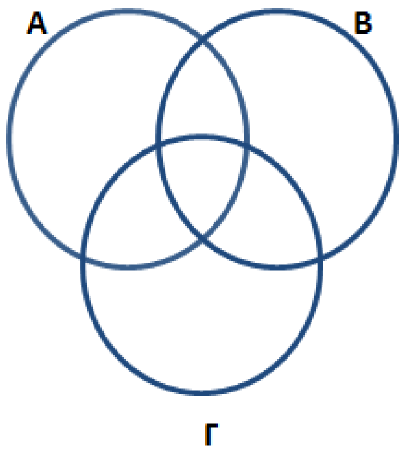
……………………..

iv.

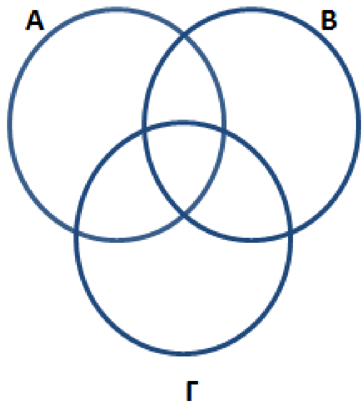


………………………

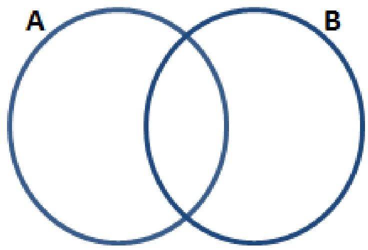
2. Να σκιάσετε το μέρος του διαγράμματος το οποίο αντιστοιχεί στις πιο κάτω σχέσεις:
   i. Τα κοινά στοιχεία των συνόλων A και Γ.



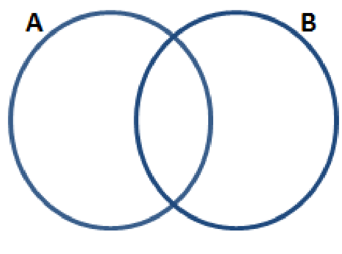
   ii. Τα στοιχεία που ανήκουν και στα τρία σύνολα.



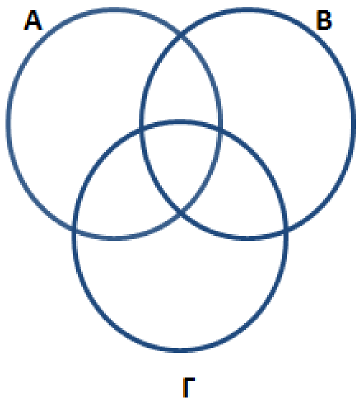
   iii. Τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο A μόνο.



   iv. Τα στοιχεία που ανήκουν και στο σύνολο A και στο σύνολο B.

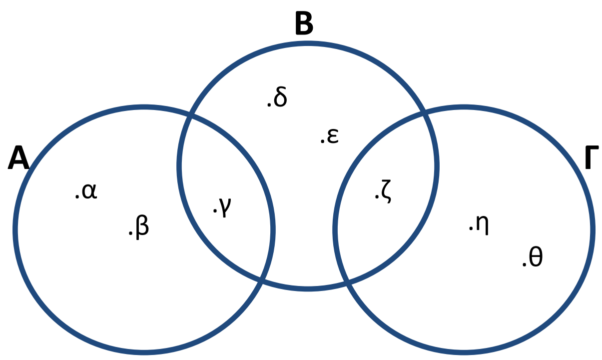


v. Τα κοινά στοιχεία των συνόλων B και Γ τα οποία δεν ανήκουν στο σύνολο A.



3. Δίνονται τα σύνολα: $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu\}$, $B = \{\varepsilon, \zeta, \eta, \iota\}$, $\Gamma = \{\varphi, \chi, \psi, \omega\}$. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:
   i. $A \cup B$
   ii. $A \cap B$
   iii. $A \cap \Gamma$
   iv. $A \cup B \cup \Gamma$
   v. $A \cap B \cap \Gamma$

4. Με βάση το διάγραμμα να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω σχέσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.



i. $A = \{\alpha, \beta\}$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ii. $A \cap \Gamma = \emptyset$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

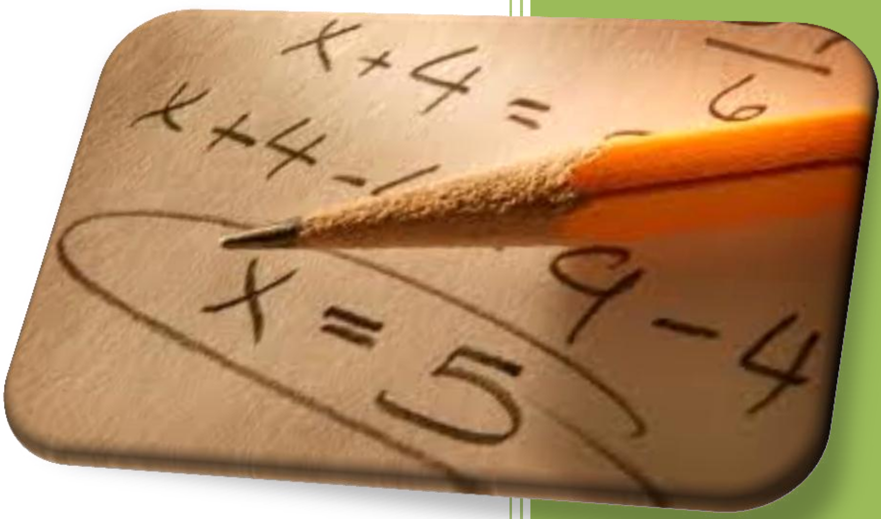
iii. $A \cap B \cap \Gamma = \{\gamma, \zeta\}$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iv. $B \cup \Gamma = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\}$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

v. $\nu(B) = 2$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Αριθμοί



Α΄ Γυμνασίου

ΙΣΟΤΗΤΑ – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΕΞΙΣΩΣΗ

Ισότητα – Ιδιότητες Ισοτήτων

Εξερεύνηση

Ένας χρυσοχόος έχει 9 νομίσματα από τα οποία ένα είναι κάλπικο, με λιγότερο βάρος από τα άλλα. Έχει στη διάθεσή του μια ζυγαριά με δύο δίσκους.

- ✓ Να περιγράψετε διαφορετικούς τρόπους που μπορεί να χρησιμοποιήσει τη ζυγαριά για να εντοπίσει το κάλπικο νόμισμα.

- ✓ Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγισμάτων που χρειάζεται να κάνει, για να είναι σίγουρος ότι θα ανακαλύψει το κάλπικο;

Διερεύνηση

Να τοποθετήσετε βαρίδια στα δύο μέλη της ζυγαριάς, ώστε κάθε φορά να ισορροπεί.

- ✓ Μπορείτε να τοποθετήσετε:
  - οποιοδήποτε αριθμό βαριδιών
  - 4 βαρίδια
  - 7 βαρίδια
  - όλα τα βαρίδια

Μαθαίνω

- Η έκφραση $A = B$ είναι μια **ισότητα**. Το A είναι μία παράσταση και ονομάζεται πρώτο μέλος της ισότητας και B μια παράσταση και ονομάζεται δεύτερο μέλος της ισότητας.

- Μια ισότητα χαρακτηρίζεται ως:
  - **ΑΛΗΘΗΣ,** αν η αξία του πρώτου μέλους είναι η ίδια με την αξία του δεύτερου μέλους.
  - **ΨΕΥΔΗΣ,** αν η αξία του πρώτου μέλους δεν είναι η ίδια με την αξία του δεύτερου μέλους.

- **Ιδιότητες Ισοτήτων:**
  - **Ανακλαστική Ιδιότητα**: Κάθε αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$**,** είναι ίσος με τον εαυτό του.
    Για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\alpha}$ ισχύει $\boldsymbol{\alpha = \alpha}$**.**

  - **Συμμετρική Ιδιότητα**: Αν ένας αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ίσος με έναν άλλο αριθμό $\boldsymbol{\beta}$, τότε και μόνο τότε ο $\boldsymbol{\beta}$ είναι ίσος με τον $\boldsymbol{\alpha}$.

    Αν $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ αριθμοί ισχύει:

    $\boldsymbol{\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \alpha}$**.**

    π.χ. $3 = 3$

    > Το σύμβολο $\Leftrightarrow$ το διαβάζουμε «**ισοδυναμεί με**» και σημαίνει ότι: Όταν είναι αληθής η πρώτη σχέση είναι αληθής και η δεύτερη και αντίστροφα, δηλαδή, όταν είναι αληθής η δεύτερη σχέση είναι αληθής και η πρώτη σχέση.

  - **Μεταβατική Ιδιότητα:** Αν ένας αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ίσος με έναν άλλο αριθμό $\boldsymbol{\beta}$ και ο $\boldsymbol{\beta}$ είναι ίσος με έναν τρίτο αριθμό $\boldsymbol{\gamma}$, τότε και ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι ίσος με τον $\boldsymbol{\gamma}$.

    Αν $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ αριθμοί ισχύει:

    $\boldsymbol{\alpha = \beta}$ και $\boldsymbol{\beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma}$**.**

    π.χ. $\alpha = 3$ και $\beta = 3 \Rightarrow \alpha = \beta$

    > Το σύμβολο $\Rightarrow$ το διαβάζουμε «**συμπεραίνουμε**» ή «**συνεπάγεται**» και σημαίνει ότι: Όταν είναι αληθής η πρώτη σχέση, τότε είναι αληθής και η δεύτερη σχέση. Το γράφουμε, για να δηλώσουμε ότι από την πρώτη σχέση προκύπτει η δεύτερη σχέση.

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει μια νέα ισότητα και αντίστροφα.
  Αν $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ αριθμοί ισχύει: $\boldsymbol{\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$

- Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει μια νέα ισότητα και αντίστροφα.
  Αν $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ αριθμοί ισχύει: $\boldsymbol{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma}$

- Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, (διάφορο του μηδενός), προκύπτει μια νέα ισότητα και αντίστροφα.

  Αν $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ αριθμοί και $\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ ισχύει: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \iff \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}$

- Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, (διάφορο του μηδενός), προκύπτει μια νέα ισότητα και αντίστροφα.

  Αν $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ αριθμοί και $\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ ισχύει: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \iff \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\gamma}$

Παραδείγματα

1. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των ισοτήτων για να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισοδυναμίες, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$:

   (α) $\alpha : 9 = \beta : 9 \quad \iff \beta = \cdots$

   (β) $25 + \alpha = 37 + \beta \quad \iff \alpha = \cdots$

   (γ) $5\alpha = 10\beta \quad \iff x = \cdots$

   Λύση:

   (α) $\alpha : 9 = \beta : 9$
   $\iff \alpha : \cancel{9} = \beta : \cancel{9}$
   $\iff \alpha = \beta$

   Διαγράφουμε και από τα δύο μέλη το διαιρέτη 9. (Ιδιότητα Διαγραφής)

   (β) $25 + \alpha = 37 + \beta$
   $\iff \cancel{25} + \alpha = \cancel{25} + 12 + \beta$
   $\iff \alpha = 12 + \beta$

   Γράφουμε το 37 ως $25 + 12$ και διαγράφουμε τον προσθετέο 25 και από τα δύο μέλη.

   (γ) $5\alpha = 10\beta$
   $\iff 5\alpha = 5 \cdot 2\beta$
   $\iff \cancel{5} \cdot \alpha = \cancel{5} \cdot 2\beta$
   $\iff \alpha = 2\beta$

   Γράφουμε το 10 ως $5 \cdot 2$ και διαγράφουμε τον παράγοντα 5 και από τα δύο μέλη.

2. Να αποδείξετε ότι ισχύει η πιο κάτω πρόταση όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$.
   Αν $\alpha + \beta + 3 = \gamma + \beta + 3$, τότε $\alpha = \gamma$.

   Λύση:

   $\alpha + \beta + \cancel{3} = \gamma + \beta + \cancel{3}$

   $\Leftrightarrow \alpha + \cancel{\beta} = \gamma + \cancel{\beta}$

   $\Leftrightarrow \alpha = \gamma$

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω ενέργειες διατηρούν μια ισότητα:

   (α) *Πολλαπλασιάζω με 2, τα δύο μέλη της ισότητας.*

   (β) *Αφαιρώ 2 από το Α΄ μέλος και προσθέτω 2 στο Β΄ μέλος της ισότητας.*

   (γ) *Αφαιρώ 1111 από το Α΄ μέλος και αφαιρώ 111 από το Β΄ μέλος.*

   (δ) *Αφαιρώ 2 από το Α΄ μέλος και αφαιρώ 3 στο Β΄ μέλος της ισότητας.*

   (ε) *Διαιρώ με 2 το Α΄ μέλος και πολλαπλασιάζω με 2 το Β΄ μέλος της ισότητας.*

   (στ) Να περιγράψετε και εσείς μία ενέργεια η οποία διατηρεί μια ισότητα και μια που δεν τη διατηρεί.

2. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω ισοδυναμίες, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

(α)	Αν $\alpha + 8 = \beta - 8$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β)	Αν $\alpha - 3 = \beta - 3$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ)	Αν $\alpha + 4 = \beta + 7$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta + 3$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ)	Αν $\alpha : 12 = \beta : 12$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(ε)	Αν $6\alpha = 24\beta$ και $\alpha, \beta \neq 0$	$\Leftrightarrow \alpha = \beta$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(στ)	Αν $\alpha = 3$ και $\beta = \alpha$	$\Leftrightarrow \beta = 3$	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

3. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των ισοτήτων, για να συμπληρώσετε τα κενά στις πιο κάτω ισοδυναμίες, όπου $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega \in \mathbb{N}$:

(α) $\alpha + 2 = 11 + \beta \quad \Leftrightarrow \alpha = \cdots$

(β) $x - 5 = y - 5 \quad \Leftrightarrow \cdots = x$

(γ) $7x = 28y \quad \Leftrightarrow x = \cdots$

(δ) $25 + \beta = 38 + \gamma \quad \Leftrightarrow \beta = \cdots$

(ε) $x : 11 = \omega : 11 \quad \Leftrightarrow \omega = \cdots$

4. Ο Αντρέας και ο Βασίλης έχουν αθροίσει τους βαθμούς που έχουν συγκεντρώσει στα τρία διαγωνίσματα του τετραμήνου. Έχουν συγκεντρώσει την ίδια βαθμολογία.

(α) Για τη βαθμολογία του τετραμήνου, η καθηγήτρια αποφάσισε να μην μετρήσει το διαγώνισμα με τον πιο χαμηλό βαθμό. Για τον Ανδρέα και το Βασίλη θα αφαιρεθεί το τελευταίο διαγώνισμα, στο οποίο έχουν πάρει και οι δύο $\frac{12}{20}$. Ποιος θα έχει τη ψηλότερη βαθμολογία, αθροίζοντας μόνο τα 2 διαγωνίσματα;

(β) Ο Ανδρέας και ο Βασίλης θέλουν να βρουν το μέσο όρο της βαθμολογίας τους για αυτό το τετράμηνο. Για να υπολογίσουμε το μέσο όρο, αθροίζουμε τους βαθμούς και διαιρούμε με το πλήθος των διαγωνισμάτων. Να εξετάσετε ποιος θα έχει το ψηλότερο μέσο όρο βαθμολογίας.

(γ) Να περιγράψετε ένα σενάριο στο οποίο οι δύο μαθητές δεν θα έχουν την ίδια βαθμολογία στο τέλος του τετραμήνου.

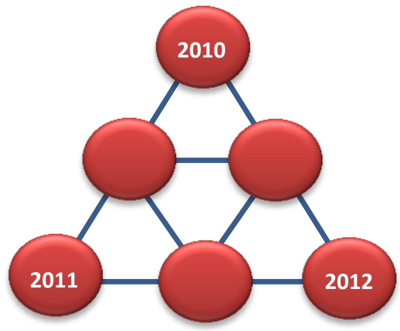
5. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$:

(α) Αν $\alpha + 5 + \beta = \gamma + \beta + 5$, τότε $\alpha = \gamma$.

(β) Αν $2\alpha + 3\beta + 7 = 2\alpha + 3\gamma + 7$, τότε $\beta = \gamma$.

(γ) Αν $\alpha\beta + 8 = \alpha\gamma + 8$ και $\alpha \neq 0$ τότε $\beta = \gamma$.

6. Να τοποθετήσετε κατάλληλους αριθμούς στους τρεις κύκλους, ώστε το άθροισμα των αριθμών στις κορυφές κάθε τριγώνου να είναι πάντοτε το ίδιο.

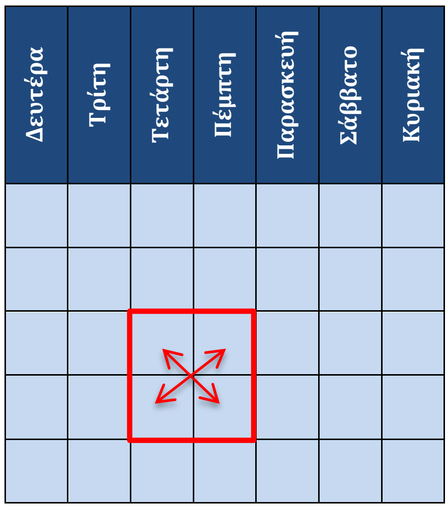


Αλγεβρικές Παραστάσεις

Διερεύνηση (1)

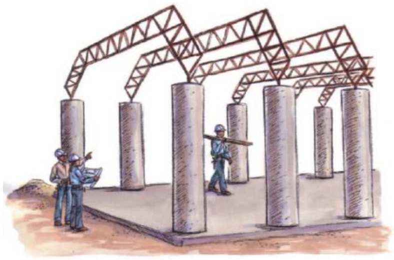
Στο ημερολόγιο ενός μήνα σχεδιάζουμε ένα τετράγωνο το οποίο περιέχει ημερομηνίες, όπως φαίνεται στο σχήμα με κόκκινο χρώμα.

- ✓ Να βρείτε το άθροισμα για κάθε ζεύγος αριθμών που βρίσκονται στα άκρα των δύο διαγωνίων.
- ✓ Ποια η σχέση των δύο αθροισμάτων.
- ✓ Να δείξετε ότι η σχέση που βρήκατε ισχύει και για άλλο τετράγωνο.
- ✓ Να δείξετε ότι η σχέση που βρήκατε ισχύει για κάθε τετράγωνο.



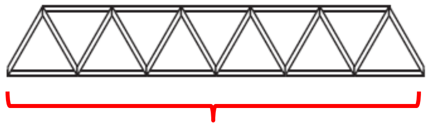
- ✓ Να εξετάσετε κατά πόσο η σχέση αυτή ισχύει και για κάθε ορθογώνιο.
- ✓ Να βρείτε και άλλα πιθανά μοτίβα, τα οποία εμφανίζονται σε ένα ημερολόγιο.

Διερεύνηση (2)



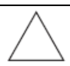
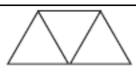
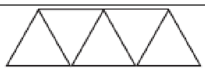
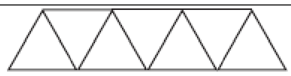
Η νέα τάση της αρχιτεκτονικής απαιτεί μεγάλες και πολύπλοκες κατασκευές που να κατασκευάζονται γρήγορα και να είναι ασφαλείς. Οι κατασκευές από χάλυβα είναι το αποτέλεσμα της ανάπτυξης της τεχνολογίας στην κατασκευή κτιρίων. Ανταποκρίνονται άριστα στο σεισμό, στον άνεμο, στο χιόνι και σε όλα τα καιρικά φαινόμενα.

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μεταλλικές δοκούς που συναρμολογούνται όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Καθένα από τα μεταλλικές ράβδους έχει μήκος $1\ m$.



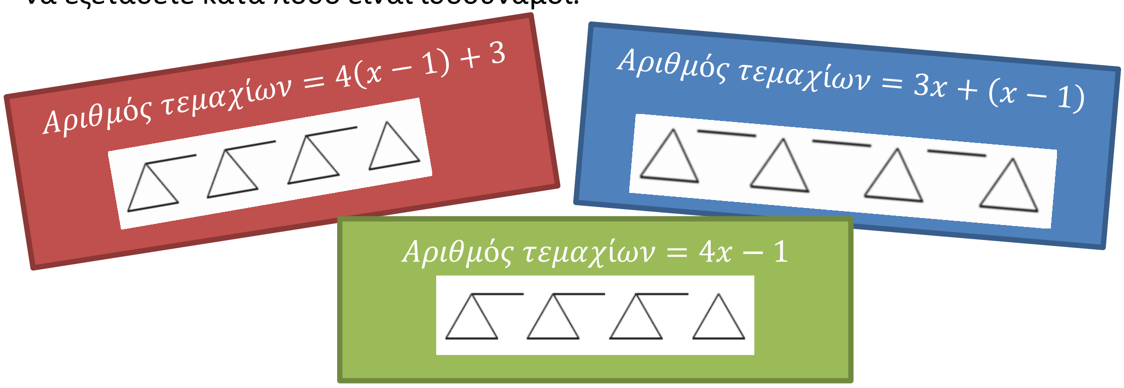
$Μήκος\ δοκού$

✓ Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

	Μήκος δοκού	Πλήθος μεταλλικών ράβδων $1\ m$
	1	3
	2	7
	3	
	4	
⋮	⋮	
⋮	x	

Για τον υπολογισμό του πλήθους των μεταλλικών ράβδων που χρειάζεται μια δοκός $(x)\ m$, οι μηχανικοί της εταιρείας χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους / κανόνες.

✓ Να μελετήσετε τις παραστάσεις και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν οι πιο κάτω τύποι και να εξετάσετε κατά πόσο είναι ισοδύναμοι.



Μαθαίνω

- Για να αναπαραστήσουμε μια ποσότητα που μεταβάλλεται, χρησιμοποιούμε γράμματα ή σύμβολα, τα οποία ονομάζονται **μεταβλητές**.

- Μια μαθηματική έκφραση που περιλαμβάνει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.

- **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

  Παραδείγματα:

  $2+8:4$ *Αριθμητική παράσταση*

  $3x-1$ *Αλγεβρική παράσταση, όπου το γράμμα x είναι η μεταβλητή*

  $2\alpha+5\beta$ *Αλγεβρική παράσταση με δύο μεταβλητές, τις α και β.*

- Το αποτέλεσμα που θα προκύψει, αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή ή τις μεταβλητές με ένα συγκεκριμένο αριθμό, λέγεται **αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης**.

- Για να γράψουμε μια αλγεβρική παράσταση σε πιο απλή μορφή χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πράξεων (επιμεριστική, προσεταιριστική, αντιμεταθετική).

  - *Στις αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δεν βάζουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών.*

    Γράφουμε: $3x$ *αντί* $3\cdot x$ $\quad$ $7xy$ *αντί* $7\cdot x\cdot y$

Παραδείγματα

1. Να γράψετε τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις στην πιο απλή μορφή τους:
   (α) $(\alpha+2)+7$
   (β) $5x+3x-2x$

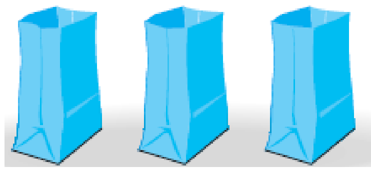
   Λύση:

   (α) $(\alpha+2)+7 = \alpha+(2+7) = \alpha+9$ *Εφαρμόζουμε την προσεταιριστική ιδιότητα.*

   (β) $5x+3x-2x = (5+3-2)\cdot x = 6x$ *Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.*

Η διαδικασία αυτή με την οποία γράψαμε σε πιο απλή μορφή τις πιο πάνω αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται «αναγωγή ομοίων όρων».

2. Ο Παναγιώτης έχει τοποθετήσει στην καθεμιά σακούλα τον ίδιο αριθμό κύβων. Επειδή ήταν αρκετά βαρετές, αφαίρεσε από τη καθεμιά 2 κύβους, για να μπορεί να τις μεταφέρει. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει:



   (α) το σύνολο των κύβων που υπήρχε αρχικά στις σακούλες
   (β) το σύνολο των κύβων που περιέχονται τώρα στα σακούλια.

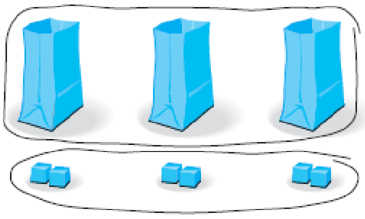
   Λύση:

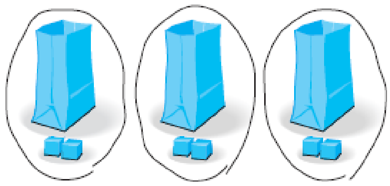
   (α) *Έστω ότι κάθε σακούλα περιέχει α κύβους.*

   Άρα, ο αρχικός συνολικός αριθμός θα είναι: $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}\varsigma} = 3 \cdot \alpha = 3\alpha$

   (β) *Ο Παναγιώτης αφαιρεί* 2 *κύβους από την κάθε σακούλα.*

   Άρα σε καθεμιά σακούλα παραμένουν $\alpha - 2$ *κύβοι.*





   Α΄ τρόπος:

$$\Sigma_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}\varsigma} = (3 \cdot \alpha) - (3 \cdot 2)$$
$$= 3\alpha - 6$$

   Β΄ τρόπος:

$$\Sigma_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}\varsigma} = 3 \cdot (\alpha - 2)$$
$$= (3 \cdot \alpha) - (3 \cdot 2)$$
$$= 3\alpha - 6$$

   Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσουμε την παράσταση.

3. Το μήκος ενός ορθογώνιου ποδοσφαιρικού γηπέδου είναι $30\,m$ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την περίμετρο σε σχέση με το πλάτος του.

   Λύση:

   Έστω α *το πλάτος του γηπέδου, τότε το μήκος του είναι* $\alpha + 30$.

   Πλάτος: α

   Μήκος: $\alpha + 30$

   Άρα, Περίμετρος: $\Pi = 2 \cdot (\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma + \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma)$

$$= 2(\alpha + \alpha + 30)$$
$$= 2\alpha + 2\alpha + 60$$
$$= 4\alpha + 60$$

   Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσουμε την παράσταση.
   Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις στην πιο απλή μορφή τους:

(α) $x + x$ (β) $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$

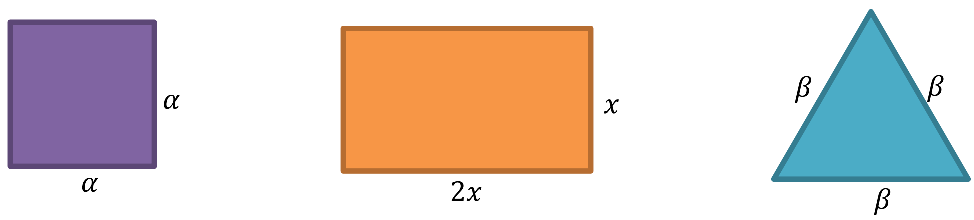
(γ) $3\alpha + 2\alpha$ (δ) $3\beta + \beta + 3\beta + \beta$

(ε) $5x + 8x - 5$ (στ) $7\omega + 10\omega - \omega$

(ζ) $3(\beta + 4)$ (η) $4(\omega + 2)$

(θ) $3\alpha + 2 + 5\alpha - 1$ (ι) $12\kappa - 5\kappa + 3$

2. Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων:



3. Ο Γιαννάκης έχει πάει για ψώνια σε ένα εμπορικό κέντρο. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του Γιαννάκη στις πιο κάτω περιπτώσεις:

4. Η Ελένη σήμερα είναι **12** χρονών. Να βρείτε την ηλικία της:

(α) μετά από 5 χρόνια

(β) μετά από x χρόνια

5. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Λεκτικές προτάσεις	Αλγεβρική παράσταση
Έστω ότι τα χρήματα του Ανδρέα είναι:	x
(α) Η Μαρίνα έχει €2 περισσότερα από τον Ανδρέα.	....
(β) Ο Αλέξης έχει	$x-14$
(γ) Η Ναταλία έχει τα διπλάσια χρήματα του Ανδρέα.	....
(δ) Η Κατερίνα έχει τα μισά χρήματα του Ανδρέα.	....
(ε) Ο Άρης έχει €4 λιγότερα από τα τριπλάσια χρήματα του Ανδρέα.	....
(στ) Ο Κώστας έχει πενταπλάσια χρήματα από τη Μαρίνα.	....
(ζ) Η Έλενα έχει	$7x-20$

6. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η πλευρά $ΑΓ$ είναι διπλάσια της $ΑΒ$ και η $ΒΓ$ είναι κατά 3 μονάδες μεγαλύτερη από την $ΑΒ$. Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρο του τριγώνου σε σχέση με το μήκος της πλευράς $ΑΒ$.

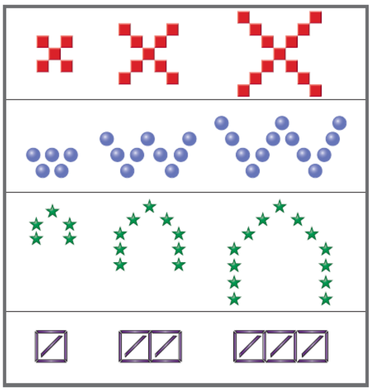
7. Η Μαίρη έχει τριπλάσια ηλικία από τον αδελφό της. Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζουν τις ηλικίες τους:
   (α) σήμερα
   (β) μετά από 7 χρόνια
   (γ) πριν από 6 χρόνια

8. Ο Αλέξανδρος, ο Βασίλης, ο Γιώργος, η Δανάη και η Έλενα έχουν εκλεγεί στο συμβούλιο της τάξης τους. Ο Αλέξανδρος πήρε 2 ψήφους περισσότερους από το Βασίλη και 4 λιγότερους από το Γιώργο. Η Έλενα πήρε 2 ψήφους λιγότερους από τη Δανάη και 5 περισσότερους από το Βασίλη. Να βρείτε τη σειρά με την οποία έχουν εκλεγεί.

Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης

Διερεύνηση (1)

Να μελετήσετε τα τέσσερα μοτίβα του διπλανού σχήματος.



- ✓ Τι κοινό έχουν τα μοτίβα αυτά;

- ✓ Πόσα τετραγωνάκια ή κουκίδες ή αστέρια ή ξυλάκια θα έχει το ενδέκατο σχήμα στη σειρά κάθε μοτίβου. Να δείξετε τον τρόπο με τον οποίο έχετε εργαστεί.

Διερεύνηση (2)

Κάθε χρόνο το δημοτικό συμβούλιο οργανώνει ένα αγώνα ποδηλασίας, στον όποιο οι συμμετέχοντες πληρώνουν ένα ποσό για δικαίωμα συμμετοχής. Τα καθαρά έσοδα δίνονται για ενίσχυση του Κέντρου Ευημερίας του Δήμου. Ο δήμος προσφέρει στον καθένα μια φανέλα με τις υπογραφές γνωστών και αγαπημένων αθλητών της Κυπριακής Ολυμπιακής ομάδας.

ΈΣΟΔΑ

<u>Εισφορά χορηγού:</u> €2000
<u>Δικαίωμα Συμμετοχής:</u> €10 για παιδιά
€16 για ενήλικες

ΈΞΟΔΑ

<u>Για διαφήμιση:</u> €100
<u>Κόστος φανέλας:</u> €5 παιδική
€11 για ενήλικες
<u>Χρηματικό έπαθλο:</u> Α΄ θέση €100
Β΄ θέση €75
Γ΄ θέση €25

- ✓ Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τα καθαρά έσοδα από την εκδήλωση.

- ✓ Αν έχουν ήδη δηλώσει συμμετοχή ως τώρα 45 παιδιά και 50 ενήλικες, να υπολογίσετε πόσο θα είναι το κέρδος του δημοτικού συμβουλίου.

- ✓ Να υπολογίσετε τον ελάχιστο αριθμό ατόμων που πρέπει να συμμετέχει, ώστε το δημοτικό συμβούλιο να έχει κέρδος €2000;

Παραδείγματα

1. Για την αναδάσωση μιας περιοχής θα χρησιμοποιηθούν πεύκα και κυπαρίσσια. Κάποια δεκάρια θα καλυφθούν μόνο με πεύκα και κάποια μόνο με κυπαρίσσια. Σύμφωνα με τις οδηγίες του Τμήματος Δασών τα πεύκα πρέπει να φυτεύονται 120 ανά δεκάριο, ενώ τα κυπαρίσσια να φυτεύονται 240 ανά δεκάριο.

   (α) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να δίνει το συνολικό αριθμό των δενδρυλίων που θα φυτευτούν σε σχέση με τον αριθμό των δεκαρίων στα οποία θα γίνει η αναδάσωση.

   (β) Αν θα φυτευτούν 10 δεκάρια με πεύκα και 25 με κυπαρίσσια, να βρείτε πόσα συνολικά δενδρύλλια θα χρειαστούν.

Το δεκάριο είναι μονάδα μέτρησης επιφανείας και ισούται με 1000 m^2

Λύση:

(α) *Έστω ότι ο αριθμός των δεκαρίων που θα φυτευτούν:*

Δεκάρια με πεύκα: x

Δεκάρια με κυπαρίσσια: ψ

Άρα,

Ο αριθμός των πεύκων που θα χρειαστούν είναι: $120x$

Ο αριθμός των κυπαρισσιών που θα χρειαστούν είναι: 240ψ

Ο συνολικός αριθμός των δενδρυλίων Σ είναι:

$$\Sigma = 120x + 240\psi$$

(β) *Αν θα φυτευτούν* 10 *δεκάρια με πεύκα και* 25 *με κυπαρίσσια, δηλαδή* $x = 10$ *και* $\psi = 25$*, τότε:*

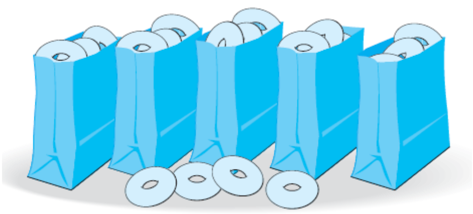
$$\begin{aligned}\Sigma &= 120x + 240\psi \\ &= 120 \cdot 10 + 240 \cdot 25 \\ &= 1200 + 6000 \\ &= 7200\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Το ύψος ενός τριγώνου είναι κατά 3 cm μεγαλύτερο από το μήκος της βάσης του.
   (α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου.
   (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου, όταν:
      i. η βάση του είναι ίση με 8 cm
      ii. το ύψος του είναι ίσο με 14 cm

2. Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
   (α) $2\alpha - \beta$
   (β) $2\alpha\beta$
   (γ) $3(\alpha - \beta)$
   (δ) $(3 + \alpha) \cdot (\beta - 1)$

3. Η Νεφέλη τοποθέτησε σε καθεμία από τις σακούλες του σχήματος τον ίδιο αριθμό κουλουριών. Στο τέλος της περίσσεψαν 4 κουλούρια.

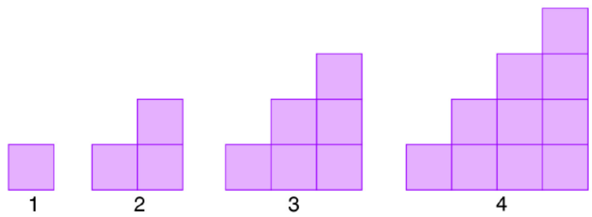


   (α) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός κουλουριών σε κάθε σακούλα	8	10	13		
Συνολικός αριθμός κουλουριών				79	104

   (β) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τον αριθμό των κουλουριών.

4. Τα τετράγωνα με τα οποία κατασκευάζουμε τα σχήματα έχουν πλευρά ίση με 1 cm.



   (α) Να βρείτε την περίμετρο του $5^{ου}$ σχήματος και να εξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.
   (β) Να γράψετε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει τη περίμετρο κάθε σχήματος.
   (γ) Ποιου σχήματος η περίμετρος θα είναι 128 cm;

5.

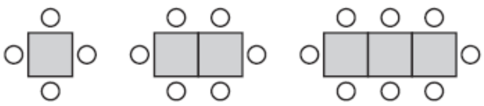
Οι αποδημητικές χήνες πετάνε σε σχηματισμό V γιατί όταν η κάθε χήνα κτυπά τα φτερά της, δημιουργεί ένα ανοδικό ρεύμα για την άλλη που ακολουθεί. Αν μια αγριόχηνα ξεφύγει από τον σχηματισμό, ξαφνικά αισθάνεται τη δυσκολία να πετάξει μόνη της και γρήγορα επιστρέφει στο σχηματισμό μαζί με τις άλλες. Όταν μια χήνα κουραστεί πάει στο πίσω μέρος του σχηματισμού και μια άλλη παίρνει τη θέση της. Οι χήνες που βρίσκονται στο πίσω μέρος, φωνάζουν για να ενθαρρύνουν εκείνες που βρίσκονται μπροστά, ώστε να αυξήσουν την ταχύτητά τους!

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο οποιοδήποτε πλήθος από χήνες μπορεί να πετάξει σε σχηματισμό V.

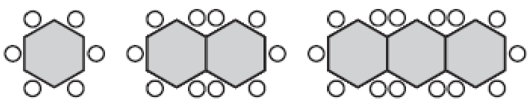
(β) Να αναπαραστήσετε τους πέντε πρώτους σχηματισμούς και να βρείτε έναν κανόνα που να περιγράφει τον αριθμό των χηνών για τον ν-οστό σχηματισμό.

6. Να βρείτε πόσα άτομα θα καθίσουν αν ενωθούν 10 τραπέζια όπως πιο κάτω:

(α)



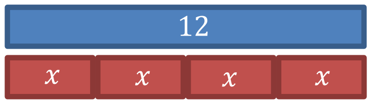
(β)



ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Διερεύνηση (1)

Τοποθετούμε 4 κόκκινα ίδια πλακίδια στη σειρά και παρατηρούμε ότι έχουν το ίδιο μήκος με ένα μπλε πλακίδιο μήκους 12 $\mu o \nu \acute{\alpha} \delta \omega \nu$ (μ), όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

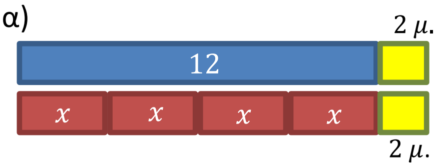


Δηλαδή $4x = 12$

✓ Να βρείτε το μήκος του καθενός από τα κόκκινα πλακίδια.

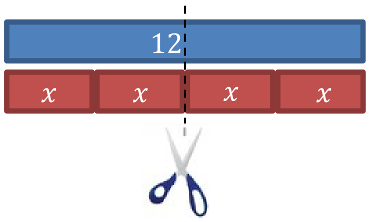
Με βάση το πιο πάνω μοντέλο, να γράψετε συμβολικά τη σχέση που εκφράζει το καθένα από τα πιο κάτω σχήματα και να βρείτε το μήκος του καθενός από τα κόκκινα πλακίδια στην κάθε περίπτωση.

(α)



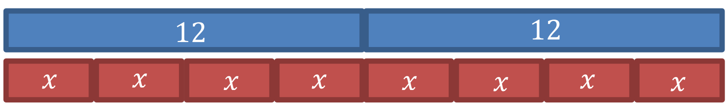
Συμβολικά: $4x + 2 = \cdots$

(β)



Συμβολικά:

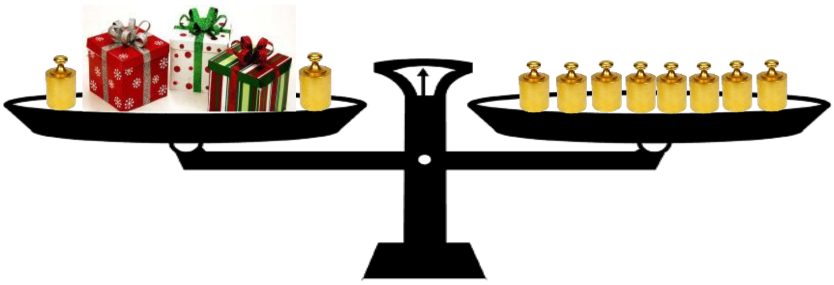
(γ)



Συμβολικά:

Διερεύνηση (2)

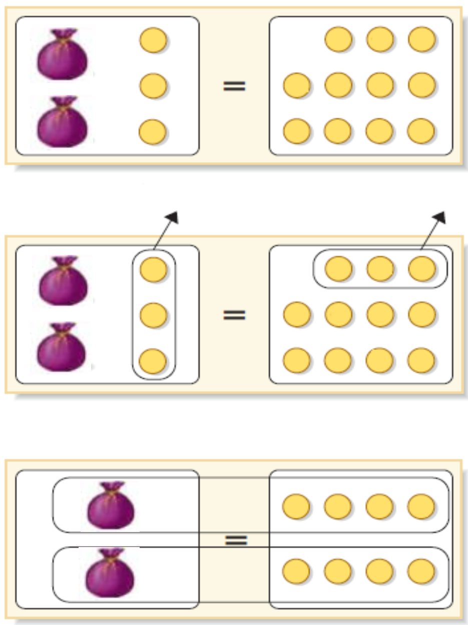
Αν η ζυγαριά ισορροπεί και όλα τα πακέτα έχουν την ίδια μάζα, να βρείτε πόσο ζυγίζει κάθε πακέτο. Να επεξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε και να παραστήσετε αλγεβρικά τη διαδικασία λύσης.



Διερεύνηση (3)

Πιο κάτω φαίνεται η επίλυση μιας εξίσωσης.

- ✓ Ποια είναι η εξίσωση;
- ✓ Να περιγράψετε τη διαδικασία επίλυσης με βάση το μοντέλο.



Μαθαίνω

- **Εξίσωση** είναι μια ισότητα που περιέχει τουλάχιστον μία μεταβλητή.

- Όταν αντικαταστήσουμε την μεταβλητή με μια τιμή και προκύψει αληθής ισότητα, τότε λέμε ότι η τιμή **επαληθεύει** την εξίσωση.

- Οι τιμές των μεταβλητών που επαληθεύουν την εξίσωση λέγονται **λύσεις** της εξίσωσης.
  Παράδειγμα $x = 2$ *είναι λύση της εξίσωσης* $4x + 3 = 11$,
  επειδή $4 \cdot 2 + 3 = 11$
  $11 = 11$

- **Επίλυση εξισώσεων** είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε τις τιμές των μεταβλητών που επαληθεύουν την εξίσωση.
  - *Στην Α′ Γυμνασίου θα ασχοληθούμε μόνο με εξισώσεις που περιέχουν μία μεταβλητή.*

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 9 είναι λύση της εξίσωσης $x + 12 = 20$.

Λύση:

$x + 12 = 20$
$9 + 12 = 20$
$21 = 20$

Αντικαθιστούμε το x με τον αριθμό 9. Παρατηρούμε ότι η ισότητα είναι ***ψευδής****, δηλαδή η εξίσωση δεν επαληθεύεται. Συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός 9* ***δεν είναι λύση*** *της εξίσωσης* $x + 12 = 20$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\alpha - 25 = 30$

(β) $8x = 848$

Λύση:

(α) $\alpha - 25 = 30$
$\Leftrightarrow \alpha - \cancel{25} = 55 - \cancel{25}$
$\Leftrightarrow \alpha = 55$

Γράφουμε το 30 ως διαφορά $55 - 25$ *και διαγράφουμε τον αφαιρετέο 25 και από τα δύο μέλη.*

(β) $8x = 848$
$\Leftrightarrow \frac{8x}{8} = \frac{848}{8}$
$\Leftrightarrow x = 106$

Για να βρούμε την τιμή της μεταβλητής διαιρούμε και τα δύο μέλη με το γνωστό παράγοντα.

3. Να επιλύσετε την εξίσωση $2(x+3)=18$.

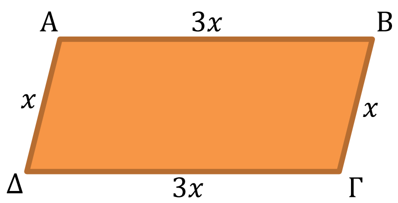
Α΄ τρόπος: *Για να βρούμε τον παράγοντα $(x+3)$ διαιρούμε το γινόμενο με το γνωστό παράγοντα. Ακολούθως, για να βρούμε τον ένα προσθετέο αφαιρούμε από το άθροισμα το γνωστό προσθετέο.* $2(x+3)=18$ $\Leftrightarrow x+3=18:2$ $\Leftrightarrow x+3=9$ $\Leftrightarrow x=9-3$ $\Leftrightarrow x=6$	***Β΄ τρόπος:*** *Εφαρμόζουμε αρχικά την επιμεριστική ιδιότητα και ακολούθως τις ιδιότητες της διαγραφής.* $2(x+3)=18$ $\Leftrightarrow 2x+6=18$ $\Leftrightarrow 2x+6=12+6$ $\Leftrightarrow 2x+\cancel{6}=12+\cancel{6}$ $\Leftrightarrow 2x=12$ $\Leftrightarrow \cancel{2}x=\cancel{2}\cdot 6$ $\Leftrightarrow x=6$
Γ΄ τρόπος: *Εφαρμόζουμε αρχικά την επιμεριστική ιδιότητα και ακολούθως για να βρούμε τον ένα προσθετέο αφαιρούμε από το άθροισμα το γνωστό προσθετέο. Ακολούθως για να βρούμε τον παράγοντα διαιρούμε το γινόμενο με το γνωστό παράγοντα.* $2(x+3)=18$ $\Leftrightarrow 2x+6=18$ $\Leftrightarrow 2x=18-6$ $\Leftrightarrow 2x=12$ $\Leftrightarrow x=6$	***Δ΄ τρόπος:*** *Εφαρμόζουμε αρχικά την επιμεριστική ιδιότητα και ακολούθως τις ιδιότητες των ισοτήτων αφαιρώντας αρχικά και ακολούθως διαιρώντας και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό.* $2(x+3)=18$ $\Leftrightarrow 2x+6=18$ $\Leftrightarrow 2x+6-6=18-6$ $\Leftrightarrow 2x+\cancel{6}-\cancel{6}=18-6$ $\Leftrightarrow 2x=12$ $\Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{12}{2}$ $\Leftrightarrow x=6$

4. Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο ίση με $32\,cm$. Να βρείτε το μήκος της κάθε πλευράς του, αν η μια πλευρά είναι τριπλάσια από την άλλη.

Λύση:

Έστω x το μήκος της μιας πλευράς του, τότε το μήκος της άλλης πλευράς του θα είναι $3x$. Άρα,

$ΒΓ = ΑΔ = x$ *και* $ΑΒ = ΓΔ = 3x$



$Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 32$

$$3x + x + 3x + x = 32$$
$$\Leftrightarrow 8x = 32$$
$$\Leftrightarrow x = 32:8$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

Άρα το μήκος των πλευρών του παραλληλόγραμμου είναι: $ΒΓ = ΑΔ = 4\,cm$

$ΑΒ = ΓΔ = 3\cdot 4 = 12\,cm$

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί $5, 10, 11,$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + 30 = 52.$

2. Να αντιστοιχίσετε την κάθε εξίσωση με την ισοδύναμή της:

Εξίσωση	Λύση
$\alpha + x = \beta$	$x = \beta \cdot \alpha$
$x - \alpha = \beta$	$x = \beta : \alpha$
$\alpha - x = \beta$	$x = \beta - \alpha$
$\alpha \cdot x = \beta$	$x = \beta + \alpha$
$x : \alpha = \beta$	$x = \alpha : \beta$
$\alpha : x = \beta$	$x = \alpha - \beta$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\psi + 25 = 32$ (β) $4\gamma = 120$

(γ) $18 + \omega = 33$ (δ) $80 - x = 16$

(ε) $\mu : 25 = 125$ (στ) $25 + \delta = 535$

(ζ) $x - 12 = 45$ (η) $24x = 120$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\psi + \psi + \psi = 33$ (β) $2\alpha + 3\alpha = 35$

(γ) $2\kappa + 6\kappa = 24$ (δ) $2\alpha + 12 = 24$

(ε) $3(\alpha + 2) = 15$ (στ) $5(x - 10) = 75$

(ζ) $\beta + 3 + \beta = 33$ (η) $8(2\alpha + 5) = 72$

5. Να γράψετε πέντε διαφορετικές εξισώσεις που να έχουν ως λύση τον αριθμό 10.

6. Να εξετάσετε την ορθότητα των λύσεων που έδωσε ο Παύλος στις εξισώσεις:

$x + 9 = 20$

$\Leftrightarrow x+9-9=20+9$

$\Leftrightarrow x=2$

$3x + 9 = 15$

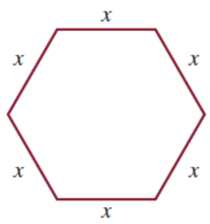
$\Leftrightarrow \cancel{3}x+9=\cancel{3}\cdot 5$

$\Leftrightarrow x+9=15$

$\Leftrightarrow x=15-9$

$\Leftrightarrow x=6$

<u>Να επιλύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με τη χρήση ΕΞΙΣΩΣΗΣ:</u>



7. Η κεντρική πλατεία του Δήμου έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου. Αν η περίμετρος είναι $132\ m$, να υπολογίσετε το μήκος της κάθε πλευράς.

8. Ο παππούς του Αντώνη μοίρασε τα χρήματά του εξίσου στα 4 παιδιά του. Πόσα χρήματα είχε, αν έδωσε στο κάθε παιδί €3420;

9. Το εμβαδό ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου είναι $200\ m^2$. Να βρεθεί το πλάτος του, αν το μήκος του είναι $20\ m$.

10. Η Αλίκη κρατούσε €63 για να αγοράσει 5 ίδια δώρα για τις φίλες της. Να βρείτε πόσο κόστισε κάθε δώρο, αν της περίσσεψαν €3.

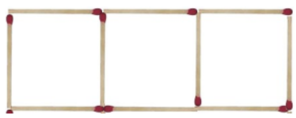
11. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο $36\ cm$, αν γνωρίζουμε ότι η μια διάσταση είναι διπλάσια της άλλης.

12. Το άθροισμα δύο διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 30. Ποιο είναι οι αριθμοί αυτοί;

13. Ένα κουτί μαζί με το περιεχόμενο του ζυγίζει $10\ kg$. Το περιεχόμενο είναι βαρύτερο κατά $6\ kg$ από το κουτί. Να βρείτε πόσο ζυγίζει το κουτί και πόσο το περιεχόμενό του.

14. Ο Γιώργος διάβασε ένα βιβλίο 120 σελίδων σε 3 μέρες. Κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα;

15. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η πλευρά $ΑΒ$ είναι διπλάσια της $ΒΓ$ και η $ΑΓ$ είναι τριπλάσια της $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το μήκος της κάθε πλευράς, αν η περίμετρος του τριγώνου είναι $18\ cm$.



16. Με 10 σπίρτα μπορώ να φτιάξω 3 τετράγωνα στη σειρά, όπως φαίνεται δίπλα:
    (α) Πόσα τετράγωνα στη σειρά μπορώ να φτιάξω με 73 σπίρτα;
    (β) Να εξετάσετε αν με 8354 σπίρτα μπορώ να κατασκευάσω τετράγωνα στη σειρά όπως πιο πάνω, χωρίς να μου περισσέψουν καθόλου σπίρτα.

17. Ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ έχει πλάτος $5\ cm$ και περίμετρο $14\ cm$. Το ορθογώνιο είναι ισεμβαδικό (έχει το ίδιο εμβαδόν) με τρίγωνο $ΕΖΗ$. Να βρείτε το μήκος της βάσης τριγώνου $ΕΖΗ$, αν το ύψος του είναι $2\ cm$.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ
Δυνάμεις με εκθέτη φυσικό αριθμό

Εξερεύνηση

Λέγεται ότι πριν από πολλά χρόνια στις Ινδίες ζούσε ένας αυτοκράτορας ο Βέλχιμπ, του οποίου το βασίλειο ήταν τεράστιο. Ένας Βραχμάνος ιερέας ο Σίσσα επινόησε και πρόσφερε το σκάκι στον αυτοκράτορα, ο οποίος γοητεύθηκε τόσο πολύ που θέλησε να τον ευχαριστήσει με ένα δώρο.
Ο Σίσσα σκέφτηκε για λίγο και του απάντησε: «*Θέλω να μου δώσεις δύο σπυριά σιτάρι για το πρώτο τετράγωνο του σκακιού, τα διπλάσια για το δεύτερο και τα διπλάσια του προηγούμενου για κάθε επόμενο τετράγωνο*». Ο αυτοκράτορας παραξενεύτηκε και θύμωσε για το φτηνό δώρο που ζήτησε ο Σίσσα και ζήτησε από τους αποθηκάριους του να του χαρίσουν το σιτάρι που ήθελε. Δεν μπόρεσε όμως να ξεπληρώσει την υπόσχεσή του.

✓ Ποιο νομίζετε ότι ήταν το πρόβλημα που αντιμετώπισε ο αυτοκράτορας;

Διερεύνηση

Να συμπληρώσετε τον πίνακα για να υπολογίσετε το σιτάρι:

Τετράγωνο	Αριθμός σπυριών σιταριού	Δύναμη	Αποτέλεσμα
1			
2			
3			
4			
⋮			
8			
10			
⋮			
20			
⋮			
32			
⋮			
64			

Για να παραχθεί αυτή η ποσότητα του σιταριού, η οποία είναι ένας τεράστιος αριθμός με 20 ψηφία, έπρεπε να σπείρουν 76 φορές όλη τη Γη!

Λέγεται ότι ο αυτοκράτορας για να αποφύγει τν συμφωνία που έκανε , συμβουλεύτηκε το σύμβουλό του, ο οποίος του είπε να καλέσει τον Σίσσα να μετρήσει ο ίδιος το σιτάρι που ζήτησε, καθώς δεν θα του έφθαναν ούτε δύο ζωές, για να το μετρήσει.

Μαθαίνω

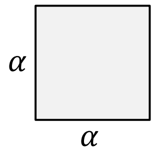
- Το γινόμενο, $\underbrace{\boldsymbol{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \cdots\ \cdot\alpha}}_{\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\text{οντες}}$ οποιουδήποτε αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$ με $\boldsymbol{\nu}$ παράγοντες, όπου $\nu > 1$, συμβολίζεται ως $\boldsymbol{\alpha^{\nu}}$ και ονομάζεται **δύναμη του $\boldsymbol{\alpha}$ στη $\boldsymbol{\nu}$** ή ***νιοστή* δύναμη του $\boldsymbol{\alpha}$.**

- Το $\boldsymbol{\alpha}$ ονομάζεται **βάση** της δύναμης και το $\boldsymbol{\nu}$ ονομάζεται **εκθέτης** της.

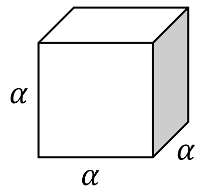
- Ορίζεται ότι:
  - $\boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}$
  - $\boldsymbol{\alpha^0 = 1\ ,\ \alpha \neq 0}$

Ειδικά:

- *Το γινόμενο $\boldsymbol{\alpha\cdot\alpha = \alpha^2}$ διαβάζεται και **α στο τετράγωνο** καθώς μπορεί να αναπαραστήσει το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά α.*

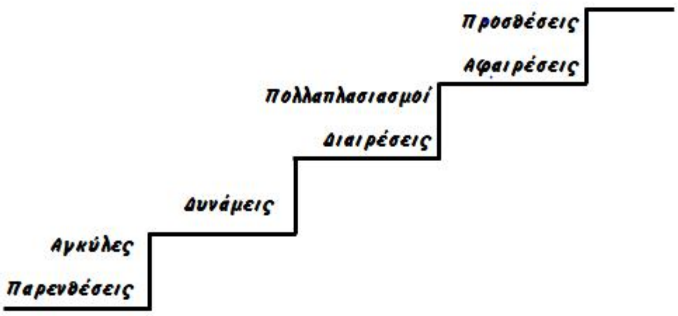


- *Το γινόμενο $\boldsymbol{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = \alpha^3}$ διαβάζεται και **α στον κύβο** καθώς μπορεί να αναπαραστήσει τον όγκο ενός κύβου με πλευρά α.*



- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα δυνάμεων**) είναι η ακόλουθη:
  - *Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.*
  - *Ακολούθως εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.*
  - *Τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.*

  Αν υπάρχουν στην παράσταση παρενθέσεις τότε με την προηγούμενη σειρά εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.



Παραδείγματα

1. Να γράψετε τις πιο κάτω δυνάμεις ως γινόμενα και στη συνέχεια να τις υπολογίσετε:

   (α) 7^2 (β) 5^4 (γ) 3^6 (δ) Έξι στον κύβο

Λύση:

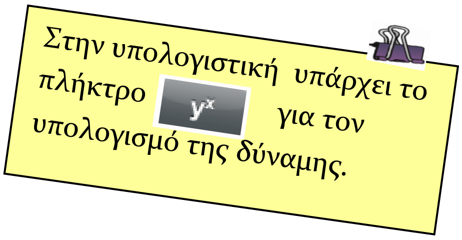
(α) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

(β) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

(γ) $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

(δ) $\text{Έξι στον κύβο} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

2. Το byte είναι ένας όρος που χρησιμοποιείται στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για να περιγράψει μια μικρή ποσότητα πληροφορίας που αποθηκεύεται στη μνήμη του υπολογιστή. Για παράδειγμα, για να αποθηκευτεί στη μνήμη του υπολογιστή ένας χαρακτήρας (γράμμα ή αριθμός) χρειάζεται χωρητικότητα μνήμης 1 byte. Αν ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής αποθηκεύει πληροφορία που αντιστοιχεί σε 1 Kilobyte, να βρείτε πόσοι χαρακτήρες περιέχονται στην πληροφορία, αν ένα *Kilobyte ορίζεται ως* 2^{10} *bytes*.



Λύση:

Ένα Kilobyte ορίζεται ως 2^{10} *bytes.*

Για τον υπολογισμό της δύναμης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αριθμομηχανή.

Πληκτρολογούμε:

Η απάντηση είναι $2^{10} = 1024$. *Άρα το kilobyte περιέχει* 1024 *χαρακτήρες.*

3. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

   (α) $4^1 + 2^2 \cdot (6-1)^0$

   (β) $4^2 + 2^2 : (2^1 - 6^0)$

Λύση:

(α)	$4^1 + 2^2 \cdot (6-1)^0 = 4^1 + 2^2 \cdot 5^0$	*Εκτελείται πρώτα η πράξη στην παρένθεση.*
	$= 4 + 4 \cdot 1$	*Υπολογίζονται οι δυνάμεις.*
	$= 4 + 4$	*Εκτελείται ο πολλαπλασιασμός.*
	$= 8$	*Εκτελείται η πρόσθεση.*

(β) $4^2 + 2^2 : (2^1 - 6^0) = 4^2 + 2^2 : (2 - 1)$ — *Υπολογίζονται πρώτα οι δυνάμεις στην παρένθεση και ακολούθως η αφαίρεση.*

$= 16 + 4 : 1$ — *Εκτελείται η διαίρεση.*

$= 16 + 4$ — *Εκτελείται η αφαίρεση.*

$= 20$

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραστάσεις μπορούν να γραφούν υπό μορφή δύναμης με εκθέτη μεγαλύτερο του 1:

   (α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ (β) $4 \cdot 3 \cdot 5$ (γ) $2013 \cdot 2013 \cdot 2013$

   (δ) $4 + 4 + 4$ (ε) $\beta \cdot \beta$ (στ) $\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{101 \text{ προσθετέους}}$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής:

   (α) 7^2 (β) 12^2 (γ) 100^2

   (δ) 3^3 (ε) 10^4 (στ) 3^5

   (ζ) 2012^1 (η) 2012^0 (θ) 1^{2012}

3. Να εξετάσετε ποιοι από τους πιο κάτω αριθμούς μπορούν να γραφούν ως δύναμη, με εκθέτη μεγαλύτερο του 1:

   (α) 32 (β) 49 (γ) 111 (δ) 1000

   (ε) 256 (στ) 169 (ζ) 80 (η) 225

4. Να γράψετε τους επόμενους αριθμούς ως δυνάμεις, με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

   (α) 1 (β) 64 (γ) 81 (δ) 256

5. Να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας, για να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

   (α) 5^8 (β) 12^4 (γ) 7^6 (δ) 26^5

6. Να κατατάξετε τις πιο κάτω δυνάμεις σε φθίνουσα σειρά:

   (α) 5^2 (β) 5^3 (γ) 1^5 (δ) 2^5 (ε) 2^1

7. Η ομάδα εθελοντισμού του σχολείου, για να ειδοποιεί τα μέλη της ομάδας για την επόμενη δράση τους, εφαρμόζει την εξής τακτική: Ο αρχηγός της ομάδας τηλεφωνεί σε 3 μέλη της ομάδας και αυτοί που ειδοποιούνται, ειδοποιούν με την σειρά τους ο καθένας τους άλλα τρία μέλη, κ.ο.κ.. Να παρουσιάσετε πώς γίνεται η διαδικασία ενημέρωσης.

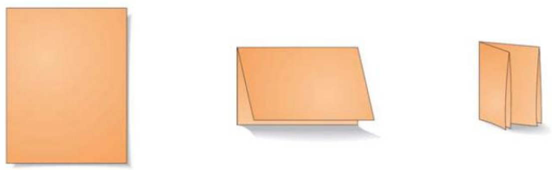
8. Να βρείτε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

(α)	$2 \cdot 5^2 + 3$	(β)	$2^0 + (5+3)^2$
(γ)	$2^2 \cdot 5 + 3^0$	(δ)	$(3-2)^2 \cdot 5^0$
(ε)	$5^3 + 12^1 - 3^2 + 1^{10}$	(στ)	$2^0 + 6^2 : 2^2$
(ζ)	$15^1 - 2^3 : 4$	(η)	$3^0 + (4-2)^2 \cdot 5^0$
(θ)	$8 \cdot (2^4 - 3) + 2^3$	(ι)	$16 : 4^2 + 5^2 \cdot 1^{2012} - 0^3$

9. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων αν $\alpha = 3$ και $\beta = 2$:

(α)	$\alpha^2 + \beta^2$	(β)	$(\alpha + \beta)^2$
(γ)	$(\alpha + \beta + 1234)^0$	(δ)	$5^\alpha - 3^\beta$

10. Να βρείτε πόσες φορές θα πρέπει να διπλώσουμε το χαρτί στη μέση, έτσι ώστε να δημιουργηθούν 32 ίσα μέρη.



1 μέρος 2 μέρη 4 μέρη

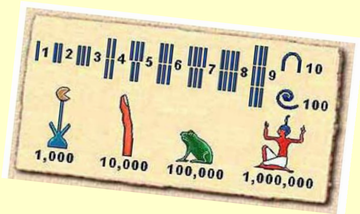
11. Να τοποθετήσετε παρενθέσεις, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:
   (α) $2 \cdot 5 + 2^2 = 11^2 - 23$
   (β) $22 - 7 - 5^2 \cdot 2 = 2 \cdot 3^2 - 4$

12. Ο κύριος Ανδρέας έχει να κάνει μια εργασία συντήρησης στα γραφεία μιας μεγάλης εταιρείας και ο διευθυντής του έκανε την εξής προσφορά:
   «Μπορώ να σε πληρώσω προκαταβολικά €15.000, *ή αν θέλεις σου προσφέρω* 1 *σεντ για την πρώτη μέρα, τα διπλάσια για την επόμενη, τα διπλάσια της προηγούμενης για κάθε επόμενη μέρα. Μπορείς να επιλέξεις όποια προσφορά θέλεις».*
   Να εξετάσετε ποιος τρόπος πληρωμής τον συμφέρει, αν ο κύριος Ανδρέας έχει υπολογίσει ότι θα χρειαστεί 21 μέρες, για να τελειώσει την εργασία.

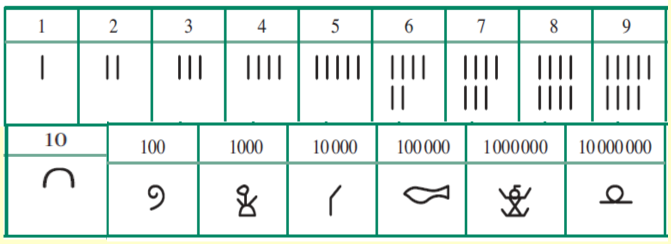
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Εξερεύνηση

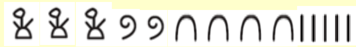
Κάθε πολιτισμός στην αρχαιότητα καθόρισε τη βάση του αριθμητικού του συστήματος και χρησιμοποιούσε δικά του σύμβολα, για να αναπαριστάνει ποσότητες.



Στο αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης, της τρίτης χιλιετίας π.Χ., χρησιμοποιούνταν τα ακόλουθα σύμβολα.



Παράδειγμα:
3245



Στο κινέζικο σύστημα αρίθμησης, της τρίτης χιλιετίας π.Χ., χρησιμοποιούνταν σύμβολα για τους πρώτους εννέα αριθμούς και σύμβολα για τη δεκάδα, εκατοντάδα και χιλιάδα.

1	2	3	4	5	6
一	二	三	四	五	六
7	8	9	10	100	1000
七	八	九	十	百	千

Παράδειγμα:
3245

(διαβάζεται από πάνω προς τα κάτω)

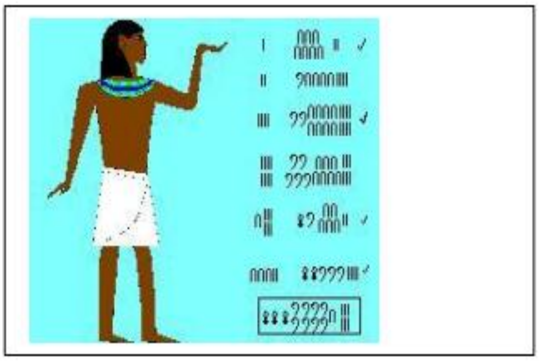
三
千
二
百
四
十
五

- ✓ Να μελετήσετε τα πιο πάνω αριθμητικά συστήματα και να τα συγκρίνετε με το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιούμε.

- ✓ Σε μια ανασκαφή, στην Αίγυπτο, ανακαλύφθηκε μια σπασμένη πλάκα στην οποία ήταν γραμμένος ένας αριθμός. Ποιος ήταν ο αριθμός που ήταν γραμμένος στην πλάκα; Μπορείτε να απαντήσετε με βεβαιότητα;

Διερεύνηση

Όπως κάθε λαός είχε τα δικά του σύμβολα για τους αριθμούς, με τον ίδιο τρόπο ανέπτυξε και δικούς του τρόπους για να εκτελεί τις τέσσερις πράξεις των αριθμών. Στην πιο κάτω εικόνα, ένας Αιγύπτιος παρουσιάζει στην ιερογλυφική γραφή τον τρόπο υπολογισμού του γινομένου $53 \cdot 72$.



$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 72 = 72 & \\ \cancel{2 \cdot 72 = 144} & \\ 4 \cdot 72 = 288 & \\ \cancel{8 \cdot 72 = 576} & \\ 16 \cdot 72 = 1152 & \\ 32 \cdot 72 = 2304 & \\ \hline \mathbf{53} & \mathbf{3816} \end{array}$$

$$\mathbf{53 = 1 + 4 + 16 + 32}$$

- ✓ Να μελετήσετε και να εξηγήσετε τον τρόπο πολλαπλασιασμού των αρχαίων Αιγυπτίων.

- ✓ Γιατί κάθε γινόμενο χρησιμοποιείται μόνο μια φορά;

- ✓ Να εξετάσετε αν είναι δυνατό να εκτελέσουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς, χρησιμοποιώντας τον τρόπο των Αιγυπτίων.

Μαθαίνω

- Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιεί μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, ..., δηλαδή δυνάμεις με βάση το 10 και ψηφία $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (10 ψηφία).

…		Χιλιάδες	Εκατοντάδα	Δεκάδες	Μονάδες
…	$10^4 = 1000$	$10^3 = 1000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$

Π.χ. $2304 = \mathbf{2} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{0} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \cdot 10^0$

- Το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιεί μονάδες, δυάδες, τετράδες, οκτάδες, … , δηλαδή δυνάμεις με βάση το 2 και ψηφία μόνο το 0 και το 1 (2 ψηφία). Δηλώνουμε ότι ένας αριθμός είναι γραμμένος στο δυαδικό σύστημα γράφοντας σε παρένθεση, στη θέση δείκτη τον αριθμό 2.

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	Δεκαεξάδα	Οκτάδα	Τετράδα	Δυάδα	Μονάδα
$\cdots$	$2^6=64$	$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$

Παράδειγμα: $1011_{(2)} = \mathbf{1}\cdot 2^3+\mathbf{0}\cdot 2^2+\mathbf{1}\cdot 2^1+\mathbf{1}\cdot 2^0$

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως **άθροισμα δυνάμεων του 2**. Στο ανάπτυγμα αυτό κάθε δύναμη του 2 χρησιμοποιείται το πολύ μια φορά.

- Η αξία θέσης κάθε ψηφίου στο δυαδικό σύστημα αντιστοιχεί στη δύναμη του 2 με εκθέτη τη θέση του ψηφίου μειωμένη κατά 1.

Παράδειγμα: $1011_{(2)}$

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	Δεκαεξάδα	Οκτάδα	Τετράδα	Δυάδα	Μονάδα
$\cdots$	$2^6=64$	$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
				1	0	1	1

Παραδείγματα

1. Δίνεται ο αριθμός $1001_{(2)}$ του δυαδικού συστήματος.

   (α) Να βρείτε την αξία θέσης του ψηφίου 1 στον αριθμό $1001_{(2)}$.

   (β) Να τον μετατρέψετε στο δεκαδικό σύστημα.

$\cdots$	$2^6=64$	$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
				1	0	0	1

Λύση:

(α) *Η μονάδα που βρίσκεται στην πρώτη θέση από τα δεξιά αντιστοιχεί στο* 2^0 *δηλαδή στο* 1 *του δεκαδικού συστήματος, ενώ η μονάδα που βρίσκεται στην τέταρτη θέση αντιστοιχεί στο* 2^3 *δηλαδή στο* 8 *του δεκαδικού συστήματος.*

(β) *Ο αριθμός* 1001*, αναλύεται ως εξής:* $1001_{(2)} = 2^0 + 2^3 = 1 + 8$

Άρα $1001_{(2)} = 9_{(10)}$.

2. Να γράψετε τους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος 5, 15 και 333 στο δυαδικό σύστημα:

Λύση:

(α) *Ο αριθμός* 5 *αναλύεται:*

$$5 = 4 + 1$$
$$= 2^2 + 2^0$$

…	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
…	64	32	16	8	4	2	1
					✓		✓

Άρα $5_{(10)} = 101_{(2)}$

(β) *Ο αριθμός* 15 *αναλύεται:*

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$
$$= 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

…	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
…	64	32	16	8	4	2	1
				✓	✓	✓	✓

Άρα $15_{(10)} = 1111_{(2)}$

(γ) *Ο αριθμός* 333 *αναλύεται:*

$333 = \mathbf{256} + 77$

Για να μετατρέψουμε το 333 *στο δυαδικό σύστημα αρχικά εξετάζουμε ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του* 2 *που χωράει στο* 333*. Παρατηρούμε ότι χωράει το* $2^8 = 256$*.*

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + 13$

Εξετάζουμε τώρα ποια είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 *που χωράει στο* 77*.*

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + \mathbf{8} + 5$

Ακολουθούμε την πιο πάνω διαδικασία για το 13

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + \mathbf{8} + \mathbf{4} + 1$

Ακολουθούμε την πιο πάνω διαδικασία για το 5

$333 = \mathbf{256} + \mathbf{64} + \mathbf{8} + \mathbf{4} + \mathbf{1}$

$$333 = 256 + 64 + 8 + 4 + 1$$
$$= 2^8 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

…	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
…	256	128	64	32	16	8	4	2	1
	✓		✓			✓	✓		✓

Άρα $333_{(10)} = 101001101_{(2)}$

Δραστηριότητες

1. Ο Αιγύπτιος στη διπλανή εικόνα γράφει αριθμούς στο αιγυπτιακό σύστημα:
   (α) Να βρείτε ποιόν αριθμό έχει γράψει ο Αιγύπτιος.
   (β) Να υπολογίσετε πόσα σύμβολα χρειάζονται για να γραφεί η χρονολογία γεννήσεως σας.

2. Να γράψετε τους δέκα πρώτους αριθμούς του δυαδικού συστήματος.

3. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 110	(β) 1111	(γ) 1001
(δ) 1101	(ε) 10001	(στ) 11011
(ζ) 1111111	(η) 1110001	(θ) 10101010

4. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 9	(β) 8	(γ) 14
(δ) 17	(ε) 18	(στ) 30
(ζ) 47	(η) 52	(θ) 67

5. Να βρείτε τον επόμενο και τον προηγούμενο αριθμό των πιο κάτω αριθμών του δυαδικού συστήματος:

(α) 101	(β) 1111	(γ) 1101

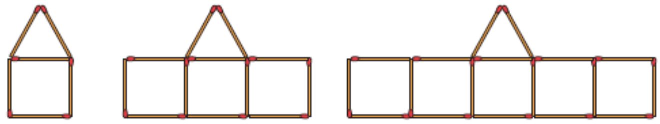
6. Ένας αριθμός του δυαδικού συστήματος έχει τρία ψηφία.
   (α) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος και ο ποιος ο μικρότερος αριθμός;
   (β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα.

7. Ένας αριθμός του δεκαδικού συστήματος μετατρέπεται στο δυαδικό σύστημα και δίνει ένα τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αριθμός αυτός του δεκαδικού συστήματος;

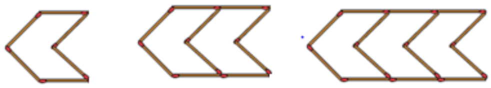
Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να βρείτε το γενικό όρο στα πιο κάτω μοτίβα:

(α)



(β)



2. Ένα χωριό K έχει x κατοίκους. Να εκφράσετε συμβολικά τις πιο κάτω προτάσεις:
   (α) Το χωριό Π έχει 600 κατοίκους περισσότερους από το χωριό K.
   (β) Το χωριό Λ έχει τα $\frac{4}{5}$ των κατοίκων του χωριού Π.
   (γ) Πόσοι είναι οι κάτοικοι των χωριών K, Π και Λ; Να γράψετε την παράσταση στην πιο απλή μορφή.

3. Αν ο x είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε:

   (α) *Ο επόμενος φυσικός αριθμός είναι:*
   Α. $x+1$ Β. $x-1$ Γ. $x+2$ Δ. $x-2$

   (β) *Ο προηγούμενος περιττός αριθμός είναι:*
   Α. $x+2$ Β. $x-2$ Γ. $x+1$ Δ. $x-1$

   (γ) *Ο επόμενος άρτιος φυσικός αριθμός είναι:*
   Α. $x-1$ Β. $x+1$ Γ. $x-2$ Δ. $x+2$

   (δ) *Ο προηγούμενος άρτιος φυσικός αριθμός είναι:*
   Α. $x-1$ Β. $x-2$ Γ. $x+1$ Δ. $x+2$

4. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης $3x+4 = 14$.

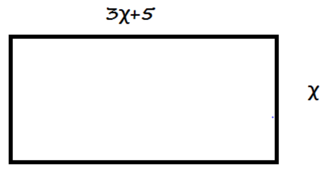
5. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω προτάσεις σε μαθηματικές εκφράσεις:
   (α) *Από έναν αριθμό αφαιρούμε* 6 *και βρίσκουμε* 11.
   (β) *Το τετραπλάσιο ενός αριθμού ίσο με* 20.
   (γ) *Αν σε ένα αριθμό προσθέσουμε* 5, *το άθροισμα γίνεται* 8.
   (δ) *Αν ελαττώσουμε κατά* 7 *έναν αριθμό, βρίσκουμε* 12.
   (ε) *Το εξαπλάσιο ενός αριθμού είναι* 54.
   (στ) *Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2, μας δίνει* 26.

6. Η ηλικία της Μαρίνας είναι τριπλάσια από την ηλικία της Εβελίνας. Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 48. Ποια είναι η ηλικία της καθεμιάς;

7. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς οι οποίοι έχουν άθροισμα 729.

8. Να γράψετε ένα πρόβλημα που να περιγράφει την πιο κάτω εξίσωση:

ΕΞΙΣΩΣΗ: $3\chi + 5 + \chi + 3\chi + 5 + \chi = 42$



9. Ανοίγουμε στην τύχη ένα βιβλίο και το άθροισμα των αριθμών των δύο σελίδων που βλέπουμε είναι 389. Να βρείτε σε ποιες σελίδες ανοίξαμε το βιβλίο.

10. Ένα τετράγωνο έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα τρίγωνο. Αν η βάση του τριγώνου είναι $8\,cm$ και το αντίστοιχο ύψος $4\,cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου, την πλευρά του τετραγώνου και την περίμετρο του τετραγώνου.

11. Ο Απόστολος και δύο φίλοι του πήγαν στο παγοδρόμιο. Η είσοδος στο παγοδρόμιο είναι €5 το άτομο. Ο Απόστολος πήρε μαζί του τα δικά του πατίνια και οι φίλοι του ενοικίασαν πατίνια από το παγοδρόμιο. Αν πλήρωσαν συνολικά €23 για είσοδο και πατίνια, πόσο είναι το ενοίκιο για κάθε ζευγάρι πατίνια;

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α)	$40 + \alpha = 124$	(β)	$4\psi = 120$
(γ)	$40 - x = 12$	(δ)	$\omega : 5 = 22$
(ε)	$2a - 12 = 36$	(στ)	$15 + 2\omega = 37$
(ζ)	$2(3 + x) = 16$	(η)	$4(y + 1) = 4$
(θ)	$(5\beta + 3) : 12 = 4$	(ι)	$44 : (\gamma + 1) = 4$

13. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α)	2^3	(β)	14^0	(γ)	2012^0
(δ)	5^3	(ε)	122^1	(στ)	$(2+4)^2$
(α)	$3^2 + 2^4 : 4^1$	(ζ)	$(12-12)^3$	(η)	$(4+2-1)^0$
(θ)	$2^3 + 3^2 : (2-1)^2$	(ι)	$5^2 - (2^2+1) : 4^0$	(ια)	$5^3 - 2 \cdot 3^2 + 7^0 \cdot 3^3$

14. Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς ως δύναμη με δύο διαφορετικούς τρόπους:

(α) 81 (β) 1000 (γ) 27 (δ) 36 (ε) 144

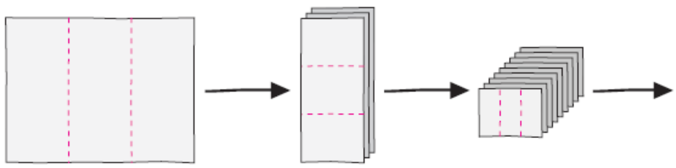
15. Να τοποθετήσετε τα κατάλληλα σύμβολα >, =, <, ώστε να προκύπτουν αληθείς σχέσεις:

(α) 2^2 … 4^1	(β) 12^2 … 5^3
(γ) 123^0 … 1^{12}	(δ) 4^2 … 2^4
(ε) 5^2 … 2^5	(στ) 4^2 … 1234^0

16. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων, αν $x = 2$ και $\psi = 5$:
$A = x + 3\psi$
$B = (\psi - x)^3$
$\Gamma = 2x + 3\psi^0$

17. Αν $x + \psi = 25$ και $\psi + \omega = 15$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
$A = x + 37 + \psi + 5 - (14 + \psi + 12 + \omega)$
$B = x + 2\psi + \omega$

18. Κόβουμε ένα χαρτί σε τρία ίσα μέρη κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών. Ακολούθως κόβουμε με τον ίδιο τρόπο καθένα από τα κομμάτια που προέκυψαν κ.ο.κ. Να γράψετε ένα μοτίβο που να εκφράζει τον αριθμό των κομματιών που προκύπτουν σε κάθε φάση.



19. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δυαδικού συστήματος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 10	(β) 110	(γ) 1010
(δ) 1111	(ε) 10010	(στ) 10001

20. Να μετατρέψετε τους πιο κάτω αριθμούς του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

(α) 7	(β) 18	(γ) 32
(δ) 117	(ε) 181	(στ) 300

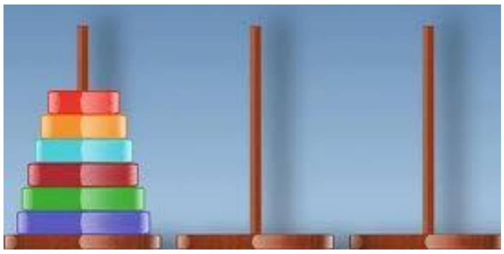
21. Ένας τετραψήφιος αριθμός του δυαδικού συστήματος έχει δυο μηδενικά και δυο μονάδες.
(α) Να βρείτε όλους τους πιθανούς αριθμούς.
(β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς αυτούς στο δεκαδικό σύστημα.

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1.

Σύμφωνα με έναν Ινδικό μύθο, όταν ο Θεός έφτιαξε τον κόσμο, τοποθέτησε σε έναν Ινδουιστικό ναό στην πόλη Μπεναρές της Ινδίας, έναν πύργο από 64 χρυσούς δίσκους. Οι δίσκοι είχαν όλοι διαφορετικό μέγεθος και ήταν τοποθετημένοι σε μια στήλη, από το μεγαλύτερο στο κάτω μέρος, στο μικρότερο στην κορυφή. Ο Θεός, σύμφωνα με το μύθο, κάλεσε τους ιερείς να μεταφέρουν τους δίσκους από το ένα μέρος του ναού σε ένα άλλο. Λόγω της ευθραυστότητας των δίσκων δεν επιτρεπόταν να τοποθετηθεί μεγαλύτερος δίσκος πάνω σε μικρότερο και υπήρχε μόνο ένα μόνο ενδιάμεσο μέρος όπου μπορούσαν να τοποθετηθούν προσωρινά οι δίσκοι. Ο χρόνος που θα χρειάζονταν οι ιερείς να μετακινήσουν τους δίσκους, θα ήταν όσο όρισε ο θεός να ζήσει ο κόσμος στην Γη. Τελειώνοντας οι ιερείς το έργο, ο ναός θα γίνει σκόνη και όλος ο κόσμος θα έχει εξαφανιστεί. Αν παράκουαν ο κόσμος αμέσως θα καταστρεφόταν.

(α) Γιατί ακόμη και σήμερα, μετά από περίπου 4,5 χιλιάδες εκατομμύρια χρόνια από τη δημιουργία της Γης, οι Ινδοί είναι σίγουρα ότι το τέλος του κόσμου είναι μακριά;



(β) Ο πύργος του Hanoi είναι ένα παιχνίδι που εφευρέθηκε το 1883, από το Γάλλο μαθηματικό Edouard Lucas, εμπνευσμένος από τον πιο πάνω μύθο. Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο http://www.14gymnasio.gr/games/Hanoi/Hanoi.htm για να υπολογίσετε ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κινήσεων που χρειάζονται για να μετακινηθούν $2, 3, 4, \dots, x, \dots, 64$ δίσκοι. Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας σε έναν πίνακα.

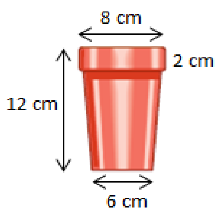
Εάν ο μύθος ήταν αληθινός και αν οι ιερείς ήταν σε θέση να μετακινήσουν τους δίσκους με ρυθμό ένα ανά δευτερόλεπτο, θα χρειάζονταν 18 446 744 073 709 551 615 κινήσεις ή κατά προσέγγιση 580 χιλιάδες εκατομμύρια έτη.

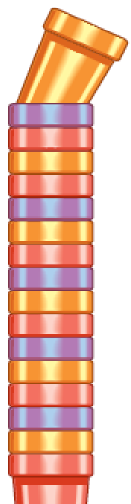
2. Ένας μανάβης έχει στη διάθεσή του μια ζυγαριά δύο δίσκων. Θέλει να αγοράσει τον ελάχιστο αριθμό βαριδίων που απαιτούνται για να μπορεί να ζυγίσει οποιοδήποτε μάζα (ακέραιος αριθμός) από 1 έως και 40 kg. Σκέφτηκε πως θα έκανε οικονομία σε βαρίδια εάν για να ζυγίσει έβαζε και στους δύο δίσκους βαρίδια. Αν ο μανάβης τελικά αγόρασε μόνο 4 βαρίδια, να υπολογίσετε πόσων κιλών είναι το καθένα.

3. Μια ομάδα από 8 κατασκηνωτές, σε μια νυχτερινή πορεία, έφτασαν σε μια ξύλινη γέφυρα. Για να διασχίσουν τη γέφυρα με ασφάλεια, οι κατασκηνωτές πρέπει να έχουν μαζί τους φακό. Να χρησιμοποιήσετε τις πιο κάτω πληροφορίες για να βρείτε πόσες διαδρομές χρειάζεται να γίνουν αν γνωρίζετε ότι η ομάδα διαθέτει ένα φακό μόνο. Να βρείτε το μικρότερο αριθμό διαδρομών που χρειάζονται για μια ομάδα με δύο παιδιά και οποιοδήποτε αριθμό ενηλίκων.

   Η αντοχή της γέφυρας επιτρέπει στους πιο κάτω συνδυασμούς ατόμων να περάσουν:
   - ένας ενήλικας
   - ένα παιδί
   - δύο παιδία

4. Μια εταιρεία κατασκευής πλαστικών θα βγάλει στην παραγωγή της ένα νέο είδος πλαστικών ποτηριών. Το σχήμα των ποτηριών είναι τέτοιο, έτσι ώστε να μπορούν να τοποθετηθούν το ένα μέσα στο άλλο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.





   (α) Να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ποτηριών που μπορούν να τοποθετηθούν σε πακέτο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με εσωτερικές διαστάσεις βάσης $17\ cm\ x\ 17\ cm$ και ύψος $51\ cm$.

   (β) Να προτείνετε τις διαστάσεις ενός κιβωτίου χωρητικότητας 200 ποτηριών.

5. Να μελετήσετε και να ερμηνεύσετε το διπλανό μοτίβο και στη συνέχεια να βρείτε τους επόμενους όρους του.

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$
$$\vdots$$

6. Να ερμηνεύσετε την πιο πάνω διαδικασία.

   Σκέψου έναν αριθμό.

- *Πολλαπλασίασε τον αριθμό που σκέφτηκες με το 2.*
- *Πρόσθεσε στο αποτέλεσμα που βρήκες το 10.*
- *Διαίρεσε τον αριθμό που βρήκες με το 2.*
- *Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες στην αρχή.*
- *Αφαίρεσε από το αποτέλεσμα 1.*
- *Αντιστοίχισε τον αριθμό που βρήκες με το αντίστοιχο γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου.*
- *Σκέψου μια ευρωπαϊκή χώρα που να ξεκινά από αυτό το*  *γράμμα.*

   Ποια χώρα έχεις σκεφτεί;

7. Να εξετάσετε πώς ορίζονται αριθμητικά συστήματα με άλλη βάση και να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:
   (α) Ο αριθμός 192 είναι γραμμένος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Σε ποιο σύστημα αρίθμησης γράφεται ως 3000;
   (β) Να μετατρέψετε τους αριθμούς 12, 123, 724, 65 534, από το δεκαδικό, στο δυαδικό και στο οκταδικό σύστημα αρίθμησης.
   (γ) Να εξετάσετε την ορθότητα των πιο κάτω προτάσεων:
      i. $7_{(8)} = 7_{(11)}$
      ii. $30_{(4)} = 30_{(10)}$
   (δ) Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο ψηφίο, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:
      i. $\ldots 36_{(12)} = 1050_{(10)}$ ii. $9_{(\ldots\ldots)} = 9_{(\ldots\ldots)}$

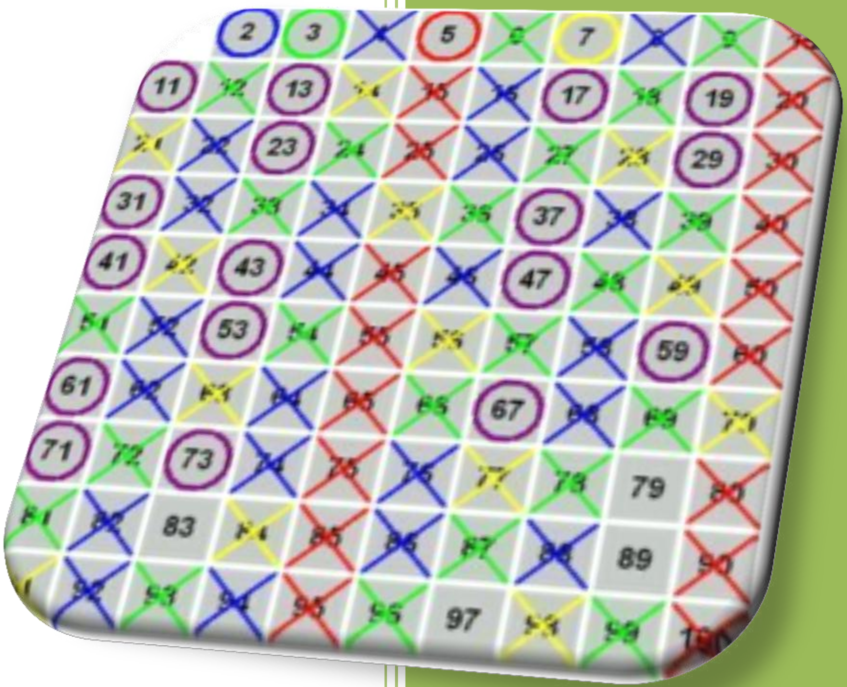
8. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης (χωρίς να τα μετατρέψετε στο δεκαδικό σύστημα):
   (α) $11101101_{(2)} + 1001_{(2)}$
   (β) $10110101_{(2)} - 10110_{(2)}$
   (γ) $1010_{(2)} \cdot 1010_{(2)}$

9. Να μελετήσετε, να παρουσιάσετε και να συγκρίνετε το αριθμητικό σύστημα των Μάγια με το αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων – Σουμερίων.
   (α) Να γράψετε τρεις αριθμούς με τα σύμβολα των Μάγια και των Βαβυλωνίων.
   (β) Να εξηγήσετε τις δυσκολίες που παρουσιάζονταν και οδήγησαν στην ανάγκη καθιέρωσης του δεκαδικού συστήματος.

Εικόνα 11. Βαβυλωνία ...αριθμών

ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Διαιρετότητα



Α΄ Γυμνασίου

Ευκλείδεια Διαίρεση

Εξερεύνηση

- Τι μέρα θα έχουμε μετά από 245 ημέρες από σήμερα και τι μέρα θα έχουμε ύστερα από 400 ημέρες από σήμερα;

Διερεύνηση

- Σε μια κατασκήνωση θα φιλοξενηθούν 336 παιδιά. Οι διοργανωτές της κατασκήνωσης θα χρησιμοποιήσουν σκηνές ενός μόνο είδους και όλες οι σκηνές θα πρέπει να είναι πλήρεις. Υπάρχουν τέσσερα είδη σκηνών σε επαρκείς ποσότητες, των τεσσάρων, των πέντε, των έξι και των οκτώ ατόμων. Ποιο είδος σκηνών μπορούν να χρησιμοποιήσουν;

Μαθαίνω

- Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί τότε υπάρχουν δύο άλλοι αριθμοί $\pi, \upsilon \in \mathbb{N}_0$, έτσι ώστε να ισχύει: $\boldsymbol{\Delta = \delta\pi + \upsilon}$, $\boldsymbol{0 \leq \upsilon < \delta}$.

  Ο αριθμός **Δ** ονομάζεται ***διαιρετέος***, ο **δ** ονομάζεται ***διαιρέτης***, ο αριθμός **π** ονομάζεται ***πηλίκο*** και το **υ** ονομάζεται ***υπόλοιπο*** της διαίρεσης.

  Το υπόλοιπο είναι πάντα αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και μικρότερος του διαιρέτη.

$\boldsymbol{\Delta}$	$\boldsymbol{\delta}$
. . .	$\boldsymbol{\pi}$
$\boldsymbol{\upsilon}$	

$$\boldsymbol{\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \quad \mu\varepsilon \quad 0 \leq \upsilon < \delta}$$

Η διαδικασία εύρεσης των $\boldsymbol{\pi}$ και $\boldsymbol{\upsilon}$ λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση** του $\boldsymbol{\Delta}$ με τον $\boldsymbol{\delta}$.

- Αν $\upsilon = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια διαίρεση**.

$$\boldsymbol{\Delta = \delta \cdot \pi}$$

- Αν α και β φυσικοί αριθμοί, ο αριθμός β ***διαιρεί*** τον αριθμό α, αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός γ, έτσι ώστε να ισχύει η τέλεια διαίρεση,

$$\boldsymbol{\alpha = \beta \cdot \gamma}$$

Τότε:

- ✓ Ο αριθμός α λέγεται **πολλαπλάσιο** του αριθμού β.
- ✓ Ο αριθμός β **διαιρεί (ή διαιρεί ακριβώς)** τον αριθμό α.
- ✓ Ο συμβολισμός $\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha}$ δηλώνει ότι β διαιρεί τον α.
- ✓ Το μηδέν είναι πολλαπλάσιο όλων των φυσικών αριθμών.

- Παρατήρηση:
  - ➢ **Άρτιος** φυσικός αριθμός είναι ένας φυσικός αριθμός που διαιρείται με το 2. Στο σύνολο των άρτιων αριθμών συμπεριλαμβάνεται και το μηδέν**.**

$$\boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \nu} \textbf{ όπου } \boldsymbol{\alpha, \nu \epsilon} \mathbb{N}_0$$

  - ➢ **Περιττός** φυσικός αριθμός είναι ένας φυσικός αριθμός που διαιρούμενος με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1.

$$\boldsymbol{\alpha = 2 \cdot \nu + 1} \textbf{ όπου } \boldsymbol{\alpha, \nu \epsilon} \mathbb{N}_0$$

Παραδείγματα

1. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης:

   (α) του 18 με τον 6 (β) του 124 με τον 8

   Λύση:

(α)	$\begin{array}{r\|l} 18 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$	$\Delta = 18, \delta = 6$ $18 = 6 \cdot 3 + 0$	πηλίκο $\pi = 3$ υπόλοιπο $\upsilon = 0$
(β)	$\begin{array}{r\|l} 124 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{8} & 15 \\ \underline{44} & \\ 4 & \end{array}$	$\Delta = 124, \delta = 8$ $124 = 8 \cdot 15 + 4$	πηλίκο $\pi = 15$ υπόλοιπο $\upsilon = 4$

2. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν διαδικασία Ευκλείδειας διαίρεσης;

   (α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$ (β) $1345 = 59 \cdot 19 + 224$

   (γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$

   Λύση:

   (α) Το 8 είναι μικρότερο από το 28 και μεγαλύτερο από το 4. Άρα, μπορεί να είναι υπόλοιπο (υ) της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη (δ) το 28 και πηλίκο (π) το 4.

   (β) Το 224 είναι μεγαλύτερο από το 59 και από το 19. Άρα, δεν μπορεί να είναι υπόλοιπο Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη το 59 ή το 19.

   (γ) Το 6 είναι μικρότερο και από το 8 και από το 46. Άρα, είναι υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη είτε το 46 είτε το 8.

3. Να βρείτε ποιος είναι ο αριθμός που όταν διαιρεθεί με το 14, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 9.

   Λύση:

   Στην ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ έχουμε $\delta = 14$, $\pi = 7$ και $\upsilon = 9$, άρα $\Delta = 14 \cdot 7 + 9$ άρα ο αριθμός είναι ο 107

4. Να βρείτε ποια είναι τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης ενός αριθμού με το 7.

   Λύση:

   Θα πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης να είναι μικρότερο του διαιρέτη και μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, δηλαδή έχουμε ότι $0 \leq \upsilon < 7$. Άρα το υπόλοιπο υ μπορεί να είναι $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

5. Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι, αν διαιρεθούν με το 4, δίνουν πηλίκο 10, με τη χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης.

   Λύση:

   Γνωρίζουμε ότι $\Delta = \delta\pi + \upsilon \quad \mu\varepsilon \quad 0 \leq \upsilon < \delta$.

   $\delta = 4, \pi = 10$, το υπόλοιπο μπορεί να είναι ίσο με $0, 1, 2, 3$.

   Αν $\upsilon = 0$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 0 = 40$.

   Αν $\upsilon = 1$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 1 = 41$.

   Αν $\upsilon = 2$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 2 = 42$.

   Αν $\upsilon = 3$, τότε έχουμε ότι: $\Delta = 4 \cdot 10 + 3 = 43$.

Δραστηριότητες

1. Να εκφράσετε την ισότητα $13 \cdot 12 = 156$ ως διαδικασία Ευκλείδειας διαίρεσης. Ποιος μπορεί να είναι ο διαιρέτης και ποιο το πηλίκο.
2. Σε μια Ευκλείδεια διαίρεση ο διαιρετέος είναι ο αριθμός 958 και ο διαιρέτης ο αριθμός 45. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο.

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα, όπου Δ είναι ο διαιρετέος, δ ο διαιρέτης, π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο.

Δ	375		1514
δ	18	92	
π		8	15
υ		3	14

4. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

i. $6|30$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ii. $5|24$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iii. $20|5$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iv. $8|64$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

5. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

i. Το 60 είναι πολλαπλάσιο του 5 **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

ii. Το 8 είναι πολλαπλάσιο του 40 **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iii. Το 21 είναι πολλαπλάσιο του 21 **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

iv. Το 0 είναι πολλαπλάσιο του 3 **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

6. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος:

(α) όταν διαιρεθεί με το 13, δίνει πηλίκο 15 και υπόλοιπο 0,
(β) όταν διαιρεθεί με το 7, δίνει πηλίκο 6 και υπόλοιπο 0,
(γ) όταν διαιρεθεί με το 9, δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 3,

7. Σε μια ευκλείδεια διαίρεση το πηλίκο είναι 113, ο διαιρέτης είναι το 594 και το υπόλοιπο είναι το 312. Να βρείτε το διαιρετέο.

8. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς που, όταν διαιρεθούν με το 3, δίνουν πηλίκο εξαπλάσιο από το υπόλοιπο.

9. Ένα σχολείο επέλεξε 76 μαθητές της Α' τάξης για να παρακολουθήσουν μια θεατρική παράσταση. Ένας καθηγητής μπορεί να συνοδεύει μέχρι και 20 μαθητές. Να βρείτε πόσοι καθηγητές θα συνοδεύσουν τα παιδιά.

10. Ένα εργοστάσιο παραγωγής υφασμάτων έχει 27 μηχανές στη γραμμή παραγωγής. Η κάθε μηχανή παράγει 250 μέτρα ύφασμα την ημέρα. Να βρείτε σε πόσους μήνες το εργοστάσιο θα παράγει $810\ 000$ μέτρα υφάσματος. (1 μήνας $=30$ ημέρες)

11. Ένας πατατοπαραγωγός έχει στην αποθήκη του 250 κιλά πατάτες. Θέλει να τις συσκευάσει σε σακιά που το καθένα χωράει 12 κιλά.
    i. Πόσα σακιά θα γεμίσει;
    ii. Πόσα κιλά πατάτες θα περισσέψουν;
    iii. Πόσα σακιά θα χρειαστεί, για να συσκευάσει όλες τις πατάτες που έχει στην αποθήκη;

Πρώτοι και Σύνθετοι αριθμοί

Εξερεύνηση (1)

Να βάλετε σε κύκλο τα πολλαπλάσια του 2 στη συνέχεια του 3, του 4, μέχρι και του 20.

Τι παρατηρείται;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Εξερεύνηση (2)

Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «Κόσκινο του Ερατοσθένη» στην ιστοσελίδα http://www.vex.net/~trebla/numbertheory/eratosthenes.html. Να εμφανίσετε στον πίνακα τους αριθμούς από το 1 μέχρι και το 100.

- ✓ Να επιλέξετε διαδοχικά τους αριθμούς που είναι με έντονο χρώμα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.
- ✓ Τι παρατηρείτε για τους αριθμούς που παραμένουν με έντονο χρώμα κάθε φορά και αυτούς που φαίνονται με πιο ανοικτό χρώμα;
- ✓ Να επαναλάβετε την διαδικασία, αν στον πίνακα εμφανίζονται οι αριθμοί από το 1 μέχρι και το 200, 300, κτλ.

Διερεύνηση

Σε ένα δοχείο τοποθετούνται πέντε κόκκινες, πέντε κίτρινες, πέντε μπλε και πέντε πράσινες μπάλες. Στην κάθε μπάλα αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος αριθμός, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

$Κόκκινη = 2$
$Κίτρινη = 3$
$Μπλε = 5$
$Πράσινη = 7$

Ένας μαθητής παίρνει στην τύχη μια μπάλα από το δοχείο και καταγράφει τον αριθμό στο τετράδιο του. Επαναλαμβάνει την πιο πάνω διαδικασία το πολύ τέσσερις φορές. Στη συνέχεια υπολογίζει το γινόμενο των αριθμών που έγραψε στο τετράδιο του.

✓ Να βρείτε ποιες μπάλες πήρε από το κουτί, να αναφέρετε το χρώμα και τον αριθμό που έγραφε στην κάθε μπάλα, αν το γινόμενο είναι ίσο με:

(α) 28 (β) 210 (γ) 90

Μαθαίνω

- Κάθε φυσικός αριθμός έχει διαιρέτες το 1 και τον εαυτό του.
- Ένας φυσικός αριθμός διάφορος από το 1 που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται **πρώτος** αριθμός, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
  π.χ. οι αριθμοί $2, 5, 11$ ... είναι πρώτοι, ενώ οι αριθμοί $4, 9, 32, \ldots$ είναι σύνθετοι.
- Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί (*Ευκλείδης*).
- Κάθε φυσικός αριθμός διάφορος από το 1 μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών (*Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής*).
  π.χ. $12 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot (2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3$

Παραδείγματα

1. Να γράψετε τους διαιρέτες των αριθμών $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ και 10. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι;

Λύση:

Αριθμός	Διαιρέτες
1	1
2	$1, 2$
3	$1, 3$
4	$1, 2, 4$
5	$1, 5$
6	$1, 2, 3, 6$
7	$1, 7$
8	$1, 2, 4, 8$
9	$1, 3, 9$
10	$1, 2, 5, 10$

Οι αριθμοί $2, 3, 5$ και 7 είναι πρώτοι διότι διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους.

2. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς $18, 45$ και 79 είναι πρώτοι.

Λύση:

Το 18 έχει παράγοντες τους αριθμούς $1, 2, 3, 6, 9$ και 18. Επομένως, είναι σύνθετος.
Το 45 έχει παράγοντες τους αριθμούς $1, 3, 5, 9, 15$ και 45. Επομένως, είναι σύνθετος.
Το 79 έχει παράγοντες μόνο τους αριθμούς 1 και 79, δηλαδή είναι πρώτος.

3. Να αναλύσετε τον αριθμό 90 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση:
Για να αναλύσουμε ένα αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, βρίσκουμε διαδοχικά τους πρώτους αριθμούς που είναι διαιρέτες του και εκτελούμε διαδοχικά διαιρέσεις.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{ή} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Δραστηριότητες

1. Να αναλύσετε τους αριθμούς $113, 128, 139, 155$ και 189 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ποιοι από αυτούς είναι πρώτοι;
2. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός 99 είναι σύνθετος.
3. Να βρείτε το μικρότερο αριθμό που έχει πρώτους παράγοντες τους αριθμούς 2, 3 και 7.
4. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς που το γινόμενο τους είναι 1000 και δεν είναι πολλαπλάσια του 10.
5. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.
   i. Δεν υπάρχει άρτιος αριθμός που να είναι πρώτος. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
   ii. Όλοι οι περιττοί αριθμοί είναι πρώτοι. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
   iii. Ο αριθμός 21 είναι σύνθετος. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
   iv. Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών είναι πάντα άρτιος. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
6. *Δίδυμοι πρώτοι* λέγονται δύο πρώτοι αριθμοί που είναι διαδοχικοί περιττοί αριθμοί. Για παράδειγμα οι 3 και 5, οι 5 και 7 και οι 11 και 13. Να βρείτε όλους τους δίδυμους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 100.
7. Να βρείτε δυο πρώτους αριθμούς που το άθροισμά τους να είναι περιττός αριθμός.
8. Ο Goldbach $(1690 - 1724)$ διετύπωσε τον ισχυρισμό ότι κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο πρώτων αριθμών. Να δείξετε τον ισχυρισμό αυτό για τους άρτιους αριθμούς από το 32 μέχρι το 62.

Ιδιότητες των Διαιρετών

Διερεύνηση (1)

- Η καθηγήτρια της μουσικής ζήτησε από τους μαθητές της να την βοηθήσουν να υπολογίσει πόσες θήκες θα χρειαστεί για να τοποθετήσει τους 1144 ψηφιακούς δίσκους που έχει στην αίθουσα μουσικής σε θήκες των 11 δίσκων. Τους είπε ότι μίλησε με τον καθηγητή των μαθηματικών τους και της ζήτησε να τους βάλει ένα περιορισμό, να μην χρησιμοποιήσουν διαίρεση. Δύο μαθητές βρήκαν την ορθή απάντηση, ότι θα χρειαστούν 104 θήκες. Πιο κάτω φαίνεται ο τρόπος που εργάστηκαν:

Μαθητής Α: $1144 = 1100 + 44$
$1144 = 11 \cdot 100 + 11 \cdot 4$
$1144 = 11(100 + 4)$
$1144 = 11 \cdot 104$

Μαθητής Β: $1144 = 1210 - 66$
$1144 = 121 \cdot 10 - 11 \cdot 6$
$1144 = 11^2 \cdot 10 - 11 \cdot 6$
$1144 = 11 \cdot (11 \cdot 10 - 6)$
$1144 = 11 \cdot (110 - 6)$
$1144 = 11 \cdot 104$

✓ Να σχολιάσετε τον τρόπο που εργάστηκε ο κάθε μαθητής.

Διερεύνηση (2)

- Συμπληρώσαμε τους πιο κάτω πίνακες, χρησιμοποιώντας την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $\Delta = \delta\pi + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < \delta, \quad \pi, \upsilon \in \mathbb{N}_0,\ \Delta, \delta \in \mathbb{N}$.

Δ	δ	π	υ
36	15	2	6
72	30	2	12
108	45	2	18
144	60	2	24
…	…	…	…

Πίνακας 1

Δ	Δ	π	υ
144	60	2	24
72	30	2	12
48	20	2	8
36	15	2	6
12	5	2	2

Πίνακας 2

✓ Τι παρατηρείτε;

Μαθαίνω

Ιδιότητα 1:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο φυσικό, θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

Δηλαδή, αν $\alpha \mid \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha \mid \kappa \cdot \beta$ για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού $\kappa \in \mathbb{N}_0$.

π.χ.
$3|12$ τότε $3|(4 \cdot 12)$, δηλαδή το 3 διαιρεί το 48 που είναι πολλαπλάσιο του 12.

Ιδιότητα 2:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους, θα διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά τους.

Δηλαδή, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, $\beta > \gamma$, τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$ και $\alpha|(\beta-\gamma)$

π.χ.
$2|14$ και $2|8$ τότε $2|(14+8)$ και $2|(14-8)$ δηλαδή το 2 διαιρεί το 22 και το 6.

Απόδειξη 1ης Ιδιότητας:

Ο α διαιρεί τον β άρα υπάρχει φυσικός αριθμός λ, τέτοιος ώστε $\beta = \lambda\alpha$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με $\kappa \in \mathbb{N}_0$ και έχουμε:
$\kappa \cdot \beta = \kappa \cdot (\lambda\alpha) = (\kappa\lambda) \cdot \alpha$. Άρα $\alpha \mid \kappa \cdot \beta$.

Απόδειξη 2ης Ιδιότητας:

Ο αριθμός α διαιρεί τον β. Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$
Ο αριθμός α διαιρεί τον γ. Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\gamma = \lambda \cdot \alpha$

- Προσθέτουμε τους β και γ και έχουμε,

$\beta + \gamma = \kappa \cdot \alpha + \lambda \cdot \alpha = (\kappa + \lambda) \cdot \alpha$. Άρα ο $\beta + \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του α, δηλαδή ο α διαιρεί τον $\beta + \gamma$, άρα ισχύει ότι $\alpha|(\beta+\gamma)$.

- Αφαιρούμε τον γ από τον β και έχουμε,

$\beta - \gamma = \kappa \cdot \alpha - \lambda \cdot \alpha = (\kappa - \lambda) \cdot \alpha$. Άρα ο $\beta - \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του α, δηλαδή ο α διαιρεί τον $\beta - \gamma$. Άρα ισχύει ότι $\alpha|(\beta-\gamma)$.

Ιδιότητα 3:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί ένα δεύτερο φυσικό αριθμό και ο δεύτερος αριθμός διαιρεί έναν τρίτο, τότε ο πρώτος αριθμός θα διαιρεί και τον τρίτο (*Μεταβατική ιδιότητα*).

Δηλαδή, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.

π.χ.
$5|15$ και $15|60$, τότε $5|60$

Ιδιότητα 4:

- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί ακριβώς το διαιρετέο και το διαιρέτη μιας ατελούς διαίρεσης, θα διαιρεί και το υπόλοιπο της διαίρεσης.

Δηλαδή, αν $\alpha, \Delta, \delta, \pi, \upsilon \in \mathbb{N}$, με $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, έτσι ώστε $\alpha|\Delta$ και $\alpha|\delta$ τότε $\alpha|\upsilon$.

π.χ.
Αν $143 = 52 \cdot 2 + 39, \Delta = 143, \delta = 52, \pi = 2, \upsilon = 39$, $13|143$, $13|52$ τότε $13|39$

Απόδειξη 3ης Ιδιότητας:

Αφού $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε υπάρχουν δύο φυσικοί αριθμοί κ, λ , τέτοιοι ώστε $\beta = \kappa \cdot \alpha$ και $\gamma = \lambda \cdot \beta$.
Αυτό σημαίνει όμως ότι $\gamma = \lambda \cdot \beta = \lambda \cdot (\kappa \cdot \alpha) = (\lambda\kappa) \cdot \alpha$.
Άρα, $\alpha|\gamma$, αφού $\kappa \cdot \lambda$ είναι φυσικός αριθμός.

Απόδειξη 4ης Ιδιότητας:

Αν $\alpha|\Delta$ και $\alpha|\delta$, τότε υπάρχουν αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\Delta = \kappa \cdot \alpha$ και $\delta = \lambda \cdot \alpha$.
Από την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ έχουμε ότι
$\kappa \cdot \alpha = \lambda \cdot \alpha \cdot \pi + \upsilon$ που μας δίνει $\upsilon = \alpha(\kappa - \lambda\pi)$, δηλαδή το υ είναι πολλαπλάσιο του α, οπότε $\alpha|\upsilon$.

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 8 διαιρεί τον αριθμό $400\ 000$.

   Λύση:

   Ο αριθμός $400\ 000$ είναι πολλαπλάσιο του 40 αφού

   $$400\ 000 = 40 \cdot 10\ 000$$

   Ο αριθμός 8 διαιρεί το 40, άρα διαιρεί και το πολλαπλάσιο του $400\ 000$.

2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 24 διαιρεί τον αριθμό 2472.

   Λύση:

   $2472 = 2400 + 72$
   $2472 = 24 \cdot 100 + 24 \cdot 3$
   $2472 = 24(100 + 3)$

   Ο αριθμός 2472 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αριθμών που είναι πολλαπλάσια του 24 $(2400 + 72)$. Άρα το 24 διαιρεί και το άθροισμά τους 2472.

Δραστηριότητες

1. Να εξετάσετε ποια από τα πιο κάτω αθροίσματα και διαφορές διαιρούνται με το 23.

   (α) $4600 + 69$ (β) $230\ 000 + 26$
   (γ) $2300 - 69$ (δ) $6900 - 46$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμοί διαιρούνται με το 14.

   (α) 2814 (β) 2818 (γ) $14\ 042$

3. Να αποδείξετε, με αριθμητικό παράδειγμα , ότι οι πιο κάτω προτάσεις δεν ισχύουν για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

   (α) Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$ τότε $(\alpha + \beta) \mid \gamma$ (β) Αν $\alpha \mid \gamma$ και $\beta \mid \gamma$ τότε $\alpha \cdot \beta \mid \gamma$

4. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των διαιρετών για να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 50 με το 14.

5. Να βρείτε τον πρώτο κατά σειρά πρώτο αριθμό που είναι μεγαλύτερος του 200.

6. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των διαιρετών για να δείξετε ότι ο αριθμός 3745 διαιρείται με το 5.

Κριτήρια Διαιρετότητας

Εξερεύνηση

- Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό ο οποίος έχει ακριβώς πέντε διαιρέτες.
  Να εξηγήσετε πως εργαστήκατε, για να βρείτε την απάντησή σας.

Διερεύνηση

- Ο Μιχάλης, ο Δημήτρης και η Ελευθερία θέλουν να βρούν όλους τους διαιρέτες του 36.
  Ο τρόπος που εργάστηκε ο καθένας φαίνεται παρακάτω:

Μιχάλης

Οι παράγοντες του 36 είναι:

$1, 2, 3, 4, 9, \ldots$

Δημήτρης

$1 \;\textit{και}\; 36$

$2 \;\textit{και}\; 18$

$3 \;\textit{και}\; 12$

.

.

.

Ελευθερία

$1 \quad 2 \quad \ldots \quad 18 \quad 36$

✓ Να συνεχίσετε με βάση τον τρόπο που εργάστηκε ο Μιχάλης για να βρείτε και άλλους διαιρέτες. Πώς θα καταλάβετε ότι έχετε βρει όλους τους διαιρέτες του 36;

✓ Να συνεχίσετε την εργασία της Ελευθερίας, για να βρείτε όλους τους διαιρέτες του 36.

✓ Να επιλέξετε έναν από τους πιο πάνω τρόπους, για να βρείτε τους διαιρέτες του 96.

Μαθαίνω

Ονομάζουμε **κριτήρια διαιρετότητας** τους κανόνες με τους οποίους μπορούμε να διακρίνουμε αν ένας αριθμός α διαιρεί τον αριθμό β, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, χωρίς να εκτελέσουμε την διαίρεση του β με το α.

Σημείωση:

Για να διαπιστώσουμε αν ο αριθμός α διαιρεί τον αριθμό β, μπορούμε να γράψουμε τον β ως άθροισμα δύο προσθετέων, ώστε ο ένας προσθετέος να είναι πολλαπλάσιο του α ($\pi o\lambda.\alpha$). Ο αριθμός β μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\beta = \pi o\lambda.\alpha + \kappa \, , \kappa \in \mathbb{N}$$

Για να διαιρείται ο β με τον α, θα πρέπει να διαιρείται και ο κ με τον α.

Κριτήρια διαιρετότητας:

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το $\mathbf{10}$**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το $\mathbf{10}$ αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του είναι **μηδέν** $(\mathbf{0})$.

π.χ.

$23\,450 = 2345 \cdot 10$
$= \pi o\lambda.10$ Άρα το 23450 διαιρείται με το 10.

$2321 = 232 \cdot 10 + 1$
$= \pi o\lambda.10 + 1$ Άρα το 2321 δεν διαιρείται με το 10.

Σημείωση: Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το $\mathbf{100}$ αν και μόνο αν τα τελευταία δύο ψηφία του είναι μηδενικά (00), με το $\mathbf{1000}$ αν και μόνο αν τα τελευταία τρία ψηφία του είναι μηδενικά (000) κλπ..

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το $\mathbf{2}$**

Ένας αριθμός διαιρείται με το 2 αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του διαιρείται με το 2.

π.χ.

$58\,468 = 10 \cdot 5846 + 8$
$= \pi o\lambda.2 + 8$

Ο αριθμός 8 διαιρείται με το 2 άρα ο αριθμός 58 468 διαιρείται με το 2.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το $\mathbf{5}$**

Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του διαιρείται με το 5.

π.χ.

$$\begin{aligned} 68\,465 &= 6846 \cdot 10 + 5 \\ &= \pi o\lambda.5 + 5 \end{aligned}$$

Ο αριθμός 5 διαιρείται με το 5 άρα ο αριθμός 68 465 διαιρείται με το 5.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το $\mathbf{4}$**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το $\mathbf{4}$, αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το $\mathbf{4}$.

π.χ.

$$\begin{aligned} 5416 &= 54 \cdot 100 + 16 \\ &= \pi o\lambda.4 + 16 \end{aligned}$$

Ο αριθμός 16 διαιρείται με το 4 άρα ο αριθμός 5416 διαιρείται με το 4.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το $\mathbf{25}$**

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το $\mathbf{25}$, αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται με το $\mathbf{25}$.

π.χ.

$$\begin{aligned} 98\,475 &= 984 \cdot 100 + 75 \\ &= \pi o\lambda.25 + 75 \end{aligned}$$

Ο αριθμός 75 διαιρείται με το 25 άρα ο αριθμός 98 475 διαιρείται με το 25.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το $\mathbf{3}$**

Ένας φυσικός αριθμός θα διαιρείται με το $\mathbf{3}$, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το $\mathbf{3}$.

π.χ.

$$\begin{aligned} \mathbf{474} &= \mathbf{4} \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \\ &= \mathbf{4} \cdot 100 + \mathbf{7} \cdot 10 + \mathbf{4} \\ &= \mathbf{4} \cdot (99 + 1) + \mathbf{7} \cdot (9 + 1) + \mathbf{4} \\ &= \mathbf{4} \cdot 99 + \mathbf{4} + \mathbf{7} \cdot 9 + \mathbf{7} + \mathbf{4} \\ &= \mathbf{4} \cdot 99 + \mathbf{7} \cdot 9 + (\mathbf{4} + \mathbf{7} + \mathbf{4}) \\ &= \pi o\lambda.3 + (\mathbf{4} + \mathbf{7} + \mathbf{4}) \end{aligned}$$

Ο αριθμός $\mathbf{4} + \mathbf{7} + \mathbf{4} = \mathbf{15}$ διαιρείται με το 3 άρα ο αριθμός $\mathbf{474}$ διαιρείται με το 3.

- **Κριτήριο διαιρετότητας με το 9**

Ένας φυσικός αριθμός θα διαιρείται με το $\mathbf{9}$, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το $\mathbf{9}$.

π.χ.

$$\mathbf{98\,478} = \mathbf{9}\cdot 10^4 + \mathbf{8}\cdot 10^3 + \mathbf{4}\cdot 10^2 + \mathbf{7}\cdot 10^1 + \mathbf{8}$$
$$= \mathbf{9}\cdot 10000 + \mathbf{8}\cdot 1000 + \mathbf{4}\cdot 100 + \mathbf{7}\cdot 10 + \mathbf{8}$$
$$= \mathbf{9}\cdot (9\,999+1) + \mathbf{8}\cdot (999+1) + \mathbf{4}\cdot (99+1) + \mathbf{7}\cdot (9+1) + \mathbf{8}$$
$$= \mathbf{9}\cdot 9\,999 + \mathbf{9} + \mathbf{8}\cdot 999 + \mathbf{8} + \mathbf{4}\cdot 99 + \mathbf{4} + \mathbf{7}\cdot 9 + \mathbf{7} + \mathbf{8}$$
$$= \mathbf{9}\cdot 9\,999 + \mathbf{8}\cdot 999 + \mathbf{4}\cdot 99 + \mathbf{7}\cdot 9 + (\mathbf{9}+\mathbf{8}+\mathbf{4}+\mathbf{7}+\mathbf{8})$$
$$= \pi o\lambda.9 + (\mathbf{9}+\mathbf{8}+\mathbf{4}+\mathbf{7}+\mathbf{8})$$

Ο αριθμός $\mathbf{9+8+4+7+8=36}$ διαιρείται με το 9 άρα ο αριθμός $\mathbf{98\,478}$ διαιρείται με το 9.

Ο αριθμός $\mathbf{9+8+4+7+8=36}$ είναι πολλαπλάσιο του 3 άρα ο αριθμός $\mathbf{98\,478}$ διαιρείται με το 3.

Παραδείγματα

1. Δίνονται οι αριθμοί $325, 2310, 6302$ και 1548, να βρείτε αυτούς που διαιρούνται με:

(α)	το 2	(β)	το 3	(γ)	το 4
(δ)	το 5	(ε)	το 25	(στ)	το 2 και το 9

Λύση:

(α) Το τελευταίο ψηφίο των αριθμών $2310, 6302$ και 1548 είναι $0, 2, 6$ αντίστοιχα και διαιρείται με το 2. Άρα και οι αριθμοί διαιρούνται με το 2.

(β) Προσθέτουμε τα ψηφία των αριθμών:

για το 325 έχουμε $3+2+5=10$

για το2310 έχουμε $2+3+1+0=6$

για το 6302 έχουμε $6+3+0+2=11$

για το 1548 έχουμε $1+5+4+8=18$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 2310 και 1548 έχουν άθροισμα ψηφίων που διαιρείται με το 3, άρα διαιρούνται με το 3.

(γ) Ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού $15\mathbf{48}$ διαιρείται με το 4, άρα ο αριθμός 1548 διαιρείται με το 4.
(δ) Το τελευταίο ψηφίο των αριθμών 325 και 2310 είναι $5, 0$ αντίστοιχα και διαιρείται με το 5. Άρα και οι αριθμοί 325 και 2310 διαιρούνται με το 5.
(ε) Ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού $3\mathbf{25}$ διαιρείται με το 25, άρα ο αριθμός 325 διαιρείται με το 25.
(στ) Ο αριθμός 1548 έχει ως τελευταίο ψηφίο το 8, άρα διαιρείται με το 2 και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 18, άρα διαιρείται με το 9, άρα διαιρείται με το 2 και το 9.

2. Να συμπληρώσετε τα τετραγωνάκια $\boxed{}\,75\,\boxed{}$, ώστε να προκύψει τετραψήφιος αριθμός που να διαιρείται με το 3 και το 4:

   Λύση:

   Για να διαιρείται ο αριθμός $\boxed{}\,75\,\boxed{}$ με το 4 θα πρέπει ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία του να διαιρείται με το 4. Έτσι στο τελευταίο τετραγωνάκι (μονάδες) μπορούμε να έχουμε τα ψηφία 2 ή 6.

   Αν τοποθετήσουμε το 2 ως τελευταίο ψηφίο και προσθέσουμε τα τρία γνωστά ψηφία, θα έχουμε άθροισμα $7 + 5 + 2 = 14$. Στη θέση του ψηφίου των χιλιάδων θα τοποθετήσουμε ένα ψηφίο, έτσι ώστε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού να διαιρείται με το 3. Τα ψηφία που μπορούν να τοποθετηθούν είναι το 1 και το 4 $(14 + 1 = 15 , 14 + 4 = 18)$. Άρα, οι αριθμοί θα είναι οι $\boxed{1}\,75\,\boxed{2}$ και $\boxed{4}\,75\,\boxed{2}$.

   Αν τοποθετήσουμε το 6 ως τελευταίο ψηφίο και προσθέσουμε τα τρία γνωστά ψηφία, $7 + 5 + 6 = 18$. Στη θέση του ψηφίου των χιλιάδων θα τοποθετήσουμε ένα ψηφίο, έτσι ώστε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού να διαιρείται με το 3. Τα ψηφία που μπορούν να τοποθετηθούν είναι το 3, το 6 και το 9 $(18 + 3 = 21 , 18 + 6 = 24, 18 + 9 = 27)$. Άρα, οι αριθμοί θα είναι οι $\boxed{3}\,75\,\boxed{6}$, $\boxed{6}\,75\,\boxed{6}$ και $\boxed{9}\,75\,\boxed{6}$.

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

   i. Το τριπλάσιο ενός αριθμού είναι πρώτος αριθμός. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

   ii. Ένας αριθμός που διαιρείται με το 9 διαιρείται και με το 3. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

   iii. Δύο περιττοί αριθμοί είναι πάντοτε πρώτοι μεταξύ τους. **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

2. Δίνονται οι αριθμοί $765, 1520, 4404$ και 3850. Να βρείτε αυτούς που διαιρούνται με:

(α) το 2	(β) το 3	(γ) το 4
(δ) το 5	(ε) το 25	(στ) το 9

3. Δίνεται ο αριθμός $12\square 6$ ο οποίος διαιρείται με το 4 και το 9.
   (α) Να συμπληρώσετε το $\square$ με το ψηφίο που λείπει.
   (β) Να αναλύσετε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να τον γράψετε ως τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.

4. Η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει την μορφή $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \alpha$, όπου το α είναι πρώτος αριθμός. Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός αυτός διαιρείται με το:
   (α) 12 (β) 15 (γ) 21

5. Να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα με τα κατάλληλα ψηφία, ώστε ο αριθμός:
   (α) $43\square$ να διαιρείται με το 3 και το 5,
   (β) $9\square 3$ να διαιρείται με το 9,
   (γ) $837\square$ να διαιρείται με το 5 και το 9,
   (δ) $7633\square$ να διαιρείται με το 2 και 3,
   (ε) $38\square 7\square$ να διαιρείται με το 9 και το 25.

6. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 787 είναι πρώτος ή σύνθετος.

7. Χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, να εξετάσετε αν η διαίρεση του35685 με το 45 είναι τέλεια διαίρεση.

8. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς που να έχουν γινόμενο 48 και το μικρότερο δυνατό άθροισμα.

9. Να βρείτε τρεις φυσικούς αριθμούς που να έχουν άθροισμα 13, γινόμενο 36 και ο μικρότερος να είναι περιττός αριθμός.

10. Ένας αριθμός διαιρείται με το 9. Αν αλλάξουμε την θέση των ψηφίων του, ο αριθμός που προκύπτει θα διαιρείται με το 9; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) και Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) Φυσικών Αριθμών

Διερεύνηση (1)

Μια μουσική μπάντα έχει 81 άτομα που παίζουν τρομπόνι, 54 που παίζουν σαξόφωνο, 36 φλάουτο και 27 τραμ. Σε μια εκδήλωση θα παρελάσει η μπάντα σε διάταξη. Κάθε σειρά θα έχει τον ίδιο αριθμό ατόμων και μόνο ένα είδος οργάνου.

- ✓ Ποιος θα είναι ο μέγιστος αριθμός ατόμων σε κάθε σειρά;
- ✓ Αν προστεθούν ακόμη 8 άτομα που παίζουν τούμπα, μπορούν να παρελάσουν μαζί με τους υπόλοιπους ώστε να είναι συμπληρωμένες όλες οι σειρές της μπάντας;
- ✓ Αν δεν προστεθούν τα 8 άτομα που παίζουν τούμπα αλλά 45 που παίζουν κλαρίνο, πώς θα επηρεαστεί η διάταξη της μπάντας;

Διερεύνηση (2)

Δύο εργάτες ενός συνεργείου τοποθέτησης πλαστικού πατώματος, εργάζονται για να καλύψουν ένα ορθογώνιο διάδρομο του οποίου το μήκος δεν υπερβαίνει τα τρία μέτρα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο ένας ξεκινά από την μια άκρη του διαδρόμου και ο άλλος από την άλλη με στόχο να συναντηθούν. Τα πλακάκια είναι σχήματος τετραγώνου με μήκος πλευράς $40\ cm$ και $48\ cm$ αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος του διαδρόμου και τον αριθμό από πλακάκια κάθε είδους που θα τοποθετηθούν και από τους δύο εργάτες όταν θα συναντηθούν, αν γνωρίζουμε ότι τα πλακάκια που έχουν στην διάθεση τους εφαρμόζουν ακριβώς.

Μαθαίνω

- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών ονομάζεται ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών.

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο ή περισσοτέρων φυσικών αριθμών ονομάζεται το μικρότερο, μη μηδενικό, κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών.

- Για να βρούμε το ΕΚΠ ή ΜΚΔ δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων,
  - ο **ΜΚΔ** είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του,
  - ο **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών πρώτων παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

- Δύο φυσικοί αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** (ή σχετικά πρώτοι), αν ο ΜΚΔ τους είναι το 1.

Παραδείγματα

1. Να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών $36, 48$ και 60.

Λύση:
Αναλύουμε τους αριθμούς $36, 48$ και 60 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

36	2	48	2	60	2
18	2	24	2	30	2
9	3	12	2	15	3
3	3	6	2	5	5
1		3	3	1	
		1			

$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$ΜΚΔ\ (36, 48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$,
$ΕΚΠ[36, 48, 60] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720.$

2. Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 4 χρόνια ενώ η εταιρείες Β και Γ κάθε 6 και 8 χρόνια αντίστοιχα. Αν το 2011 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;

   Λύση:

   Ψάχνουμε να βρούμε το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια του 4 του 6 και του 8.
   Αναλύουμε το 4, το 6 και το 8 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκουμε το ΕΚΠ τους:

   $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

   $6 = 2 \cdot 3$

   $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

   $ΕΚΠ(4, 6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Δηλαδή κάθε 24 χρόνια βγάζουν και οι τρεις εταιρείες, την ίδια χρονιά νέο μοντέλο.

   Το 2011, έχουν βγάλει και οι τρείς εταιρείες νέο μοντέλο, άρα αυτό θα ξανασυμβεί το έτος: $2011 + 24 = 2035$.

Δραστηριότητες

1. Τρεις αθλητές στίβου, ο Γιάννης, ο Γιώργος και ο Κώστας χρησιμοποιούν τον στίβο του Δημοτικού σταδίου τις πόλης τους για τις προπονήσεις τους. Ο Γιάννης κάνει το γύρο του στίβου σε 3 λεπτά, ο Γιώργος σε 6 λεπτά και ο Κώστας σε 4 λεπτά. Αν ξεκινήσουν και οι τρεις ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο, μετά από πόσα λεπτά θα βρεθούν στο ίδιο σημείο και πόσους γύρους θα έχει κάνει ο καθένας;

2. Να βρείτε το $ΜΚΔ$ και το $ΕΚΠ$ των αριθμών $32, 48$ και 80.

3. Δίνονται οι αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει ότι το $ΕΚΠ[x, y] = 24$ και ο $ΜΚΔ(x, y) = 6$. Αν $y = 6$, να βρείτε το x.

4. Να βρείτε πόσα το πολύ όμοια δέματα μπορούμε να κάνουμε με 108 τετράδια, 18 βιβλία και 54 μολύβια. Πόσα τετράδια, βιβλία και μολύβια θα περιέχει το κάθε δέμα;

5. Να βρείτε το φυσικό αριθμό α, για τον οποίο ισχύει ότι το $ΕΚΠ[4, \alpha] = 52$.

6. Ποια από τα παρακάτω ζευγάρια φυσικών αριθμών δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους;

   i. 16 και 25 ii. 26 και 35 iii. 36 και 45 iv. 46 και 55

7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί 1000 και 1323 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

8. Κάθε φυσικός αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του (γνήσιοι είναι όλοι οι διαιρέτες ενός αριθμού εκτός από τον εαυτό του) λέγεται **τέλειος αριθμός**. Από την εποχή του Πυθαγόρα (~500 π.Χ.), που πρώτος διατύπωσε τους τέλειους αριθμούς, μόνο 38 τέλειοι αριθμοί έχουν βρεθεί.

   (α) Να βρείτε τον επόμενο τέλειο αριθμό μετά το 6.

   (β) Μπορεί ένας τέλειος αριθμός να είναι πρώτος;

9. Σε ένα Λούνα Παρκ είναι εγκατεστημένοι δύο περιστρεφόμενοι τροχοί, ένας μεγάλος και ένας μικρός. Ο μεγαλύτερος τροχός κάνει μια πλήρη στροφή κάθε 50 δευτερόλεπτα και ο μικρότερος κάθε 30 δευτερόλεπτα. Αν οι δύο τροχοί ξεκινούν ταυτόχρονα, να βρείτε ύστερα από πόση ώρα θα είναι και οι δύο στην αφετηρία. Πόσες περιστροφές θα κάνει ο κάθε τροχός;

10. Να αναλύσετε τους αριθμούς $2520, 2940, 3780$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των αριθμών.

11. Μια καφετέρια έχει δύο φωτεινές πινακίδες. Η μια αναβοσβήνει κάθε 9 δευτερόλεπτα και η άλλη κάθε 15 δευτερόλεπτα. Αν οι δύο πινακίδες ανάψουν ταυτόχρονα, ύστερα από πόση ώρα θα ανάψουν ξανά ταυτόχρονα;

12. Να βρείτε όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 100 και έχουν τουλάχιστο ένα 2 και ένα 5 ως πρώτους παράγοντες. Τι παρατηρείται για τους αριθμούς αυτούς;

13. Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό ο οποίος έχει ακριβώς τρεις πρώτους παράγοντες.

   i. 15 ii. 20 iii. 30 iv. 57

14. Σε μια αποθήκη υπάρχει τριψήφιος αριθμός κουτιών που περιέχουν χυμό. Όταν συσκευάζονται τα κουτιά ανά $15, 20$ και 32, δεν περισσεύει κανένα κουτί. Να βρείτε πόσα κουτιά χυμού υπάρχουν στην αποθήκη αν είναι περισσότερα από 500.

15. Να γράψετε τρία ζευγάρια φυσικών αριθμών, που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Να βρείτε το ΕΚΠ για κάθε ζευγάρι αριθμών. Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα.

16. Μια εταιρεία ταξί θα καταρτίσει πρόγραμμα συντήρησης των αυτοκινήτων της, με βάση το τεχνικό εγχειρίδιο των αυτοκινήτων της. Προτείνεται η αλλαγή λαδιού κάθε $6 - 8$ εβδομάδες και έλεγχος και επιδιόρθωση φρένων κάθε $10 - 12$ εβδομάδες. Ο υπεύθυνος του τεχνικού ελέγχου της εταιρείας πρότεινε δύο προγράμματα συντήρησης των αυτοκινήτων τους. Στο πρώτο προτείνει αλλαγή λαδιού κάθε 6 εβδομάδες και έλεγχο και επιδιόρθωση φρένων κάθε 10 εβδομάδες και στο δεύτερο προτείνει αλλαγή λαδιού κάθε 8 εβδομάδες και έλεγχο και επιδιόρθωση φρένων κάθε 12 εβδομάδες. Να υποδείξετε πιο πρόγραμμα συντήρησης θα επιτρέπει η αλλαγή λαδιού και ο έλεγχος και η επιδιόρθωση φρένων να γίνεται ταυτόχρονα, στο πιο σύντομο χρονικό διάστημα.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Σε μια διαίρεση φυσικών αριθμών ο διαιρέτης είναι το 5.
   i. Ποια είναι τα πιθανά υπόλοιπα;
   ii. Αν το πηλίκο είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το υπόλοιπο, ποιοι είναι οι πιθανοί διαιρετέοι;

2. Αν α, β είναι δύο φυσικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι η παράσταση $3\alpha + 18\beta$ διαιρείται με το 3.

3. Μια χορωδία αποτελείται από 18 υψίφωνους, 24 μέσους και 20 βαρύτονους.

   (α) Να υπολογίσετε το μέγιστο αριθμό ομοιόμορφων ομάδων που μπορούμε να σχηματίσουμε.
   (β) Πόσους υψίφωνους, πόσους μέσους και πόσους βαρύτονους θα έχει κάθε ομάδα;

4. Ένας πτηνοτρόφος είχε περισσότερες από 300 και λιγότερες από 320 γαλοπούλες και ικανοποιητικό αριθμό κλουβιών. Μια μέρα ζήτησε από το γιό του να τις μετρήσει και αυτός άρχισε να τις μετρά ενώ έβοσκαν ελεύθερες στη φάρμα. Αυτός, όμως, μπερδευόταν κάθε φορά που επιχειρούσε να τις μετρήσει. Σκέφτηκε λοιπόν να τις βάλει σε κλουβιά. Αρχικά τις έβαλε σε κλουβιά τρεις – τρεις και δεν περίσσευε καμιά. Νόμιζε όμως ότι δεν βρήκε το σωστό πλήθος. Αποφάσισε λοιπόν να δοκιμάσει να βάλει πέντε σε κάθε κλουβί. Δεν περίσσευε καμιά αλλά και πάλι δεν ήταν σίγουρος αν βρήκε το σωστό πλήθος. Στο τέλος έβαλε επτά σε κάθε κλουβί δεν περίσσευε καμιά αλλά και πάλι δεν ήταν σίγουρος. Πόσες ήταν ακριβώς οι γαλοπούλες του πτηνοτρόφου;

5. Δύο φίλοι, ένας ψηλός και ένας κοντός, ξεκίνησαν ταυτόχρονα να διανύσουν μια απόσταση $800\ m$, πεζοί. Το κάθε βήμα του ψηλού είναι $80\ cm$ και του κοντού $60\ cm$. Να βρείτε:
   i. Μετά από πόση απόσταση θα συγχρονιστούν πάλι για πρώτη φορά.
   ii. Πόσα βήματα θα έχει κάνει ο καθένας.
   iii. Πόσες φορές θα συγχρονιστούν μέχρι να φτάσουν στο τέλος της απόστασης.

6. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

i.	Αν ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν άλλο, τότε ο μεγαλύτερος αριθμός έχει περισσότερους παράγοντες από τον μικρότερο.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
ii.	Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
iii.	Το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
iv.	Το άθροισμα δύο σύνθετων αριθμών είναι σύνθετος.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
v.	Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού αριθμού είναι πάντα περιττός αριθμός.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
vi.	Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
vii.	Το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε σύνθετων αριθμών είναι σύνθετος.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
viii.	Το $ΕΚΠ$ δύο πρώτων αριθμών είναι ίσο με το γινόμενο των αριθμών αυτών.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**
ix.	Ο $ΜΚΔ$ δύο αριθμών είναι πάντοτε μικρότερος και από τους δύο αριθμούς.	**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό α για τον οποίο οι αριθμοί:

   (α) $\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2$ είναι όλοι σύνθετοι.
   (β) $\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+3$ είναι όλοι σύνθετοι.

2. Να εξετάσετε κατά πόσο ο αριθμός 263 είναι πρώτος ή σύνθετος;

3. Αν οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια του 11, να δείξετε ότι και ο αριθμός $x-22y$, όπου $(x-22y)\epsilon\mathbb{N}$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

4. Να γράψετε ένα δεκαψήφιο σύνθετο αριθμό, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία $0, 2, 4, 5, 8$.

5. Να εξετάσετε κατά πόσο το έτος 2014 είναι δίσεκτο. Αν τα Χριστούγεννα του 2014 είναι Πέμπτη, να βρείτε τι μέρα θα είναι τα Χριστούγεννα του 2016.

6. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ένα κριτήριο διαιρετότητας με το 8 .

7. Να αποδείξετε ότι σε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, ο ένας από τους τρεις είναι πολλαπλάσιο του 3.

8. Ο Μιχάλης και ο Χρύσανθος έγραψαν σε ένα χαρτί από ένα τέλειο αριθμό. Ο Μιχάλης υποστηρίζει ότι ο δικός του αριθμός έχει 6 πρώτους παράγοντες και λογικά είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό που έγραψε ο Χρύσανθος του οποίου ο αριθμός έχει μόνο 3 πρώτους παράγοντες. Ο Χρύσανθος υποστηρίζει ότι το γεγονός ότι ο ένας αριθμός έχει περισσότερους πρώτους παράγοντες από τον άλλο δεν οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα είναι και ο μεγαλύτερος αριθμός. Ποιος έχει δίκιο από τους δύο;

9. Ένα λεξικό της Ελληνικής γλώσσας έχει περισσότερες από 400 σελίδες και λιγότερες από 450. Αν τις μετρήσουμε ανά 7, 12 και 15 δεν περισσεύει καμία. Πόσες είναι οι σελίδες του λεξικού;

10. Ένας καθηγητής των Μαθηματικών προγραμματίζει να δώσει στους μαθητές του 20 επαναληπτικές ασκήσεις για να προετοιμάσει τους μαθητές του για τις τελικές εξετάσεις. Σε κάθε κεφάλαιο από τα έξι που διδάχθηκαν αναλογεί ο ίδιος αριθμός ασκήσεων και όσες περισσεύουν είναι ερωτήσεις κρίσης. Οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να φέρουν την εργασία τους μετά τις διακοπές του Πάσχα και θα τις βαθμολογήσει με βάση το πιο κάτω σύστημα βαθμολόγησης:

    Κάθε άσκηση του $1ου$ κεφαλαίου παίρνει 3 βαθμούς.
    Κάθε άσκηση του $2ου$ κεφαλαίου παίρνει 5 βαθμούς.
    Κάθε άσκηση του $3ου$ κεφαλαίου παίρνει 6 βαθμούς.
    Κάθε άσκηση του $4ου$ κεφαλαίου παίρνει 4 βαθμούς.
    Κάθε άσκηση του $5ου$ κεφαλαίου παίρνει 7 βαθμούς.
    Κάθε άσκηση του $6ου$ κεφαλαίου παίρνει 3 βαθμούς.
    Κάθε άσκηση κρίσεως παίρνει 8 βαθμούς.
    Για να πάρει ένας μαθητής βαθμό σε μια άσκηση πρέπει να δώσει πλήρη απάντηση.

    i. Ποιο είναι το άριστα;
    ii. Πόσες είναι οι λιγότερες σωστές ασκήσεις που πρέπει να λύσει ένας μαθητής για να πάρει τη βάση (τους μισούς βαθμούς);

11. Ο Ευκλείδης εισηγήθηκε τον επόμενο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του $ΜΚΔ$ δυο φυσικών αριθμών:

Αν α και β με $\alpha > \beta$ είναι δυο αριθμοί των οποίων ψάχνουμε το $ΜΚΔ$, τότε διαιρούμε τον α δια του β και παίρνουμε πηλίκο π_1 και υπόλοιπο υ_1. Αν το υπόλοιπο $\upsilon_1 > 0$, τότε διαιρούμε τον β δια του υ_1 και παίρνουμε πηλίκο π_2 και υπόλοιπο υ_2. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι που το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης να είναι ίσο με μηδέν. Τότε ο $ΜΚΔ(\alpha,\beta)$ είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της διαδικασίας αυτής.

(α) Να δείξετε ότι $ΜΚΔ(\alpha,\beta) = ΜΚΔ(\beta,\upsilon_1)$, όπου υ_1 το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του β (Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των διαιρετών).

(β) Να συμπεράνετε την αλήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου για τον $ΜΚΔ(\alpha,\beta)$.

12. Για να αποδείξουμε τα διάφορα κριτήρια διαιρετότητας, αναπτύσσουμε κάθε φυσικό αριθμό β όπου $\beta = \overline{a_\kappa a_{\kappa-1} a_{\kappa-2} \dots a_0}$ (Ο συμβολισμός $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ δηλώνει την αξία θέσης των ψηφίων του αριθμού, π.χ. $\overline{34} = 3 \cdot 10 + 4$), στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης στη μορφή (ανηγμένη): $\beta = \alpha_\kappa \cdot 10^\kappa + \alpha_{\kappa-1} \cdot 10^{\kappa-1} + \alpha_{\kappa-2} \cdot 10^{\kappa-2} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + a_0$

Όπου a_κ, $a_{\kappa-1}, a_{\kappa-2}, \dots , a_1, a_0$ είναι τα ψηφία του αριθμού β και παίρνουν τιμές από το 0 μέχρι και το 9.

Απόδειξη κριτηρίου διαιρετότητας του 9.
Δίνεται ο φυσικός αριθμός β όπου $\beta = \overline{a_\kappa a_{\kappa-1} a_{\kappa-2} \dots a_0}$
Επομένως, ο αριθμός β αναλύεται
$\beta = \alpha_\kappa \cdot 10^\kappa + \alpha_{\kappa-1} \cdot 10^{\kappa-1} + \alpha_{\kappa-2} \cdot 10^{\kappa-2} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + a_0 \Rightarrow$

Μπορούμε να γράψουμε το $10, 100, 1000, \dots$ ως

$10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1$ κλπ.

$$\beta = \alpha_\kappa \cdot \left(\underbrace{9 \dots 9}_{\kappa\ \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma\ 9} + 1\right) + \alpha_{\kappa-1} \cdot \left(\underbrace{9 \dots 9}_{\kappa-1\ \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma\ 9} + 1\right) + \dots + \alpha_2(99+1) + \alpha_1 \cdot (9+1) + a_0$$

$$\beta = \alpha_\kappa \cdot (\pi o \lambda. 9 + 1) + \alpha_{\kappa-1} \cdot (\pi o \lambda. 9 + 1) + \dots + \alpha_2(99+1) + \alpha_1 \cdot (9+1) + a_0$$
$$\beta = \alpha_\kappa \cdot \pi o \lambda. 9 + \alpha_{\kappa-1} \cdot \pi o \lambda. 9 + \dots + \alpha_2 \cdot 99 + \alpha_1 \cdot 9 + (a_\kappa + \alpha_{\kappa-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1 + a_0)$$
$$\beta = \pi o \lambda. 9 + (a_\kappa + \alpha_{\kappa-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1 + a_0)$$

Ο αριθμός β για να διαιρείται με το 9 πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του $a_\kappa + \alpha_{\kappa-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1 + a_0$ να διαιρείται με το 9. Άρα ένας αριθμός β διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

Να αποδείξετε το κριτήριο διαιρετότητας του 3.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Ακέραιοι – Ρητοί Αριθμοί
Εξισώσεις

Α΄ Γυμνασίου

ΑΚΕΡΑΙΟΙ – ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ρητοί Αριθμοί – Απόλυτη τιμή

Εξερεύνηση

Το όρος **Έβερεστ** με υψόμετρο 8844 m είναι το ψηλότερο βουνό της οροσειράς των Ιμαλάϊων, με την κορυφή του να αποτελεί το υψηλότερο σημείο της Γης, ενώ στην Κύπρο το ψηλότερο σημείο είναι η κορυφή του Τροόδους, ο **Όλυμπος**, με ύψος 1953 m.

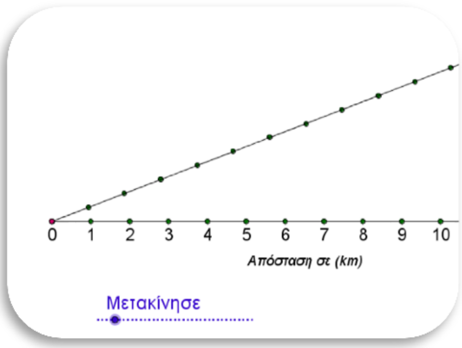
Η **Νεκρά Θάλασσα** αποτελεί το χαμηλότερο χερσαίο σημείο στην επιφάνεια της Γης, με τις ακτές της να φτάνουν τα 422 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Το βαθύτερο σημείο της Γης, με βάθος 10 971 m, εντοπίσθηκε στον Ειρηνικό Ωκεανό, βόρεια των Μαριαννών νήσων από το βαθυσκάφος "Challenger II". Η ζωή σε τόσο μεγάλο βάθος είναι ακόμη άγνωστη. Το πιο διάσημο ναυάγιο του κόσμου, ο **Τιτανικός**, εντοπίσθηκε το Σεπτέμβριο του 1985, σε βάθος 3784 m, ενώ το **Ζηνοβία,** το οποίο βυθίστηκε έξω από το λιμάνι της Λάρνακας, βρίσκεται σε βάθος 42 m.

- ✓ Να περιγράψετε πώς θα μπορούσατε να παρουσιάσετε τις σχέσεις ανάμεσα στις πιο πάνω πληροφορίες.

Διερεύνηση (1)

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «A_En_4_Arithmitiki Grammi.ggb» και να σύρετε το δρομέα Α.



- ✓ Τι παρατηρείτε;

- ✓ Να τοποθετήσετε τα πιο πάνω σημεία στην αριθμητική γραμμή στην κατάλληλη θέση.

Διερεύνηση (2)

Ο Γιάννης και η Μαρία οδηγούν τα ποδήλατά τους, αναχωρώντας από το σπίτι του Ανδρέα. Ύστερα από λίγο ο Γιάννης βρίσκεται $4\,km$ μακριά από το σπίτι του Ανδρέα, οδηγώντας το ποδήλατό του ανατολικά και η Μαρία βρίσκεται $4\,km$ μακριά, οδηγώντας το ποδήλατό της δυτικά.

- ✓ Ποιο παιδί βρίσκεται πιο μακριά από το σπίτι του Ανδρέα;
- ✓ Αν το σπίτι του Ανδρέα βρίσκεται στη θέση μηδέν, να τοποθετήσετε τη θέση των δύο παιδιών στην αριθμητική γραμμή.
- ✓ Να βρείτε ένα άλλο ζεύγος αριθμών που να απέχουν εξίσου από το μηδέν. Πόσα τέτοια ζεύγη υπάρχουν;

Μαθαίνω

- Το σύμβολο «$+$» ή «$-$» ονομάζεται **πρόσημο** του αριθμού. Γράφεται πριν από τον φυσικό αριθμό και τον χαρακτηρίζει ως **θετικό** ή **αρνητικό** αριθμό, αντίστοιχα.

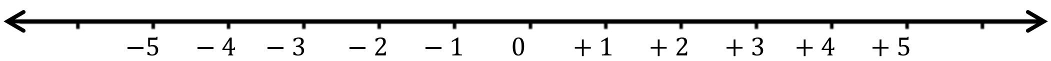
  Δηλαδή, τα σύμβολα «$+$» ή «$-$» χρησιμοποιούνται:
  - *για την πράξη της πρόσθεσης και της αφαίρεσης αντίστοιχα και*
  - *ως πρόσημα για να χαρακτηρίσουν θετικούς ή αρνητικούς τους αριθμούς.*

- Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.

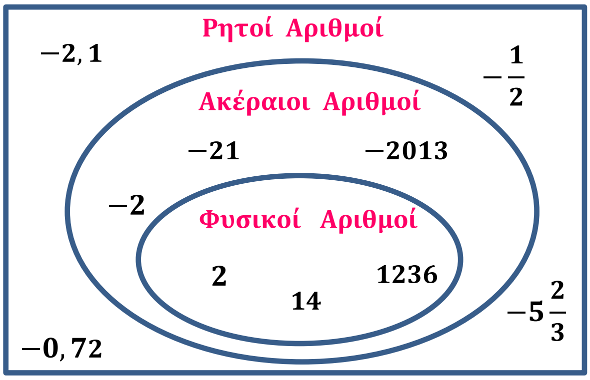
- **Ακεραιοι αριθμοι** είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και των αντίστοιχων αρνητικών και συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \ \dots\}$$



- **Ρητοι αριθμοι** είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς. Συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.

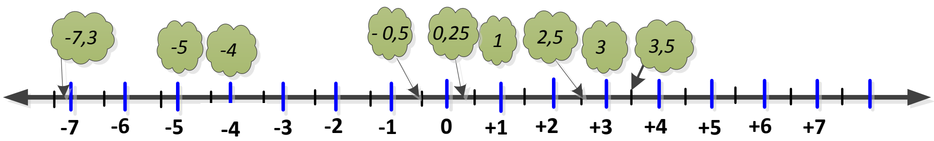


- Η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών δημιουργεί την ανάγκη τοποθέτησης προσήμου μπροστά από όλους τους αριθμούς. Κάθε αριθμός που γράφεται χωρίς πρόσημο, θεωρείται θετικός αριθμός.

- **Αρνητικός αριθμός** είναι ένας αριθμός μικρότερος από το μηδέν.

- **Θετικός αριθμός** είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από το μηδέν.

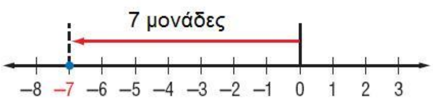
- Τοποθετούμε τους αριθμούς στην αριθμητική γραμμή ως εξής
  - όλοι οι **θετικοί** αριθμοί τοποθετούνται **δεξιά** του μηδενός και
  - όλοι οι **αρνητικοί** αριθμοί τοποθετούνται **αριστερά** του μηδενός.



- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το **ίδιο πρόσημο,** ονομάζονται **ομόσημοι**.

- Δύο μη μηδενικοί αριθμοί που έχουν **διαφορετικό πρόσημο,** ονομάζονται **ετερόσημοι.**

- Η απόσταση ενός αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$ από το μηδέν πάνω στην ευθεία των αριθμών ονομάζεται **απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** του αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$. Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$.



Παράδειγμα:

Το -7 βρίσκεται 7 μονάδες αριστερά του μηδέν, άρα η απόλυτη τιμή του είναι $|-7| = 7$

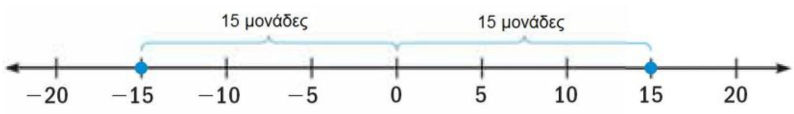
Παραδείγματα

1. Δίνεται ο αριθμός -15. Να βρείτε:
   (α) την απόλυτη τιμή του
   (β) έναν άλλον αριθμό που έχει την ίδια απόλυτη τιμή με το -15

Λύση:

(α) *Το -15 βρίσκεται 15 μονάδες δεξιά από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή του είναι -15, δηλαδή* $|-15| = 15$.

(β) *Ο αριθμός $+15$, ο οποίος βρίσκεται 15 μονάδες δεξιά του μηδενός, έχει την ίδια απόσταση από το μηδέν με το -15 άρα και την ίδια απόλυτη τιμή.*



$$|-15| = |+15| = 15$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
   $A = |5{,}5| + |-6|$ και $B = |5-3| + \left|-\frac{1}{2}\right|$

Λύση:

$A = |5{,}5| + |-6| = 5{,}5 + 6$
$= 11{,}5$

Υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή και στη συνέχεια εκτελούμε την πρόσθεση.

$B = |5-3| + \left|-\frac{1}{2}\right| = |2| + \left|-\frac{1}{2}\right|$
$= 2 + \frac{1}{2}$
$= 2\frac{1}{2}$

Υπολογίζουμε τη διαφορά, στη συνέχεια την απόλυτη τιμή και τέλος εκτελούμε την πρόσθεση.

Δραστηριότητες

1. Να σημειώσετε τη θέση στο διπλανό διάγραμμα:

   (α) *Ενός υποβρύχιου σε βάθος* $115\,m$ *κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.*

   (β) *Ενός αερόστατου σε ύψος* $220\,m$.

   (γ) *Ενός ορειβάτη σε ύψος* $150\,m$.

   (δ) *Μιας άγκυρας σε βάθος* $102{,}5\,m$ *κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.*

2. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς των πιο κάτω συνόλων σε αντίστοιχες αριθμητικές γραμμές:

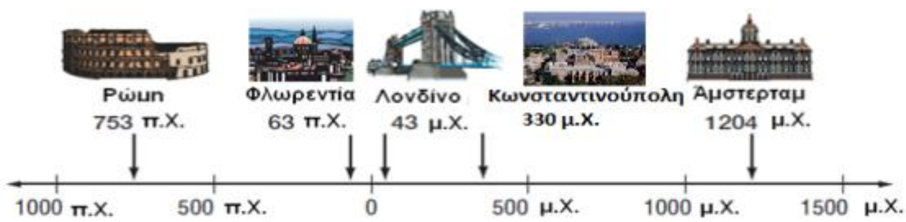
   (α) $\{-4\ ,\ 5\ ,\ 4\ ,\ -3\ ,\ 1\}$

   (β) $\{-5\frac{1}{2}\ ,\ -1\frac{1}{4}\ ,\ 6{,}5\ ,\ -9\ ,\ -\frac{1}{2}\}$

3. Δίνονται οι αριθμοί με -4 και $1\frac{1}{4}$.

   (α) Ποιος από τους πιο πάνω αριθμούς έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή;
   (β) Να βρείτε δύο ακεραίους που βρίσκονται μεταξύ των πιο πάνω αριθμών.
   (γ) Πόσοι αρνητικοί ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ τους;
   (δ) Να βρείτε δύο ετερόσημους αριθμούς που να έχουν μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τους πιο πάνω αριθμούς.

4. Να μελετήσετε την πιο κάτω γραμμή του χρόνου, η οποία δείχνει το έτος ίδρυσης μερικών πόλεων της Ευρώπης. Πώς συνδέεται η γραμμή χρόνου με την αριθμητική γραμμή;



5. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

   (α) $|-2| = \ldots\ldots$ (β) $|+7{,}5| = \ldots\ldots$ (γ) $|-12\frac{1}{3}| = \ldots\ldots$

   (δ) $|\ldots\ldots| = 8{,}3$ (ε) $|\ldots\ldots| = 0$ (στ) $|\ldots\ldots| = 123$

6. Να εξετάσετε ποια από τις παραστάσεις ΔΕΝ ισούται με τις υπόλοιπες:

   $A = |-8|$ $B = |-2| + |6|$

   $\Gamma = |12 - |-4||$ $\Delta = |7 - |+1||$

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, όταν $\alpha = -2$ και $\beta = -13$:

   (α) $|\alpha|$ (β) $|\alpha| + |\beta|$ (γ) $|\beta| - |\alpha|$

8. Δίνονται οι αριθμοί -4 και 5.
   (α) Πόσες μονάδες απέχει ο αριθμός -4 από τον αριθμό 5 στην αριθμητική γραμμή;
   (β) Να βρείτε ένα ζεύγος μη ακέραιων αριθμών που να έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με την απόσταση που έχουν οι πιο πάνω αριθμοί.
   (γ) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των ετερόσημων ακέραιων αριθμών που έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με την απόσταση που έχουν οι πιο πάνω αριθμοί.

9. Να βρείτε όλους τους ακέραιους που έχουν απόλυτη τιμή:
   (α) μικρότερη του 3,
   (β) μικρότερη του 1,
   (γ) μικρότερη ή ίση του 2.

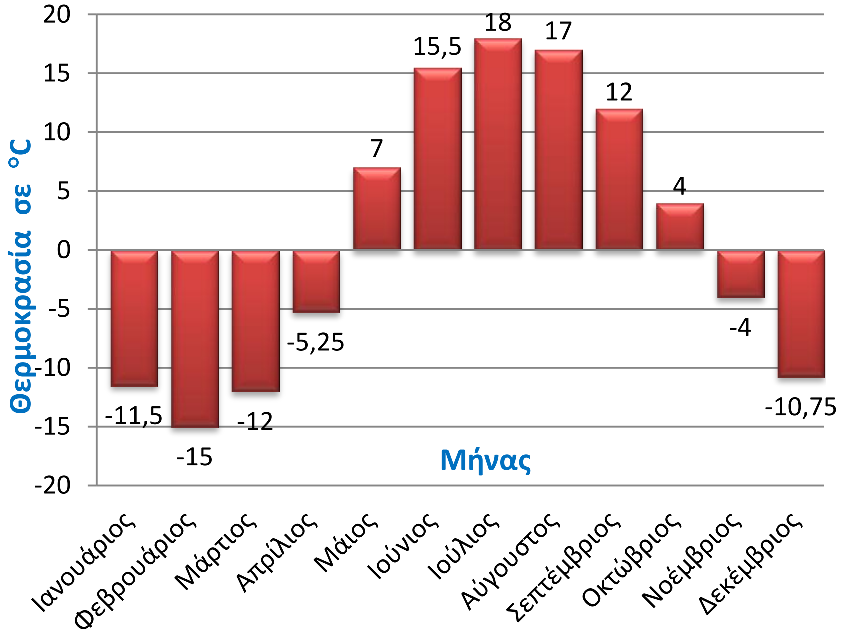
10. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Κάθε ακέραιος αριθμός είναι και ρητός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β)	*Κάθε ρητός αριθμός είναι φυσικός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ)	*Οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι ρητοί.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ)	*Το 0 ανήκει στους ρητούς αριθμούς.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(ε)	*Το $-\frac{3}{4}$ και το $+\frac{3}{4}$ είναι ομόσημοι.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(στ)	*Οι αριθμοί $-3{,}42$ και $-2\frac{17}{100}$ είναι ετερόσημοι.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

Σύγκριση Ρητών αριθμών

Διερεύνηση

Στο πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η μέση θερμοκρασία (℃) κάθε μήνα μιας πόλης της Αλάσκας το 2011.



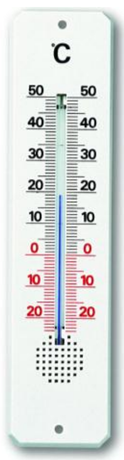
✓ Ποιος ήταν ο πιο κρύος μήνας και ποιος ο πιο ζεστός μήνας;

✓ Ποιους μήνες η θερμοκρασία ήταν χαμηλότερη από τον Ιανουάριο;

✓ Να συγκρίνετε τη θερμοκρασία του Μαρτίου και του Σεπτεμβρίου.

✓ Να κατατάξετε σε αύξουσα σειρά τους μήνες σε σχέση με τη θερμοκρασία τους.

Η πιο ψηλή θερμοκρασία (57,8 °C) καταγράφηκε το 1922 στο Αλ Αζιζάια στη Λιβύη. Σύμφωνα, όμως, με έναν δορυφόρο της NASA, το ρεκόρ αυτό έχει καταρριφθεί από τους 71 °C που καταγράφηκαν στην έρημο Λουτ του Ιράν.



Η πιο χαμηλή θερμοκρασία (−71,2 °C), σε **<u>κατοικήσιμο</u>** μέρος, καταγράφηκε το 1926, σε χωριό της Δημοκρατίας της Σακά, στη Ρωσία. Η πιο χαμηλή θερμοκρασία (−89,4 °C) που έχει καταγραφεί ποτέ στη Γη ήταν το 1983 στην Ανταρκτική.

Μαθαίνω

- **Ανισότητα** ονομάζεται ένα οποιοδήποτε ζεύγος αριθμητικών παραστάσεων που συνδέονται με το σύμβολο « $<$, $>$, $\geq$, $\leq$ ». Οι εκφράσεις:
  $A > B$, $A < B$, $A \geq B$, $A \leq B$ είναι ανισότητες. Το A είναι μία παράσταση και ονομάζεται πρώτο μέλος της ανισότητας και B μια παράσταση και ονομάζεται δεύτερο μέλος της ανισότητας.

- Κάθε ανισότητα χαρακτηρίζεται αποκλειστικά ως **ΑΛΗΘΗΣ** ή **ΨΕΥΔΗΣ**.

- Μπορούμε να συγκρίνουμε ρητούς αριθμούς, βρίσκοντας τη θέση τους στην ευθεία των αριθμών. Όσο **πιο δεξιά** βρίσκεται ένας αριθμός στην αριθμητική γραμμή τόσο πιο μεγάλος είναι.

  - *Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.*
  - *Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.*
  - *Κάθε αρνητικός είναι μικρότερος από το μηδέν.*

$$\delta < \gamma < 0 < \beta < \alpha$$

Παραδείγματα

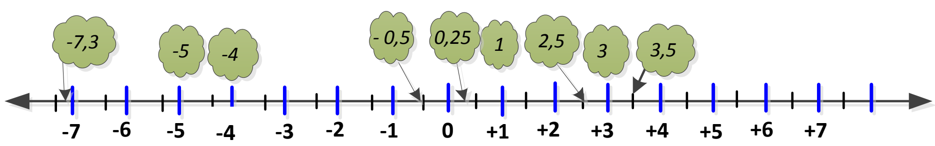
1. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους πιο κάτω ρητούς αριθμούς:

$$3 \;,\; -\frac{32}{8} \;,\; +3{,}5 \;,\; -5 \;,\; 1 \;,\; \frac{5}{20} \;,\; -\frac{4}{8} \;,\; -7{,}3 \;,\; \frac{5}{2}$$

Λύση:

Μετατρέπουμε τους κλασματικούς αριθμούς σε δεκαδικούς ή τους δεκαδικούς σε κλασματικούς: $-\frac{32}{8} = -4$, $\frac{5}{20} = 0{,}25$, $-\frac{4}{8} = -0{,}5$, $\frac{5}{2} = 2{,}5$

Τοποθετούμε τους αριθμούς στην ευθεία των ρητών αριθμών:

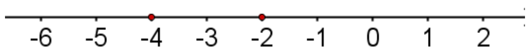


Άρα, $-7{,}3 < -5 < -\frac{32}{8} < -\frac{4}{8} < \frac{5}{20} < 1 < \frac{5}{2} < 3 < +3{,}5$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $>$, = , $<$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:
(α) $-2 \,\ldots\ldots\, -4$ (β) $|-2| \,\ldots\ldots\, |-4|$ (γ) $-2 \,\ldots\ldots\, |-4|$

Λύση:

Τοποθετούμε σε αριθμητική γραμμή τους αριθμούς -2 και -4. Παρατηρούμε ότι:



(α) *Ο αριθμός -2 βρίσκεται δεξιά του -4. Άρα, $-2 > -4$.*

(β) *Η απόσταση από το μηδέν του -2 είναι μικρότερη από την απόσταση του -4. Άρα,* $|-2| < |-4|$ αφού $|-2| = 2$ και $|-4| = 4$.

(γ) *Αφού $|-4| = 4$ ισχύει ότι $-2 < |-4|$.*

Δραστηριότητες

1. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο $>, =, <$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α)	$3 \,\ldots\ldots\, 7$	(β)	$0 \ldots\ldots\, 2{,}23$
(γ)	$-7 \ldots\ldots\, 5$	(δ)	$-2011 \ldots\ldots 0$
(ε)	$-2012 \ldots\ldots 0{,}001$	(στ)	$-6{,}999999 \ldots\ldots\, -9{,}6$
(ζ)	$-3{,}45 \ldots\ldots -5{,}43$	(η)	$-123 \,\ldots\ldots -\frac{1}{23}$
(θ)	$-\frac{1}{3} \ldots\ldots -\frac{1}{2}$	(ι)	$-12\frac{1}{3} \ldots\ldots\, +12\frac{1}{3}$

2. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους πιο κάτω αριθμούς:

$\boxed{-280{,}12}$ $\boxed{-28{,}12}$ $\boxed{-28{,}012}$ $\boxed{-2{,}8}$ $\boxed{-280{,}21}$

3. Στο διπλανό πίνακα παρουσιάζεται η μέση θερμοκρασία (°C) στην επιφάνεια του Ερμή, του Άρη, της Γης και της Σελήνης. Με βάση τις πληροφορίες του πίνακα να γράψετε τρεις ανισότητες, οι οποίες να συγκρίνουν τις θερμοκρασίες των πλανητών.

Αστρικό Σώμα	Θερμοκρασία Επιφάνειας
Δίας	-107
Σελήνη	-23
Άρης	-62
Γη	15

4. Η Νικολέττα συμπλήρωσε την άσκηση όπως φαίνεται δίπλα. Να εξετάσετε την ορθότητα των προτάσεων. Αν μια πρόταση είναι λανθασμένη, να αλλάξετε έναν από τους αριθμούς για να διορθώσετε την πρόταση.

> Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, =, >$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:
>
> (α) $-8{,}1 > 5$ (β) $-7\frac{1}{2} < 0$
>
> (γ) $|-9| = 9$ (δ) $|-5{,}999| < -6$
>
> (ε) $10 > |-8|$ (στ) $16 > |-16|$

5. Να συμπληρώσετε τις ακολουθίες των αριθμών:

(α) $3\,,1\,,-1\,, \dots\,, \dots\,, \dots$ (β) $-3\frac{1}{2}, -3, -2\frac{1}{2}, \dots\,, \dots\,, \dots$

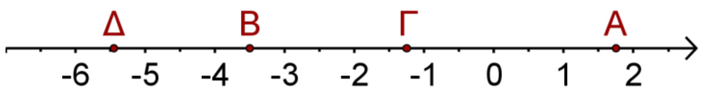
6. Να συμπληρώσετε τα κενά με έναν κατάλληλο ρητό αριθμό, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $-5 < \cdots < +4$ (β) $-3 < \cdots < 0$ (γ) $-\frac{1}{2} < \cdots < \frac{2}{3}$

(δ) $\frac{3}{8} < \cdots < \frac{7}{8}$ (ε) $-4\frac{1}{4} < \cdots < -4$ (στ) $-3 < \cdots < +3$

7. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

Για τους αριθμούς A, B, Γ, Δ ισχύει:



(α) $|\mathrm{B}| < |\Gamma|$ **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**

(β) $\mathrm{B} > \Gamma$ **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**

(γ) $\Gamma > \mathrm{A}$ **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**

(δ) $|\Delta| > |\mathrm{A}|$ **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ**

8. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους κατάλληλους ρητούς αριθμούς, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $-2 < \cdots < \cdots < \cdots < +1$ (β) $-\frac{1}{3} < \cdots < \cdots < \cdots < +1\frac{1}{2}$

9. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $>, =, <$, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

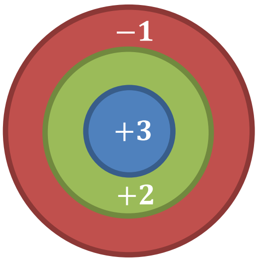
(α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ και $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha \dots \beta$

(β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ και $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ και $|\alpha| < |\beta|$, τότε $\alpha \dots \beta$.

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεση Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση



Ο Χρίστος και η Νεφέλη έχουν πάρει δώρο ένα καινούριο παιχνίδι. Σύμφωνα με τους κανόνες, κάθε παίκτης ρίχνει δύο βελάκια στο στόχο. Ανάλογα με την περιοχή που καρφώνεται το βελάκι ο παίκτης παίρνει τους αντίστοιχούς βαθμούς *(Κάθε θετική μονάδα «εκμηδενίζεται» από μια αρνητική μονάδα).*

- ✓ Να καταγράψετε όλα τα δυνατά αθροίσματα βαθμών που μπορεί να πάρει ο κάθε παίκτης, ρίχνοντας δύο βελάκια κάθε φορά.

- ✓ Ποιο είναι το μεγαλύτερο και ποιο το μικρότερο άθροισμα βαθμών που μπορεί να μαζέψει σε ένα γύρο ένας παίκτης;

Για να υπολογίσουν τα αθροίσματα αρνητικών ή ετερόσημων αριθμών πρότειναν τους πιο κάτω τρόπους:

Ο Χρίστος έχει πάρει τα πράσινα και κόκκινα πλακίδια από ένα παιχνίδι και πρότεινε να τα χρησιμοποιήσουν ως εξής:

«Κάθε πράσινο πλακίδιο θα αναπαριστά ένα θετικό βαθμό ⊕, ενώ κάθε κόκκινο πλακίδιο θα αναπαριστά έναν αρνητικό βαθμό ⊖

Για παράδειγμα, αν κάποιος ρίξει +3 και −1, θα παίρνει:

⊕⊕⊕ και ⊖

Άρα

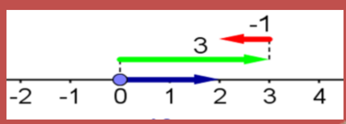
⊕⊕⊕ Άρα 2 θετικούς βαθμούς

⊖

Η Νεφέλη πρότεινε το εξής:

Μπορούμε να υπολογίζουμε τα αθροίσματα με τη βοήθεια της αριθμητικής γραμμής.

Για παράδειγμα, αν κάποιος ρίξει +3 και −1 :



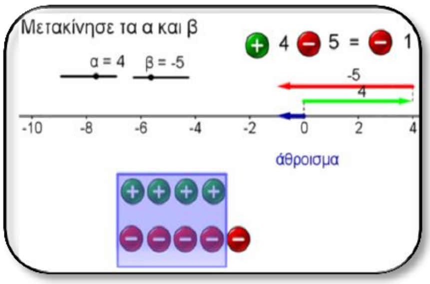
Άρα 2 θετικούς βαθμούς

- ✓ Να μελετήσετε και να επεξηγήσετε τον τρόπο που πρότεινε το κάθε παιδί, για να υπολογίσουν τα αθροίσματα.

✓ Να υπολογίσετε όλα τα δυνατά αθροίσματα βαθμών που μπορεί να πάρει σε κάθε γύρο κάθε παιδί, αν ο καθένας ρίχνει από δύο βελάκια.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αριθμητική γραμμή ή το μοντέλο με τα πλακίδια.

✓ Να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε το άθροισμα δύο οποιοδήποτε ρητών αριθμών.

✓ Να χρησιμοποιήσετε το εφαρμογίδιο «A_En_4_ArithGrammi_Plakidia.ggb».
Να μετακινήσετε τους δρομείς «α» και «β» και να υπολογίσετε τα πιο πάνω αθροίσματα για να επιβεβαιώσετε τα συμπεράσματά σας.



Μαθαίνω

- Για να **προσθέσουμε δύο ομόσημους** ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

- Για να **προσθέσουμε δύο ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή των αριθμών και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(+12)+(+15)$ (β) $(-20)+(+4)$

(γ) $(-9{,}5)+(+6\frac{1}{4})$ (δ) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{5}\right)$

Λύση:

(α) $(+12)+(+15) = +(12+15)$
$= +27$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε το πρόσημό τους.

(β) $(-20)+(+4)$ $\quad = -(20-4)$
$= -16$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή των αριθμών και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

(γ) $(-9{,}5)+\left(+6\frac{1}{4}\right)$ $\quad = -\left(9{,}50-6\frac{1}{4}\right)$
$= -(9{,}50-6{,}25)$
$= -3{,}25$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή των αριθμών και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

(δ) $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-1\frac{1}{5}\right)$ $\quad = -\left(\frac{1}{3}+1\frac{1}{5}\right)$
$= -\left(\frac{\overset{5}{1}}{3}+1\frac{\overset{3}{1}}{5}\right)$
$= -\left(\frac{5}{15}+1\frac{3}{15}\right)$
$= -1\frac{8}{15}$

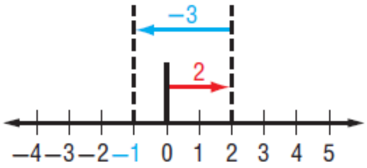
Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε το πρόσημό τους.

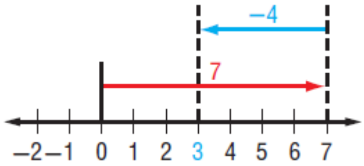
Δραστηριότητες

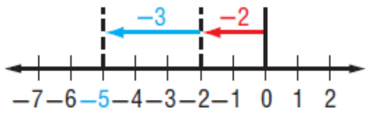
1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$(+3)+(+5)$	(β)	$(+12)+(+23)$
(γ)	$(-5)+(+8)$	(δ)	$(-3)+(-10)$
(ε)	$(-2{,}95)+(-1{,}2)$	(στ)	$(-120)+(+200)$
(ζ)	$\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)$	(η)	$\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{1}{4}\right)$
(θ)	$\left(-\frac{1}{5}\right)+(-2{,}15)$	(ι)	$\left(-1\frac{1}{7}\right)+\left(+4\frac{1}{2}\right)$
(ια)	$\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{10}\right)$	(ιβ)	$(-3)+\left(+1\frac{3}{4}\right)$

2. Να γράψετε μια μαθηματική πρόταση που να περιγράφει καθεμιά από τις πιο κάτω αναπαραστάσεις:







3. Ένα βράδυ η θερμοκρασία στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη κατέβηκε στους $-85°C$. Σε κάποια χρονική στιγμή της ημέρας η θερμοκρασία αυξήθηκε κατά 100 βαθμούς σε σχέση με την ελάχιστη τιμή που σημειώθηκε το βράδυ. Ποια ήταν η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία στον Άρη;

4. Να συμπληρώσετε με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω ισότητες:

(α)	$(+11) + (\ldots\ldots) = +4$	(β)	$(-5) + (\ldots\ldots) = 13$
(γ)	$(+11) + (\ldots\ldots) = +20$	(δ)	$(\ldots\ldots) + (-113) = -120{,}4$
(ε)	$(+5{,}5) + (\ldots\ldots) = -8{,}4$	(στ)	$(\ldots\ldots) + (-3) = +10\frac{1}{5}$
(ζ)	$\left(-\frac{3}{11}\right) + (\ldots\ldots) = \left(-\frac{5}{11}\right)$	(η)	$\left(-1\frac{1}{2}\right) + (\ldots\ldots) = \left(-2\frac{19}{30}\right)$

5. Να υπολογίσετε τις επόμενες αριθμητικές παραστάσεις, όταν $x = -10$, $y = 7$ και $z = -8$.

(α)	$x + \lvert -1 \rvert$	(β)	$6 + \lvert y \rvert$	(γ)	$z + (-5)$
(δ)	$z + 18$	(ε)	$15 + x$	(στ)	$x + y$
(ζ)	$y + z$	(η)	$x + \lvert z \rvert$	(θ)	$\lvert x + y \rvert$

6. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $(+33) + x = -16$. Στη συνέχεια να λύσετε το πρόβλημα και να ερμηνεύσετε τη λύση.

Ιδιότητες της Πρόσθεσης – Άθροισμα πολλών προσθετέων

Διερεύνηση (1)

Η Ιωάννα έχει καταγράψει στον πιο κάτω πίνακα όλα τα δυνατά αθροίσματα που προκύπτουν, όταν αθροίσουμε δύο από τους αριθμούς του συνόλου $\{-4, -3, \ldots, +3, +4\}$.

✓ Να μελετήσετε τον πίνακα και να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

$+$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4
$+4$	$+8$	$+7$	$+6$	$+5$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0
$+3$	$+7$	$+6$	$+5$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1
$+2$	$+6$	$+5$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2
$+1$	$+5$	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3
0	$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4
-1	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4	-5
-2	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
-3	$+1$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
-4	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8

✓ Να εντοπίσετε τα ζεύγη που δίνουν άθροισμα 0 και να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα.

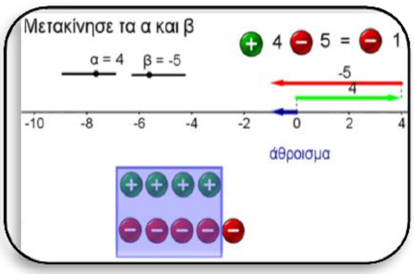
✓ Ποια ιδιότητα της πρόσθεσης μπορείτε να εντοπίσετε στον πιο πάνω πίνακα;

✓ Να εξετάσετε πότε ένα άθροισμα είναι θετικό και πότε αρνητικό;

✓ Να γράψετε ένα δικό σας ζεύγος αριθμών που να έχει άθροισμα -5. Πόσα τέτοια ζεύγη αριθμών υπάρχουν; Ποια είναι αυτά;

✓ Να βρείτε τρεις προσθετέους που έχουν άθροισμα 0.

✓ Να εξετάσετε τις παρατηρήσεις σας με τη χρήση του εφαρμογιδίου «A_En_4_ArithGrammi_Plakidia.ggb».



Διερεύνηση (2)

Στον πίνακα φαίνεται μέρος της κατάστασης του τραπεζικού λογαριασμού του κυρίου Φαίδωνα.

Ημερομηνία	Καταθέσεις	Αναλήψεις	Υπόλοιπο
⋮			
8/3/2012	100		−378,68
9/3/2012		210,14	
10/4/2012	1000,55		
10/4/2012		125,20	
12/4/2012		50,00	
12/4/2012	500,00		
12/4/2012		467,32	
13/4/2012		1445,39	;
⋮			

✓ Να υπολογίσετε το υπόλοιπο του λογαριασμού του στις 13/4/2012. Να περιγράψετε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσατε. Ποια άλλη μέθοδο θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε;

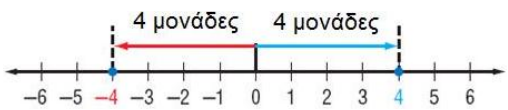
Μαθαίνω

- Στην πρόσθεση ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:
  Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, τότε
  - $\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$ **Αντιμεταθετική** ιδιότητα
  - $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)}$ **Προσεταιριστική** ιδιότητα

- Το μηδέν είναι το **ουδέτερο στοιχείο** στην πρόσθεση γιατί σε οποίο αριθμό προστεθεί δεν τον διαφοροποιεί. Δηλαδή,
  $$\boldsymbol{\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha}$$

- Για κάθε ρητό αριθμό α υπάρχει μοναδικός ρητός αριθμός $-\alpha$ που ονομάζεται αντίθετός του. Το άθροισμα δυο **αντίθετων** αριθμών είναι μηδέν. Δηλαδή,
  $$\boldsymbol{\alpha + (-\alpha) = 0}$$
  - Δύο ετερόσημοι αριθμοί που έχουν την ίδια απόσταση από το μηδέν, δηλαδή την ίδια απόλυτη τιμή, είναι **αντίθετοι**.

Παράδειγμα: Οι αριθμοί $+4$ και -4 είναι αντίθετοι, αφού απέχουν εξίσου 4 μονάδες από το μηδέν.



Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $(-7)+0$ (β) $0+\left(-\frac{2}{3}\right)$ (γ) $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)$

Λύση:

(α) $(-7)+0=-7$ *Το μηδέν είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.*

(β) $0+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ *Το μηδέν είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.*

(γ) $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{5}{3}\right)=0$ *Οι προσθετέοι είναι αντίθετοι, το άθροισμα τους είναι μηδέν.*

2. Να υπολογίσετε την παράσταση: $(-1{,}3)+(+5)+(+3{,}2)+\left(-\frac{5}{2}\right)+(+1{,}3)+\left(+\frac{5}{2}\right)$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ***αντίθετοι προσθετέοι****, οπότε τους διαγράφουμε αφού το άθροισμα τους είναι* 0. *Ακολούθως υπολογίζουμε το άθροισμα των ετερόσημων αριθμών που παραμένουν.*

$(-1{,}3)+(+5)+(+3{,}2)+\left(-\frac{5}{2}\right)+(+1{,}3)+\left(+\frac{5}{2}\right)$

$=\cancel{(-1{,}3)+(+1{,}3)}+\cancel{\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)}+(+3{,}2)+(+5)$

$=0+0+(+3{,}2)+(+5)$

$=+8{,}2$

3. Να υπολογίσετε την παράσταση: $(-3)+(+1)+(+3{,}2)+(-1{,}1)+(+1{,}3)+(-5)$

Λύση:

Υπολογίζουμε το άθροισμα όλων των αρνητικών και το άθροισμα όλων των θετικών αριθμών. Ακολούθως υπολογίζουμε το άθροισμα των ετερόσημων αριθμών που προκύπτουν.

$(-3)+(+1)+(+3{,}2)+(-1{,}1)+(+1{,}3)+(-5)$

$=(-3)+(-1{,}1)+(-5)+(+3{,}2)+(+1{,}3)+(+1)$

$=(-9{,}1)+(+5{,}5)$

$=-3{,}6$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-12)\ +\ 0$ (β) $0\ +(+5{,}4)$

(γ) $(+8)\ +\ (-8)$ (δ) $(-30)\ +\ (+30)$

(ε) $\left(-2\frac{1}{8}\right)+\left(+2\frac{1}{8}\right)$ (στ) $(+8)+(-3{,}5)+(-4{,}1)$

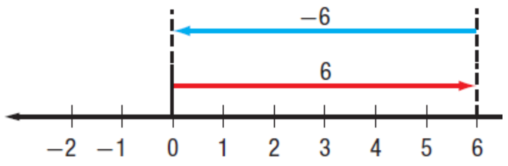
(ζ) $(+6{,}15)+(+2{,}33)+(-4{,}12)+(-2{,}9)$

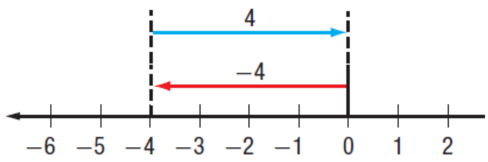
(η) $(+8)+(-3)+(+4)+(-13)+(-5)+(-4)$

(θ) $(+20)+(+14)+(-1013)+(+6)+(+1013)$

(ι) $\left(-\frac{1}{3}\right)+(-2)+\left(-2\frac{1}{5}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)$

2. Να γράψετε μια μαθηματική πρόταση που να περιγράφει καθεμιά από τις πιο κάτω αναπαραστάσεις:





3. Το υπόλοιπο του τραπεζικού λογαριασμού του κυρίου Παντελή ήταν σήμερα το πρωί €500,75. Να βρείτε το νέο υπόλοιπο στο τέλος της μέρας, αν έχουν πληρωθεί από το λογαριασμό δύο επιταγές €315,45 και €224,22.

4. Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω μαγικά τετράγωνα:

$+3$		$+1$
	0	
-1		

1		$+1$
	-2	
		-3

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$\mathrm{A}=(-2{,}4)+(+1{,}5)+(-2012)+(+1)+(+2011)$

$\mathrm{B}=(-3)+\left(-\frac{1}{2013}\right)+(-2{,}3)+\left(+\frac{1}{2013}\right)$

$\Gamma=\mathrm{A}\ +\ \mathrm{B}$

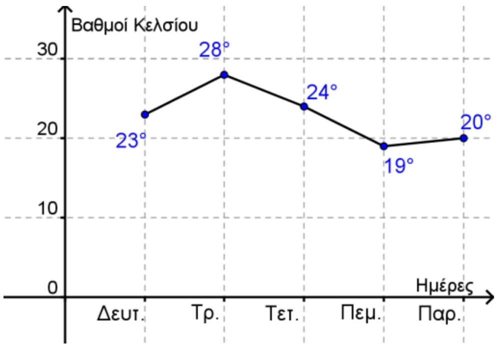
6. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας για τους ρητούς α και β, αν:

(α) $\alpha + \beta = 0$
(β) $\alpha + \beta = \alpha$
(γ) $\alpha + \beta = 0$ και $\alpha + \beta = \alpha$

7. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) *Το άθροισμα δύο ρητών αριθμών είναι πάντα μεγαλύτερο από τον κάθε προσθετέο.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β) *Αν το άθροισμα δύο ρητών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός, τότε και οι δύο ρητοί είναι πάντα αρνητικοί αριθμοί.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ) *Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε οι α, β είναι αντίθετοι αριθμοί.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ) *Το άθροισμα δέκα θετικών ρητών είναι πάντα θετικός αριθμός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

8. Η διπλανή γραφική παράσταση παρουσιάζει τη μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία για μια συγκεκριμένη εβδομάδα (Δευτέρα – Παρασκευή). Να υπολογίσετε τη συνολική μεταβολή της θερμοκρασίας από τη Δευτέρα μέχρι την Παρασκευή.



9. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς $-6, -7, -5, -3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 9$ στα κουτάκια, ώστε να προκύψουν τρία ίσα αθροίσματα:

$$\square + \square + \square = \square + \square + \square = \square + \square + \square$$

10. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις στην πιο απλή τους μορφή:

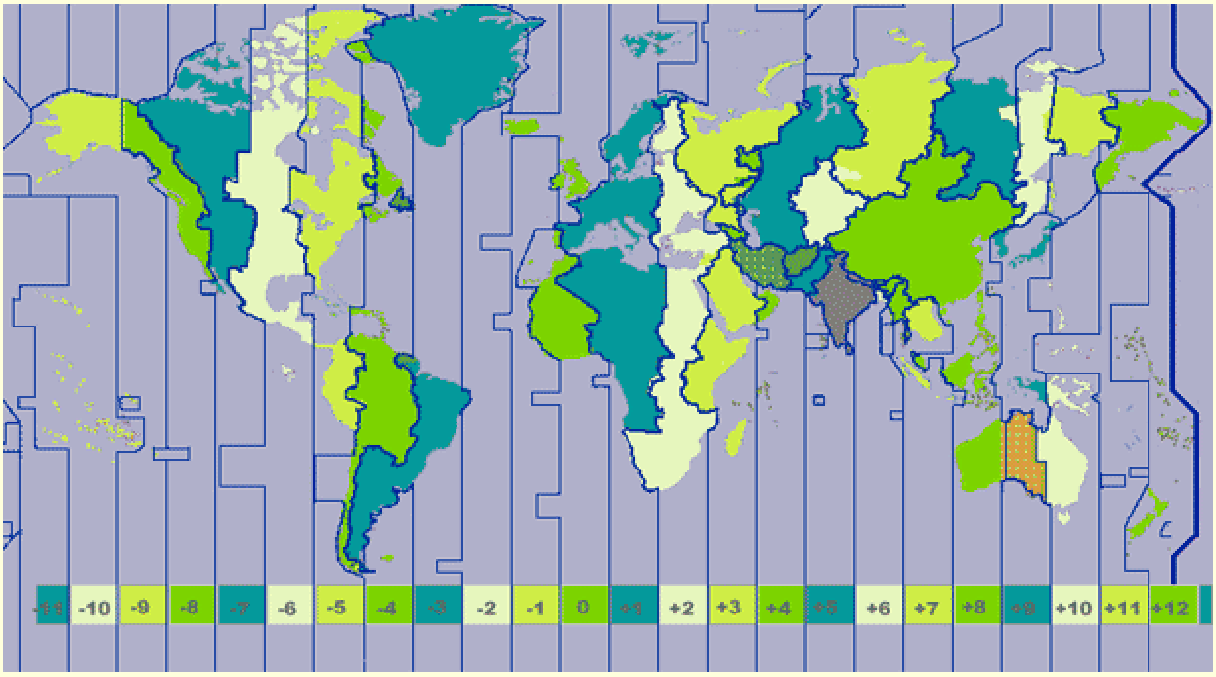
(α) $5\beta - 14\beta$ (β) $4y + 3 - 15y - 5$

(γ) $5\alpha + 3\beta + 4\alpha - \beta$ (δ) $y + 2\omega - 3y + 2 + \omega - 5$

Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Εξερεύνηση

Οι επιστήμονες έχουν χωρίσει την υδρόγειο σφαίρα σε 24 ζώνες που λέγονται ωριαίες άτρακτοι. Ως αρχική ζώνη έχει καθοριστεί αυτή στην οποία περιέχεται το αστεροσκοπείο του Greenwich στην Αγγλία. Η ώρα αυξάνεται για τις ζώνες που βρίσκονται δεξιά από αυτήν στο χάρτη και μειώνονται για τις ζώνες που βρίσκονται στα αριστερά. Τα όρια των ζωνών δεν είναι ευθείες γραμμές, αλλά για πρακτικούς λόγους ακολουθούν τα σύνορα των χωρών (εκτός από μεγάλες σε έκταση χώρες π.χ Η.Π.Α., Καναδάς).



✓ Να μελετήσετε το χάρτη και να σχολιάσετε τις πληροφορίες που παρουσιάζει.

Διερεύνηση (1)

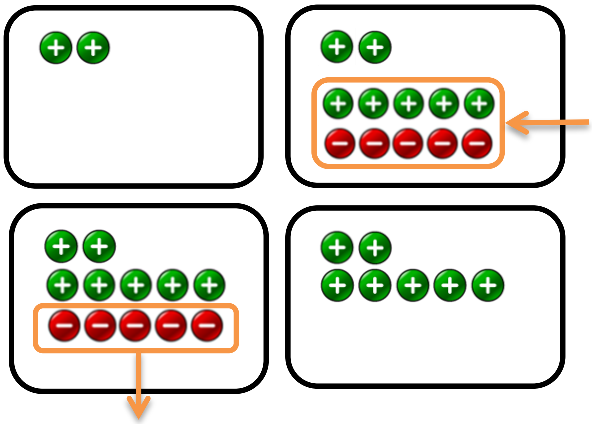
Μελετώντας τον πιο πάνω χάρτη να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα:

✓ Όταν στην Κύπρο είναι μεσημέρι, σε ποιες χώρες είναι μεσάνυχτα;

✓ Ποιες χώρες έχουν διαφορά 5 ώρες με την Κύπρο;

Ο Παναγιώτης θέλει να υπολογίσει τη διαφορά της ώρας της Κύπρου και της πολιτείας των ΗΠΑ στην οποία διαμένει ο παππούς του. Η Κύπρος βρίσκεται στη ζώνη $+2$, ενώ η πολιτεία αυτή βρίσκεται στην ζώνη -5.

Στις εικόνες φαίνεται ο τρόπος που χρησιμοποίησε ο Παναγιώτης, για να βρει τη διαφορά $(+2)-(-5)$.



Επομένως, $(+2)-(-5)=(+2)+(+5)=+7$

✓ Να ερμηνεύσετε το πιο πάνω μοντέλο και να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το πώς μπορούμε να υπολογίζουμε τη διαφορά ρητών αριθμών.

Μαθαίνω

- Για να **αφαιρέσουμε** από το ρητό αριθμό α το ρητό αριθμό β, **προσθέτουμε** στον αριθμό α τον **αντίθετο** αριθμό του β. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta}$$

*Στους ρητούς αριθμούς **η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση** και επομένως είναι πάντα δυνατή (δηλαδή δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο).*

- Ο αντίθετος του αθροίσματος δύο αριθμών α και β είναι το άθροισμα των αντίθετων τους. Δηλαδή,

$$-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(-\boldsymbol{\alpha})+(-\boldsymbol{\beta})=-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$$

Παραδείγματα:

$(+3)-(-4)=(+3)+(+4)=+3+4$

$(+3-4)-(-2+3-4)=+3-4+2-3+4$

Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:
   (α) $(+9)-(+12)$
   (β) $(+\,7{,}3)-(-15{,}14)$
   (γ) $(-4+2)-(-10)$

Λύση:

(α) $(+9)-(+12) = (+9)+(-12) = -3$

Για να αφαιρέσουμε $+12$, προσθέτουμε τον αντίθετό του, δηλαδή το -12

(β) $7{,}3-(-15{,}14) = (+7{,}3)+(+15{,}14) = 22{,}44$

Για να αφαιρέσουμε το $-15{,}4$, προσθέτουμε τον αντίθετό του, το $+15{,}4$.

(γ) $(-4+2)-(-10) = (-2)-(-10) = (-2)+(+10) = +8$

Υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα στην παρένθεση στο οποίο και οι δύο προσθετέοι είναι ετερόσημοι. Ακολούθως υπολογίζουμε τη διαφορά που προκύπτει.

2. Η θερμοκρασία τήξης του υδράργυρου είναι περίπου $-38{,}9$ ℃ και του αλουμινίου είναι περίπου $660{,}2$ ℃. Ποια είναι η διαφορά των θερμοκρασιών τήξης του αλουμινίου από τη θερμοκρασία τήξης του υδραργύρου;

Λύση:

Υπολογίζουμε τη διαφορά των δύο θερμοκρασιών: $660{,}2-(-38{,}9) = 660{,}2+(+38{,}9) = 660{,}2+38{,}9 = 699{,}1$ ℃

3. Το δημαρχείο μιας πόλης πρόκειται να ανακαινίσει το θέατρο. Για το σκοπό αυτό διαθέτει 45 χιλιάδες ευρώ. Η ολοκλήρωση του έργου θα απαιτήσει 32 χιλιάδες ευρώ για οικοδομικές εργασίες, 15 χιλιάδες ευρώ για επίπλωση και 7 χιλιάδες ευρώ για ηλεκτρονικό εξοπλισμό. Το δημαρχείο έχει στη διάθεση του μια δωρεά ύψους 4 χιλιάδων ευρώ.

   Ο λογιστής του δημαρχείου ετοίμασε μια παράσταση για τον υπολογισμό του ποσού που υπολείπεται για τη διεκπεραίωση του έργου. Ο δήμαρχος σημείωσε στο δικό του χαρτί τη δική του παράσταση.

ΛΟΓΙΣΤΗΣ:

Υπόλοιπο: $45 - (32 + 15 + 7 - 4)$

ΔΗΜΑΡΧΟΣ:

Υπόλοιπο: $45 - 32 - 15 - 7 + 4$

(α) Να υπολογίσετε το ποσό που υπολείπεται σύμφωνα με τις δυο παραστάσεις.

(β) Να εξετάσετε την ορθότητα των δυο μεθόδων.

Λύση:

Λογιστής:

$$\begin{aligned} 45 - (32 + 15 + 7 - 4) &= 45 - (+54 - 4) \\ &= 45 - (+50) \\ &= 45 - 50 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Υπολείπονται 5 χιλιάδες ευρώ.

Δήμαρχος:

$$\begin{aligned} 45 - 32 - 15 - 7 + 4 &= +49 - 54 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Υπολείπονται 5 χιλιάδες ευρώ.

Με τις δύο μεθόδους βρίσκουμε την ίδια απάντηση.

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$(-17) - (+13)$	(β)	$(+27) - (-8)$	(γ)	$(-25) - (-5)$
(δ)	$+1{,}2 - (+2{,}6)$	(ε)	$4 - (-19)$	(στ)	$-11 - (-4{,}2)$
(ζ)	$15\frac{1}{3} - \left(-14\frac{1}{2}\right)$	(η)	$-19 - (-19)$	(θ)	$-\frac{1}{8} - \left(-2\frac{1}{6}\right)$

2. Να γράψετε τους επόμενους 5 όρους των πιο κάτω μοτίβων:

(α) $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ \ldots$ (β) $-10, -7, -4, -1, \ldots$

(γ) $19, 14, 9, 4, \ldots$ (δ) $-1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -6, \ldots$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $-12 + x = 0$ (β) $x + (-3) = 10$

(γ) $x - (-12) = -12$ (δ) $\frac{3}{8} - x = 0$

(ε) $x - |-4{,}6| = 0$ (στ) $x - 2{,}3 = 0$

(ζ) $\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) + \mathrm{x} = 0$ (η) $\left|-\frac{16}{5}\right| + x = 0$

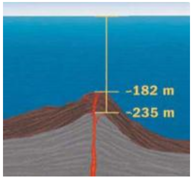
4. Να συμπληρώστε με το κατάλληλο σύμβολο $>$, $=$, $<$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $-2000\ \ldots\ldots\ -(-2000)$ (β) $-(+5)\ \ldots\ldots\ (+5) + (-10)$

(γ) $-2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}\ \ldots\ldots\ -2 - 4$ (δ) $-\left(-4\frac{1}{11}\right)\ \ldots\ldots\ -\left|-4\frac{1}{11}\right|$

(ε) $|-1| + |-2|\ \ldots\ldots\ -|-1-2|$ (στ) $-(-2) + (-3)\ \ldots\ldots\ |-1+2|$

5. Οι εκρήξεις του υποθαλάσσιου ηφαιστείου Κίκεμ-Νζένη στην Καραϊβική θάλασσα ανεβάζουν το ύψος του. Το 1962 το ηφαίστειο βρισκόταν σε υψόμετρο $-235\,m$, ενώ το 2002 σε $-182\,m$. Να υπολογίσετε τη διαφορά του ύψους του ηφαιστείου το 2002 σε σχέση με το 1962.



6. Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

(α) $(+4) - (\ldots 8) = -4$ (β) $(-3) - (\ldots 4) = +1$

(γ) $(\ldots 5) - (-3) = +8$ (δ) $(\ldots 4) - (+2) = -6$

(ε) $(\ldots\ldots) - (-5) = +1$ (στ) $(-9) - (\ldots\ldots) = -11$

(ζ) $7 - (\ldots\ldots) > 0$ (η) $-\frac{3}{4} - (\ldots\ldots) > 0$

7. Το υψίπεδο Ματάπα στην Ιορδανία, ανατολικά της Νεκράς Θάλασσας, έχει υψόμετρο $1340\,m$. Το βαθύτερο σημείο της Νεκράς Θάλασσας είναι $799\,m$ κάτω από το επίπεδο της θάλασσας. Ποια είναι η υψομετρική διαφορά μεταξύ του βαθύτερου σημείου της Νεκράς Θάλασσας και του υψιπέδου Ματάπα;

8. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $12-(11-3)+(5-7)-(8+6)$

(β) $-(13{,}7-2{,}6)+14{,}8-(-8{,}7+5)$

(γ) $\frac{7}{12}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right)$

(δ) $-200-(-198-1)-198-(-196-1)\ \ldots\ -4-(-2-1)$

9. Αν $x=-3$ και $y=+\frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:
$A=3+\left(x-y-\frac{5}{3}\right)$ και $B=|x-y|$

10. Να εξετάσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι ***κάποτε, ποτέ*** ή ***πάντοτε*** αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα, για να στηρίξετε την απάντησή σας.
(α) $Αρνητικός - Θετικός = Αρνητικός$
(β) $Αρνητικός - Αρνητικός = Θετικός$
(γ) $Θετικός - Θετικός = Θετικός$

11. Να εξετάσετε τι τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x, ώστε:
(α) $3+x=0$ (β) $3+x<0$

12. Να εκτιμήσετε την τιμή των επόμενων παραστάσεων. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε την υπολογιστική σας, για να βρείτε την ακριβή τιμή τους και να την στρογγυλοποιήσετε στην πλησιέστερη ακέραια μονάδα.
$A=(-2{,}3+7{,}2)-(-5{,}9)$ $B=(-124{,}99-4{,}8)-(+100-2{,}99)-(-10{,}3)$

13. Ο Παναγιώτης έχει πάει για διακοπές στον παππού και στη γιαγιά του που διαμένουν στις Η.Π.Α.. Ο παππούς του, όπως και αρκετοί άλλοι εργαζόμενοι, δουλεύει σε διαφορετική πολιτεία από αυτή στην οποία κατοικεί. Ο Παναγιώτης δεν μπορεί να καταλάβει πώς ενώ ο παππούς του ξεκινά το πρωί από το σπίτι του η ώρα $08:00$ και ταξιδεύει για μια ώρα, φθάνει στην εργασία του στις $08:00$.

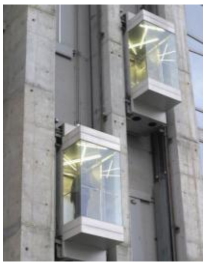
(α) Να εξηγήσετε στον Παναγιώτη πώς μπορεί να συμβαίνει αυτό.
(β) Τι ώρα πρέπει να τον περιμένει το βράδυ, αν φεύγει από την εργασία στις $17:00$.

14. Να τοποθετήσετε $+$ ή $-$ στα κενά , ώστε η πιο κάτω παράσταση να παίρνει τη μέγιστη τιμή: $(-5)\ \ldots\ldots(-6)\ldots\ldots(+3)\ldots\ldots(-9)$

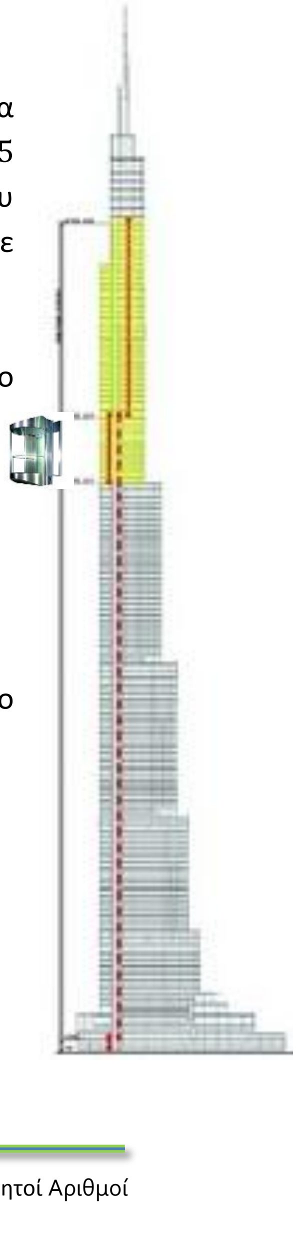
Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση

Ο ουρανοξύστης $Burj\ Khalifa$ στο Ντουπάι, με ύψος $829{,}84\ m$ και 160 ορόφους, είναι το ψηλότερο κτίριο στον κόσμο. Διαθέτει 57 ανελκυστήρες, ένας από τους οποίους κατέχει το ρεκόρ μεγαλύτερης διαδρομής, $504\ m$, που διανύει ανελκυστήρας στον κόσμο. Ο ουρανοξύστης διαθέτει, επίσης, τους ταχύτερους ανελκυστήρες στον κόσμο, οι οποίοι κινούνται με ταχύτητα 18 μέτρα ανά δευτερόλεπτο.



Ο ταχύτερος ανελκυστήρας του $Burj\ Khalifa$, σύμφωνα με τα πιο πάνω δεδομένα, ανεβαίνει ή κατεβαίνει 5 ορόφους το δευτερόλεπτο. Ένας ένοικος του κτιρίου παρατηρεί τον ανελκυστήρα. Να περιγράψετε με μαθηματικές προτάσεις τα πιο κάτω:



✓ Αν αυτή τη στιγμή ο ανελκυστήρας περνά μπροστά από τον ένοικο ανεβαίνοντας, να διατυπώσετε: *
- πού θα βρίσκεται σε 4 δευτερόλεπτα;
- πού βρισκόταν πριν 3 δευτερόλεπτα;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να ανεβεί ακόμη 20 ορόφους.
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να ανεβεί ακόμη 45 ορόφους.

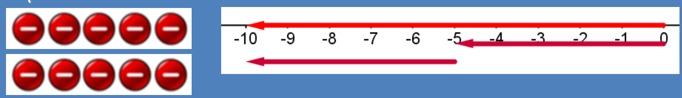
✓ Αν αυτή τη στιγμή ο ανελκυστήρας περνά μπροστά από τον ένοικο κατεβαίνοντας, να διατυπώσετε: *
- πού θα βρίσκεται σε 4 δευτερόλεπτα;
- πού βρισκόταν πριν 3 δευτερόλεπτα;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να κατεβεί ακόμη 10 ορόφους;
- πόσο χρόνο θα χρειαστεί, για να κατεβεί ακόμη 40 ορόφους;

** Με δεδομένο ότι η θέση του παρατηρητή – ένοικου το επιτρέπει.*

Ο Αλέξης για να απαντήσει στα πιο πάνω ερωτήματα κατασκεύασε το εφαρμογίδιο «A_En_4_Ginomeno_riton.ggb», το οποίο δουλεύει ως εξής:

Το γινόμενο $2 \cdot (-5) = (-5) + (-5)$ *μπορεί να θεωρηθεί ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.*

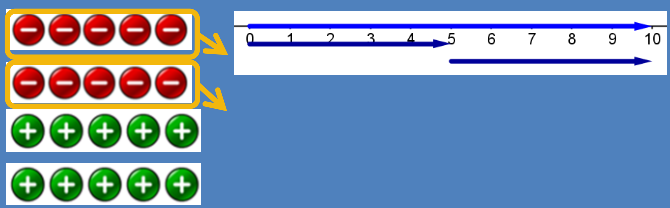
Άρα



$2 \cdot (-5) = -10$

Ενώ, το γινόμενο $(-2) \cdot (-5) = -(-5) - (-5)$ *μπορεί να θεωρηθεί ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση.*

Άρα



$(-2) \cdot (-5) = +10$

✓ Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο και να κάνετε τις παρατηρήσεις σας.

✓ Να ερμηνεύσετε το μοντέλο που χρησιμοποίησε ο Αλέξης και να διατυπώσετε ένα γενικό κανόνα για το γινόμενο *ομόσημων* και *ετερόσημων* αριθμών.

Μαθαίνω

- Το γινόμενο δυο **ομόσημων** αριθμών είναι **θετικός** αριθμός.
- Το γινόμενο δυο **ετερόσημων** αριθμών είναι **αρνητικός** αριθμός.
- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».
- Για να **πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «−».

- Ο ακόλουθος πίνακας συνοψίζει τη συμπεριφορά των προσήμων στον πολλαπλασιασμό:

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ *μπορεί να θεωρηθεί ως επαναλαμβανόμενη*

- *Πρόσθεση του* β*, αν* $\alpha > 0$
- *Αφαίρεση του* β*, αν* $\alpha < 0$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

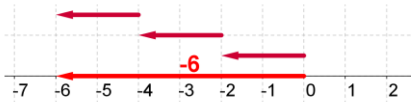
(α) $3 \cdot (-2)$ (β) $-2 \cdot (+2)$ (γ) $-2 \cdot (-3)$

(δ) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$ (ε) $(-5) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$

Λύση:

(α) $3 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2)$ *Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.*

$= -6$



ή

$= {\color{red}-}(3 \cdot 2)$

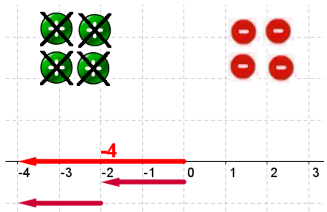
$= -6$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα το γινόμενο είναι αρνητικό.

(β) $-2 \cdot (+2) = -(+2) - (+2)$ *Η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση θετικών είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση (επαναλαμβανόμενη) των αντίστοιχων αρνητικών.*

$= -2 - 2$

$= -4$



ή

$= {\color{red}-}(2 \cdot 2)$

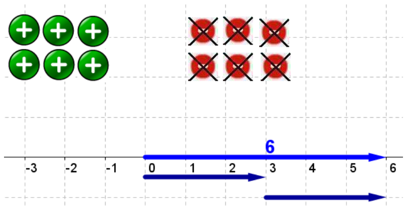
$= -4$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα το γινόμενο είναι αρνητικό.

(γ) $-2 \cdot (-3) = -(-3) - (-3)$ *Η επαναλαμβανόμενη αφαίρεση αρνητικών είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση (επαναλαμβανόμενη) των αντίστοιχων θετικών.*

$= +3 + 3$

$= +6$



ή

$= {\color{red}+}(2 \cdot 3)$

$= +6$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Άρα το γινόμενο είναι θετικό.

(δ) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) \quad = -\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}$
$\quad = -\frac{3}{10}$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα το γινόμενο είναι αρνητικό.

(ε) $(-5)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right) \quad = +\frac{5\cdot 3}{10}$
$\quad = \frac{3}{2}$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Άρα το γινόμενο είναι θετικό.

2. Ένα αυτόματο σύστημα ποτίσματος αντλεί κάθε μέρα $1000\ l$ από μία δεξαμενή, για την άρδευση του κήπου. Αν η δεξαμενή έχει σήμερα $30\ 000\ l$, να υπολογίσετε:
   (α) πόσο νερό είχε πριν από 3 ημέρες;
   (β) πόσο νερό θα έχει ύστερα από 3 ημέρες;

Λύση:
Αφού αφαιρούνται $1000\ l$ *κάθε μέρα, πριν από* 3 *ήμερες είχαμε:*
$$(-3)\cdot(-1000) = +3000$$

Άρα $+3000$ *σημαίνει ότι είχαμε* $30\ 000 + 3000 = 33\ 000\ l$

Αφού αφαιρούνται $1000\ l$ *κάθε μέρα, σε* 3 *ήμερες θα έχουμε:*
$$(+3)\cdot(-1000) = -3000$$

Άρα -3000 *σημαίνει ότι θα έχουμε* $30\ 000 - 3000 = 27\ 000\ l.$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$(-7)\cdot 2$	(β)	$(-4)\cdot 8$	(γ)	$(-2)\cdot(-5)$
(δ)	$(-6{,}2)\cdot(-3)$	(ε)	$(-3)\cdot 7$	(στ)	$(-1)\cdot(-4)$
(ζ)	$8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$	(η)	$3\cdot(-6)$	(θ)	$(-7{,}1)\cdot(-3{,}2)$
(ι)	$\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$	(ια)	$\left(-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}$	(ιβ)	$-1\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)$

2. Να συμπληρώσετε τα κενά με το κατάλληλο σύμβολο <, =, >, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

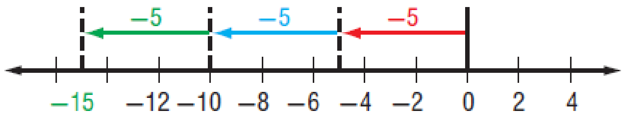
(α) $(+6)\left(-\frac{2}{3}\right)\ \ldots\ldots +5$

(β) $\left(-\frac{1}{2}\right)(+2)\ \ldots\ldots\ 0$

(γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)(+6)\ \ldots\ldots \left(+\frac{3}{5}\right)(-10)$

(δ) $(-2)-(-1)\ \ldots\ldots (-1)(-1)$

3. Να γράψετε μια μαθηματική πρόταση που να περιγράφει την πιο κάτω αναπαράσταση:



4. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) *Το γινόμενο δυο θετικών αριθμών είναι αρνητικό.* **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(β) *Ένας αρνητικός αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με έναν αρνητικό αριθμό δίνει θετικό αριθμό.* **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(γ) *Το γινόμενο τριών αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.* **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

5. Δίνονται οι πιο κάτω ακολουθίες. Να γράψετε τους τρεις επόμενους όρους των ακολουθιών και να διατυπώσετε τον κανόνα που χρησιμοποιήσατε για τον υπολογισμό του επόμενου όρου.

(α) $1, -2,\ 4, -8,\ 16\ \ \ldots$

(β) $12, -12, 12, -12, \ldots$

(γ) $1, -10, 100, -1000, \ldots$

(δ) $1, -3, 9, -27, \ldots$

6. Να βρείτε τη τιμή των παραστάσεων:

(α) $3\cdot(-6+8)$

(β) $-3+6\cdot(-2)$

(γ) $6-2\cdot(5+4)$

(δ) $6\cdot(-2)-(-8)$

(ε) $-2\cdot(-6)+(+10)-15$

(στ) $3\cdot(-6)+3\cdot 8$

(ζ) $5\cdot(-4+3)-2\cdot 21$

(η) $-2\cdot(-4)-(-1)\cdot(-1)$

7. Να εξετάσετε τι πρόσημο θα έχει το γινόμενο ενός αριθμού με τον εαυτό του.

8. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο -144 και άθροισμα -7.

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού

Διερεύνηση

Ο Μιχάλης και η Μαρίζα παίζουν το εξής παιχνίδι:

Ο πρώτος παίκτης διαλέγει όποιον αριθμό θέλει από τους αριθμούς $+1$ και -1. Ακολούθως ο δεύτερος παίκτης διαλέγει και αυτός έναν από τους αριθμούς $+1$ και -1 και τον πολλαπλασιάζει με τον αριθμό του πρώτου. Οι παίκτες συνεχίζουν με αυτό τον τρόπο εναλλάξ, πολλαπλασιάζοντας την αριθμητική παράσταση με έναν από τους πιο πάνω αριθμούς, δημιουργώντας μια παράσταση που αποτελείται από το γινόμενο των όρων που έχουν επιλέξει οι παίχτες.

Το παιχνίδι ολοκληρώνεται όταν δημιουργηθεί παράσταση με 10 όρους. Αν η παράσταση έχει αποτέλεσμα $+1$, τότε κερδίζει ο τελευταίος παίχτης, διαφορετικά κερδίζει ο πρώτος.

- ✓ Ο Μιχάλης μπορεί να επιλέξει κατά πόσο θα παίξει πρώτος ή δεύτερος. Τι πιστεύετε ότι πρέπει να επιλέξει για να κερδίσει το παιχνίδι. Να εξηγήσετε τον συλλογισμό σας.

Οι δύο παίκτες αποφάσισαν ότι μπορούν να επιλέγουν οποιοδήποτε ρητό αριθμό διαφορετικό από το μηδέν.

- ✓ Πώς θα μπορέσει ο Μιχάλης να κερδίσει (κερδίζει ο τελευταίος παίχτης αν παράσταση έχει αποτέλεσμα $+1$);

- ✓ Να εξετάσετε πώς θα απαντούσατε στα δύο πιο πάνω ερωτήματα, αν το παιχνίδι ολοκληρώνεται όταν δημιουργηθεί παράσταση με 11 όρους.

Μαθαίνω

- Στον πολλαπλασιασμό ρητών αριθμών ισχύουν οι ιδιότητες:

  Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, τότε:

  - $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$ **Αντιμεταθετική** ιδιότητα
  - $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)}$ **Προσεταιριστική** ιδιότητα
  - $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ **και** $\boldsymbol{\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma}$
    Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση.**

- Το $\mathbf{1}$ είναι το **ουδέτερο** στοιχείο του πολλαπλασιασμού, με όποιο αριθμό πολλαπλασιαστεί δεν τον διαφοροποιεί:

$$\boldsymbol{1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha}$$

- Όταν ένας ρητός αριθμός πολλαπλασιάζεται με το **0,** το γινόμενο ισούται με $\mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0}$$

- Το γινόμενο δύο ή περισσοτέρων παραγόντων είναι
  - **Αρνητικό**, αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **περιττός** αριθμός
  - **Θετικό**, αν το πλήθος των **αρνητικών** παραγόντων είναι **άρτιος** αριθμός

- Για κάθε ρητό αριθμό α, $\alpha \neq 0$, υπάρχει μοναδικός ρητός αριθμός $\frac{1}{\alpha}$ που ονομάζεται αντίστροφός του. Το γινόμενο δυο **αντίστροφων** αριθμών είναι μονάδα. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = +1}$$

  - *Δύο ρητοί αριθμοί* $\boldsymbol{\alpha}$ *και* $\boldsymbol{\beta}$ *που έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα, είναι* ***αντίστροφοι.*** *Δηλαδή,*

    $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1} \Leftrightarrow$ *ο αριθμός* $\boldsymbol{\alpha}$ *είναι* ***αντίστροφος*** *του αριθμού* ***β,*** $\left(\alpha = \frac{1}{\beta}\right)$ *και ο* ***β*** *είναι ο* ***αντίστροφος*** *του* $\boldsymbol{\alpha}$ $\left(\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\alpha}\right)$.

    Παράδειγμα:

    Οι αριθμοί -4 *και* $-\frac{1}{4}$ *είναι αντίστροφοι.*

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης, όταν $\alpha = 0{,}5$.

$$A = \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Λύση:

Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή. Εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με τους κανόνες προτεραιότητας

$$\begin{aligned} A &= \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \\ &= 0{,}5 \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 0{,}5 \cdot (0{,}5 + 0{,}5) \cdot (0{,}5 - 0{,}5) \\ &= 0{,}5 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$B = (-2)(+3)(-4)(+5) + (-2)(-3)(-4)(+5)$$

Λύση:

Υπολογίζουμε το πρόσημο του κάθε γινομένου. Το πρώτο γινόμενο έχει 2 αρνητικούς παράγοντες και επομένως είναι θετικό. Το δεύτερο γινόμενο έχει 3 αρνητικούς παράγοντες και επομένως είναι αρνητικό.

$$\begin{aligned} B &= (-2)(+3)(-4)(+5) + (-2)(-3)(-4)(+5) \\ &= \cancel{+(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} \cancel{- (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Αφού οι παράγοντες είναι οι ίδιοι θα προκύψουν δύο ***αντίθετοι*** *αριθμοί, άρα το άθροισμα είναι μηδέν.*

3. Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις:

(α) $(x + 4) - 2(x + 5)$ (β) $-\frac{1}{2}(4z - 6)$

Λύση:

(α) $(x + 4) - 2(x + 5) = x + 4 - 2x - 10 = 1x - 2x + 4 - 10 = -x - 6$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα και απλοποιούμε την αλγεβρική παράσταση κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων.

(β) $-\frac{1}{2}(4z - 6) = -\frac{1}{2} \cdot 4z - \frac{1}{2} \cdot (-6) = -2z + 3$

Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(+3)\cdot(-1)\cdot(+2)$ (β) $(+3)\cdot(-1)\cdot(-2)$

(γ) $(+3)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-2)$ (δ) $(+3)\cdot(+1)\cdot(+2)\cdot(-1)\cdot(-1)$

(ε) $(+3)\cdot 0\cdot(+2{,}5)\cdot(+1{,}22)$ (στ) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

(ζ) $(+2000)\cdot 0\cdot(-102)\cdot(-1)$ (η) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot 0$

2. Να συμπληρώσετε με τους κατάλληλους ρητούς αριθμούς ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=(\ldots\ldots)$ (β) $\left(+\frac{5}{7}\right)\cdot\left(+\frac{7}{5}\right)=(\ldots\ldots)$

(γ) $\left(-\frac{2012}{2013}\right)\cdot\left(-\frac{2013}{2012}\right)=(\ldots\ldots)$ (δ) $2\cdot(\ldots\ldots)\ =\ +1$

(ε) $(\ldots\ldots)\cdot(-5)=0$ (στ) $\left(+2\frac{1}{2}\right)\cdot(\ldots\ldots)=\left(-2\frac{1}{2}\right)\cdot(+1)$

(ζ) $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(\ldots\ldots)=-1$ (η) $(-2012)\cdot(\ldots\ldots)=(-1)-(-2)$

3. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Ρητός Αριθμός	$+3$		$-2{,}5$		
Αντίθετος		$+7$			$-1\frac{2}{7}$
Αντίστροφος				$-\frac{3}{5}$	

4. Δίνονται οι ρητούς αριθμοί $-2{,}5$, $+9$, 0 , -1 , $+10$, -2100. Να βρείτε ποιο ζεύγος αριθμών δίνει:
   (α) το μέγιστο γινόμενο
   (β) το ελάχιστο γινόμενο

5. Να εξετάσετε κατά πόσο δύο αντίστροφοι ρητοί αριθμοί μπορούν να έχουν άθροισμα μηδέν.

6. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις στην πιο απλή τους μορφή:

(α)	$(4+x)-(x+2)$	(β)	$(x+2)-7$
(γ)	$\frac{1}{2}\cdot(6\alpha+32)$	(δ)	$-0{,}2\cdot(\kappa-1)$
(ε)	$5\cdot(3x-2)+7x$	(στ)	$6-(x-5)+7$
(θ)	$4(\mu+7)-6(4-\mu)$	(ι)	$-5(y-11)+2y$

7. Τι θα συμβεί στο γινόμενο πολλών παραγόντων, διάφορων του μηδενός, όταν αλλάξουμε το πρόσημο:
   (α) σε έναν παράγοντα
   (β) σε δύο παράγοντες
   (γ) σε τρεις παράγοντες

8. Να γράψετε με 8 διαφορετικούς τρόπους το -6 ως γινόμενο δύο ή περισσοτέρων ακεραίων παραγόντων.

9. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων, αντικαθιστώντας με $x=-1$.
   $A \;=\; 2x+x\,(x\;+1)$
   $B \;=\; (3x\;+\;2)(5x\;+\;4)(1-\;x)(x\;+\;0{,}5)$
   $\Gamma \;=\; x(-2010)(-2011)(-2012)\;+\;x(-2012)(-2011)(+2010)$
   $\Delta \;=\; x(-2)(+3)(+5)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\;+\;x(-2)(-3)(-5)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

10. Σε έναν κινηματογράφο πωλήθηκαν 350 εισιτήρια των €6 και των €9.
    (α) Αν πωλήθηκαν x εισιτήρια των €6, να εκφράσετε συμβολικά:
       i. τον αριθμό των εισιτήριων των €9 που πωλήθηκαν,
       ii. την είσπραξη από τα εισιτήρια των €6,
       iii. την είσπραξη από τα εισιτήρια των €9,
       iv. την συνολική είσπραξη.

    (β) Αν γνωρίζουμε ότι πωλήθηκαν συνολικά 120 εισιτήρια των €6, να υπολογίσετε πόσα χρήματα ήταν η συνολική είσπραξη.

11. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $B=2(x-3y)+4(2y-x)-2(3-2x)$. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης B, όταν $x+y=4$.

Διαίρεση Ρητών Αριθμών

Διερεύνηση (1)

Σε ένα εργαστήριο γενετικής θέλουν να εξετάσουν πώς συμπεριφέρεται ένας ιός καθώς αλλάζει η θερμοκρασία. Έχει σχεδιαστεί ένα πείραμα στο οποίο έχει δοθεί εντολή στον υπολογιστή να μεταβάλλει τη θερμοκρασία της καλλιέργειας κατά $-2\ ^{\circ}\mathrm{C}$ ανά ώρα.

- ✓ Αν ο επιστήμονας θέλει να πετύχει μείωση $12\ ^{\circ}\mathrm{C}$, σε πόσες ώρες θα το πετύχει;
- ✓ Αν στις $08:00$ η θερμοκρασία είναι στους $2\ ^{\circ}\mathrm{C}$, πότε θα φθάσει στους $-8\ ^{\circ}\mathrm{C}$;
- ✓ Ποια ήταν η θερμοκρασία στις $03:00$, αν στις $08:00$ η θερμοκρασία ήταν $2\ ^{\circ}\mathrm{C}$;

Διερεύνηση (2)

Να βρείτε τους κοινούς ακέραιους αριθμούς που διαιρούν το -12 και -15.

- ✓ Να εξετάσετε πως συνδέεται η πράξη του πολλαπλασιασμού με την πράξη της διαίρεσης.
- ✓ Να διατυπώσετε έναν κανόνα για το πώς υπολογίζουμε το πηλίκο δύο ρητών αριθμών.

Μαθαίνω

- Το πηλίκο δυο **ομόσημων ρητών** αριθμών είναι **θετικό.**
- Το πηλίκο δυο **ετερόσημων ρητών** αριθμών είναι **αρνητικό**.
- Για να **διαιρέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς**, **διαιρούμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «$+$».
- Για να **διαιρέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, **διαιρούμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «$-$».

- Το πηλίκο και το γινόμενο ακολουθούν τους ίδιους κανόνες σε ότι αφορά στο πρόσημο.

:	+	−
+	+	−
−	−	+

- Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο του α επί τον αντίστροφό του αριθμού β

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}}, \quad \beta \neq 0$$

  - *Παρατήρηση*
    *Διαίρεση **με διαιρέτη το μηδέν** δεν ορίζεται.*

- Ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{\frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}}$$

- Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να ορισθούν ως εξής:
  Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν είναι ακέραιοι αριθμοί και ν είναι διαφορετικός από το μηδέν. Δηλαδή,
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \ / \ \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{Z},\ \nu \neq 0 \right\}$

- **Σύνθετο κλάσμα** ονομάζεται το κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον από τους δύο όρους του είναι κλάσμα. Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό διαιρώντας τον αριθμητή με τον παρονομαστή.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \qquad \beta \neq 0\,, \gamma \neq 0, \delta \neq 0$$

- Στη διαίρεση ρητών αριθμών ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

  - **Επιμεριστική ιδιότητα** της διαίρεσης ως προς την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση.** Δηλαδή, αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ και $\alpha \neq 0$, τότε:

$$\boldsymbol{(\beta + \gamma) : \alpha = \beta : \alpha + \gamma : \alpha} \qquad \textbf{και} \qquad \boldsymbol{(\beta - \gamma) : \alpha = \beta : \alpha - \gamma : \alpha}$$

- Ειδικές περιπτώσεις:
  - $\boldsymbol{\alpha : \alpha = 1}$, $\alpha \neq 0$
  - $\boldsymbol{\alpha : 1 = \alpha}$
  - $\boldsymbol{0 : \alpha = 0}$, $\alpha \neq 0$

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

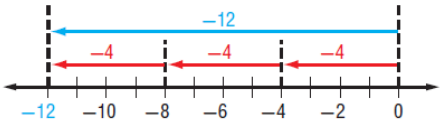
(α) $-12 : 3$ (β) $-24 : (-3)$ (γ) $\frac{-55}{11}$

(δ) $\frac{-28-14}{-7}$ (ε) $\frac{5}{12} : \left(-\frac{4}{25}\right)$

Λύση:

(α) $-12 : 3 \quad = -(12 : 3)$
$\quad = -4$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα το πηλίκο είναι αρνητικό.



(β) $-24 : (-3) \quad = +(24 : 3)$
$\quad = 8$

Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Άρα το πηλίκο είναι θετικό.

(γ) $\frac{-55}{11} \quad = -\frac{55}{11}$
$\quad = -5$

Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα το πηλίκο είναι αρνητικό.

(δ) $\frac{-28-14}{-7} \quad = \frac{-42}{-7}$
$\quad = +6$

Εκτελούμε πρώτα την πράξη στον αριθμητή και ακολούθως τη διαίρεση. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. Άρα το πηλίκο είναι αρνητικό.

(ε) $\frac{5}{12} : \left(-\frac{4}{25}\right) \quad = \frac{5}{12} \cdot \left(-\frac{25}{4}\right)$
$\quad = -\frac{125}{48}$
$\quad = -2\frac{29}{48}$

Μετατρέπουμε τη διαίρεση σε πολλαπλασιασμό, αντιστρέφοντας το διαιρέτη.

2. Από στοιχεία της NASA φαίνεται ότι η μέση θερμοκρασία στην επιφάνεια του Άρη είναι -85 βαθμοί Φαρενάιτ. Χρησιμοποιήστε τον τύπο, $C = \frac{5(F-32)}{9}$ όπου F η θερμοκρασία σε βαθμούς Φαρενάιτ και C η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου, για να βρείτε τη θερμοκρασία του Άρη σε βαθμούς Κελσίου.

Λύση:

$C = \frac{5(F-32)}{9} = \frac{5(-85-32)}{9}$ *Αντικαθιστούμε το F με -85.*

$= \frac{5(-117)}{9}$ *Υπολογίζουμε το άθροισμα.*

$= \frac{-585}{9}$ *Υπολογίζουμε το γινόμενο.*

$= -65$ *Διαιρούμε τους δυο ετερόσημους αριθμούς.*

3. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(-\frac{2012}{2013}\right)\cdot\left(-\frac{2013}{2012}\right)-(-3+1+2):(-2)$

Λύση:

Εφαρμόζουμε τους κανόνες προτεραιότητας που ισχύουν και στις αριθμητικές παραστάσεις ρητών αριθμών.

$\left(-\frac{2012}{2013}\right)\cdot\left(-\frac{2013}{2012}\right)-(-3+1+2):(-2)$ *Εκτελούμε την πράξη στην παρένθεση.*

$=\left(-\frac{2012}{2013}\right)\cdot\left(-\frac{2013}{2012}\right)-\ 0:(-2)$ *Εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.*

$=(+1)-0$ *Εκτελούμε την αφαίρεση.*

$=+1$

Δραστηριότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α)	$(-10):(-2)$	(β)	$(-15):5$	(γ)	$18:(-3)$
(δ)	$(-70):(-7)$	(ε)	$(-2{,}1):(-3)$	(στ)	$(-4{,}5):9$
(ζ)	$50:(-0{,}5)$	(η)	$(-100{,}24):(-4)$	(θ)	$80:(-2)$
(ι)	$\frac{3}{25}:\left(-\frac{21}{10}\right)$	(ια)	$\left(-1\frac{2}{3}\right):5$	(ιβ)	$(-7):\left(-\frac{1}{14}\right)$

2. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις και να τις συγκρίνετε:

$\mathrm{A}=\frac{10}{-2}$ $\qquad \mathrm{B}=-20:5$ $\qquad \Gamma=(-4):(-3)$

$\Delta=(-2):(+5)$ $\qquad \mathrm{E}=8:(-10)$ $\qquad \mathrm{Z}=(-12):(-16)$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων, όταν $\alpha=12$, $\beta=-4$ και $\gamma=-6$:

(α)	$\alpha:\beta$	(β)	$\frac{-\alpha}{\gamma}$	(γ)	$\alpha\cdot\beta:16$
(δ)	$\frac{16-(-\alpha)}{-\beta}$	(ε)	$\gamma^2:\alpha$	(στ)	$\frac{\alpha^2}{\beta^2}$
(ζ)	$\frac{\alpha\cdot\beta+\gamma\alpha}{\beta}$	(η)	$\frac{(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)}{\gamma}$		

4. Να βρείτε τους κοινούς ακέραιους αριθμούς που διαιρούν το -20 και το -15.

5. Να συμπληρώσετε με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

(α) $(+32) : (+8) = \ldots..$

(β) $(-24) : (-6) = \ldots..$

(γ) $(-25) : (\ldots..) = +5$

(δ) $(+24) : (\ldots..) = +2$

(ε) $(\ldots..) : (-3) = -4$

(στ) $(\ldots..) : (-5) = -5$

(ζ) $(-4) : (\ldots..) = -\frac{1}{2}$

(η) $(+3) : (\ldots..) = -9$

(θ) $\frac{-40}{+5} = \ldots..$

(ι) $-\frac{4}{\ldots\ldots} = -2$

(ια) $\frac{\ldots\ldots}{-12} = +2$

(ιβ) $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = -2$

6. Να βρείτε τρεις διαφορετικούς αριθμούς που διαιρούνται με το $+2$ και έχουν άθροισμα $+4$.

7. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία στην Ανταρκτική κατά τους μήνες Ιούλιο μέχρι Δεκέμβριο.

Μήνας	Ιούλιος	Αύγουστος	Σεπτέμβριος	Οκτώβριος	Νοέμβριος	Δεκέμβριος
Θερμοκρασία °F	-43	-58	-50	-41	-40	-20

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $C = \frac{5(F-32)}{9}$ να μετατρέψετε τη μέση θερμοκρασία του Ιουλίου και του Αυγούστου σε βαθμούς Κελσίου.

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x - 7 = -16$

(β) $\alpha + 6 = 3$

(γ) $y + 2 = -4$

(δ) $\beta + 14 = 10$

(ε) $8x = -24$

(στ) $-6y = -1$

(ζ) $a : (-2) = -3$

(η) $\frac{x}{5} = -2$

(θ) $-12 = 2z$

(ι) $\frac{\kappa}{-5} = -30$

(ια) $2x + 3 = -11$

(ιβ) $5\omega - 12 = -62$

9. Να εξετάσετε πότε το πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών είναι:

(α) Ίσο με $+1$

(β) Ίσο με -1

(γ) Ίσο με 0

10. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-12-4):(-4)$ (β) $(-9+3):(-2-4)$

(γ) $(-2+3-1):(-3+2)$ (δ) $(-2-5-1):(-3+1)$

(ε) $\left(+\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right):\left(-\frac{9}{28}\right)$ (στ) $\left(-\frac{2}{11}\right):(-4-2)$

(ζ) $\dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}}$ (η) $\dfrac{-\frac{2}{5}}{-4}$

11. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) $(12+6):2=12:2+6:2$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(α) $[(-36)-(+6)]:(-2)=(-36)-(+6):(-2)$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(β) $[25+(-10)]:(-5)=25:(-5)+(-10):(-5)$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(γ) $2:(3+5)=2:3+2:5$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

12. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $42-7\cdot(-5)$ (β) $15-[4\cdot(2+3)-8]$

(γ) $127-25\cdot(-1+2)$ (δ) $\dfrac{-2-4}{(-6)(-1)}$

(ε) $\dfrac{-(-2)+(+8-3)}{-(-9+5+3)}$ (στ) $\dfrac{-2-(-6)(+1)}{(-2+4)(-1)}$

(ζ) $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)}{(-2)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}$ (η) $\dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{-2:\left(-\frac{4}{3}\right)}$

(θ) $\dfrac{(-6)(+2)+(-4-3)+1}{(-8+10)+7}$ (ι) $\left(2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(+2\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2009}+\frac{1}{2009}\right)$

13. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

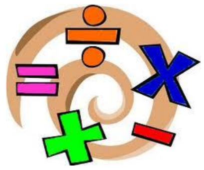
(α) $(-20):2-(-2)$

(β) $(-21)+6:3$

(γ) $10+3\cdot2-7$

(δ) Να τοποθετήσετε παρενθέσεις/αγκύλες σε κάθε παράσταση για να έχει η κάθε παράσταση αποτέλεσμα -5.

14. Να τοποθετήσετε στα κενά το κατάλληλο σύμβολο $(+,\ -,\ \cdot,\ :)$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:



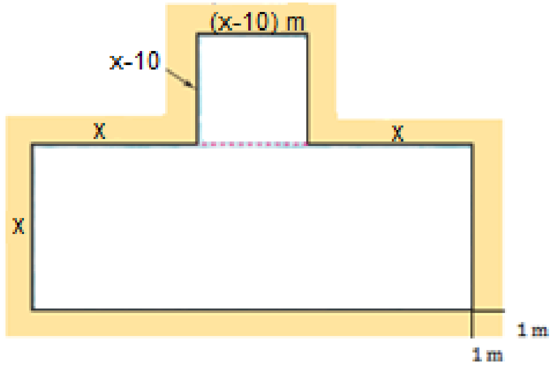
(α) $(-10)\ \ldots\ldots (-2)\ \ldots\ldots (+1) = 21$

(β) $(-5)\ \ldots\ldots (-2)\ \ldots\ldots (+4) = 1$

(γ) $6\ \ldots\ldots (-7)\ \ldots\ldots (+2) = -44$

(δ) $(-8)\ \ldots\ldots (-2)\ \ldots\ldots (-2\ ) = -9$

15. Να υπολογίσετε πόσα πλακάκια σχήματος τετραγώνου $1\,m$ x $1\,m$ χρειάζονται, για να καλυφθεί ο χώρος γύρω από την πισίνα συναρτήσει του x.

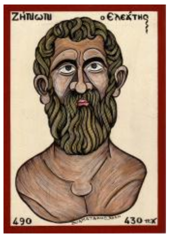


16. Να τοποθετήσετε **παρενθέσεις ή αγκύλες** στην πιο κάτω παράσταση, ώστε να προκύψει η παράσταση με την ελάχιστη τιμή.

$$(-5) + (+4) - (-2) : (-1) \cdot (-3)$$

Περιοδικοί Ρητοί αριθμοί

Εξερεύνηση



Ο αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος Ζήνωνας έζησε στην Ελέα της Κάτω Ιταλίας το $490 - 430\ \pi.X.$. Έγινε διάσημος για τα **παράδοξα** που διατύπωσε, μεταξύ των οποίων το πιο γνωστό είναι το παράδοξο του Αχιλλέα με την χελώνα. Ενώ σύμφωνα με τον Όμηρο, ο Αχιλλέας φημιζόταν για την ταχύτητά του, ο Ζήνωνας ισχυριζόταν, ότι δεν μπορεί να φτάσει ποτέ μια χελώνα, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (περίπου $192\ m$) από αυτόν, έστω και αν αυτός βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα.

✓ Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του Ζήνωνα.

Διερεύνηση

Στον πιο κάτω πίνακα ο Άγγελος έχει γράψει τα κλάσματα $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{16}$ ως δεκαδικούς αριθμούς.

Κλάσμα	Δεκαδικός αριθμός	Κλάσμα	Δεκαδικός αριθμός
1	1	$\frac{1}{9}$	0,111111111111 ….
$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{1}{10}$	0,1
$\frac{1}{3}$	0,333333333333 …	$\frac{1}{11}$	0,090909090909 …
$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{1}{12}$	0,833333333333 …
$\frac{1}{5}$	0,2	$\frac{1}{13}$	0,076923076923 …
$\frac{1}{6}$	0,666666666666 …	$\frac{1}{14}$	0,0714285714285714 …
$\frac{1}{7}$	0,142857142857 …	$\frac{1}{15}$	0,066666666666666 …
$\frac{1}{8}$	0,125	$\frac{1}{16}$	0,625

✓ Να μελετήσετε τον πίνακα και να γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

✓ Ο Άγγελος ισχυρίζεται ότι όλα τα κλάσματα, που ο παρονομαστής τους μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο με παράγοντες δυνάμεις του 2 ή/και του 5, αναλύονται σε δεκαδικούς με πεπερασμένα στο πλήθος δεκαδικά ψηφία. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του.

Μαθαίνω

- Ένας δεκαδικός αριθμός ονομάζεται **περιοδικός δεκαδικός**, όταν έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και στη δεκαδική μορφή του επαναλαμβάνεται ένα «τμήμα» του αριθμού. Το επαναλαμβανόμενο «τμήμα» του αριθμού ονομάζεται **περιοδικό τμήμα**. Το πλήθος των ψηφίων του περιοδικού τμήματος ονομάζεται **περίοδος**.

- Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως **δεκαδικός** με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων ή ως **περιοδικός δεκαδικός** και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

- Για να υποδείξουμε ότι επαναλαμβάνεται ένα ψηφίο ή ομάδα ψηφίων βάζουμε μία παύλα πάνω από το επαναλαμβανόμενο ή τα επαναλαμβανόμενα ψηφία, όπως φαίνεται στα πιο κάτω παραδείγματα:

  Παράδειγμα:

  $0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$, *το 3 είναι το περιοδικό τμήμα του αριθμού ενώ η περίοδος του αριθμού είναι 1. Ο αριθμός είναι απλός περιοδικός.*

  $-34{,}23181818\ldots = -34{,}23\overline{18}$, *το 18 είναι το περιοδικό τμήμα του αριθμού ενώ η περίοδος του αριθμού είναι 2.*

- Ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός ονομάζεται **απλός περιοδικός**, όταν το περιοδικό τμήμα αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή.

  Παράδειγμα: $0{,}\overline{3}$

- Ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός ονομάζεται **μικτός περιοδικός**, όταν το περιοδικό τμήμα δεν αρχίζει αμέσως μετά την υποδιαστολή.

  Παράδειγμα: $-34{,}23\overline{18}$

- Για να μετατρέψουμε έναν **απλό περιοδικό** δεκαδικό αριθμό σε κλασματική μορφή, ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:
  - Θέτουμε τον αριθμό ίσο με μια μεταβλητή.
  - Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με τη δύναμη του 10 που έχει εκθέτη την περίοδο του αριθμού.
  - Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

  Η λύση της εξίσωσης είναι η κλασματική μορφή του περιοδικού αριθμού.

- Για να μετατρέψουμε ένα **μικτό περιοδικό** δεκαδικό αριθμό σε κλασματική μορφή, ακολουθούμε τα πιο κάτω βήματα:
  - Θέτουμε τον αριθμό ίσο με μια μεταβλητή.
  - Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα με τη κατάλληλη δύναμη του 10 ώστε να προκύψει απλός περιοδικός αριθμός.
  - Ακολουθούμε τα βήματα της διαδικασίας μετατροπής απλού περιοδικού δεκαδικού αριθμού.

Παραδείγματα

1. Να γράψετε τους πιο κάτω αριθμούς σε δεκαδική μορφή:

(α) $2\frac{3}{5}$ (β) $\frac{-5}{3}$

(γ) $\frac{5}{8}$

Λύση:

(α) *Ο αριθμός* $2\frac{3}{5}$ *μπορεί να γραφεί* $2\frac{3}{5} = 2\frac{6}{10} = 2{,}6$.

(β) *Ο αριθμός* $\frac{5}{8}$ *ισοδυναμεί με το πηλίκο του* $5 : 8$

$$\begin{array}{r|l} 5{,}000 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{-48} & 0{,}625 \\ 20 & \\ \underline{-16} & \\ 40 & \\ \underline{-40} & \\ 0 & \end{array}$$

Επομένως, $\frac{5}{8} = 0{,}625$

(γ) *Για να γράψουμε τον αριθμό* $\frac{-5}{3}$ *ως δεκαδικό, διαιρούμε τον αριθμό 5 με τον 3 και βάζουμε το αρνητικό πρόσημο.*

$$\begin{array}{r|l} 5{,}000 & \;\;3 \\ \cline{2-2} \underline{-3} & 1{,}666 \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \\ \underline{-18} & \\ 20 & \\ \vdots & \end{array}$$

Επομένως, $\frac{-5}{3} = -\frac{5}{3} = -1{,}666\cdots = -1{,}\overline{6}$

2. Να μετατρέψετε τον αριθμό $0,\overline{3}$ σε κλασματικό αριθμό.

Λύση:

$x = 0{,}333\ldots$ — *Θέτουμε τον αριθμό ίσο με x.*

$10x = 3{,}333\ldots$ — *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 10.*

$10x - x = 3{,}333\ldots - 0{,}333\ldots$
$\Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ — *Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και λύουμε την εξίσωση που προκύπτει.*

Άρα $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

3. Να μετατρέψετε τον αριθμό $0{,}58\overline{6}$ σε κλασματικό αριθμό.

Λύση:

$x = 0{,}58666\ldots$ — *Θέτουμε τον αριθμό ίσο με x.*

$100x = 58{,}666\ldots$ — *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 100 για να γίνει απλός περιοδικός δεκαδικός αριθμός.*

$1000x = 586{,}66\ldots$ — *Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το 1000.*

$1000x - 100x = 586{,}66\ldots - 58{,}666\ldots$
$\Rightarrow 900x = 528 \Rightarrow x = \frac{528}{900} = \frac{44}{75}$ — *Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο ισότητες και λύουμε την εξίσωση που προκύπτει.*

Άρα $0{,}58\overline{6} = \frac{44}{75}$

Δραστηριότητες

1. Να βρείτε με ποιο κλασματικό αριθμό είναι ίσοι οι επόμενοι περιοδικοί αριθμοί:
   (α) $4,\overline{7}$ (β) $0{,}2\overline{8}$ (γ) $3{,}4\overline{17}$

2. Να γράψετε τα κλάσματα $1\frac{3}{11}$ και $\frac{-5}{6}$ σε δεκαδική μορφή.

3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
   (α) $1,\overline{1}$ και $1{,}11111111$
   (β) $3{,}6\overline{8}$ και $3{,}86$
   (γ) $4{,}9\overline{12}$ και $4{,}9\overline{102}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξερεύνηση

Όταν πέθανε ο Διόφαντος, ένας μεγάλος Έλληνας μαθηματικός του $3^{ου}$ μ.Χ. αιώνα, οι μαθητές του – κατά παραγγελία του – αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του.

«Διαβάτη σε αυτό τον τάφο αναπαύεται ο Διόφαντος. Σε εσένα που είσαι σοφός, η επιστήμη θα δώσει το μέτρο της ζωής του. Άκουσε:

– Ο Θεός του επέτρεψε να είναι νέος για το ένα έκτο της ζωής του.

– Ακόμη ένα δωδέκατο και φύτρωσε το μαύρο γένι του.

– Μετά από ένα έβδομο ακόμα ήρθε του γάμου του η μέρα.

– Τον πέμπτο χρόνο αυτού του γάμου γεννήθηκε ένα παιδί.

– Τι κρίμα για το νεαρό γιο. Αφού έζησε μονάχα τα μισά χρόνια από τον πατέρα του γνώρισε την παγωνιά του θανάτου.

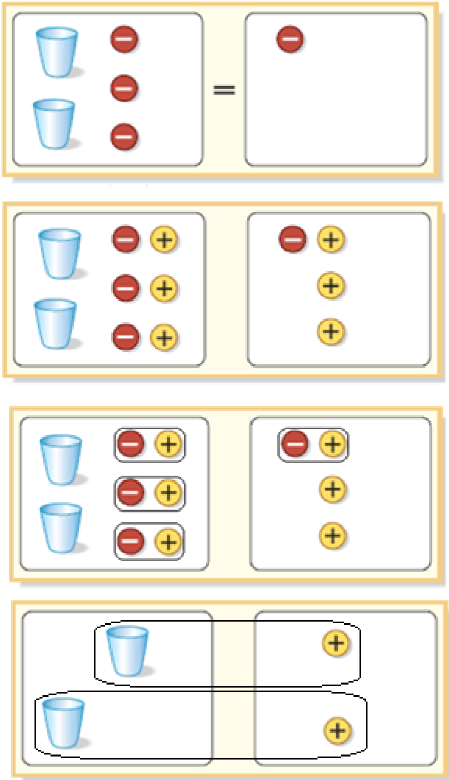
– Τέσσερα χρόνια αργότερα ο Διόφαντος βρήκε παρηγοριά στη θλίψη του φτάνοντας στο τέλος της ζωής του» .

✓ Πώς θα μπορούσε ένας διαβάτης να υπολογίσει την ηλικία του Διόφαντου;

Οι εργασίες του Διόφαντου είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας. Από τα 13 έργα του σώθηκαν μόνο τα 10. Στο πιο διάσημο από τα έργα του «Αριθμητικά», χρησιμοποιείται για πρώτη φορά η μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμή του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζονται «Διοφαντικές εξισώσεις».

Διερεύνηση (1)

Να βρείτε την εξίσωση που η λύση της αναπαρίσταται στο πιο κάτω διάγραμμα και να εξηγήσετε πώς επιλύουμε εξισώσεις με βάση το πιο κάτω μοντέλο.



Μαθαίνω

- Σε μια εξίσωση οι όροι που περιέχουν μεταβλητή ονομάζονται **άγνωστοι όροι** της εξίσωσης.
    - *Στην Α' Γυμνασίου θα ασχοληθούμε μόνο με εξισώσεις που περιέχουν μία μεταβλητή.*

- Δύο ή περισσότερες **εξισώσεις** λέγονται **ισοδύναμες,** αν έχουν την ίδια λύση.

- Επίλυση **εξίσωσης** είναι η διαδικασία που εφαρμόζουμε, για να βρούμε την τιμή της μεταβλητής που επαληθεύει την εξίσωση.

- Για να λύσουμε μια εξίσωση θα πρέπει να δημιουργήσουμε μια **ισοδύναμη** εξίσωση με την αρχική, η οποία θα έχει τη **μεταβλητή στο ένα μέλος.**

- **Επίλυση εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x = \beta}$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$**

$$\boldsymbol{\alpha x = \beta}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το α, $\alpha \neq 0$. (ιδιότητες ισοτήτων).

$$\Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{\alpha x}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

*Ο αριθμός α ονομάζεται **συντελεστής της μεταβλητής**.*

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha}\, x}{\cancel{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

- **Επίλυση εξίσωσης $\boldsymbol{x + \beta = \gamma}$**

$$\boldsymbol{x + \beta = \gamma}$$

Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη τον αριθμό β (ιδιότητες ισοτήτων).

$$\Leftrightarrow x + \cancel{\beta} - \cancel{\beta} = \gamma - \beta$$

$$\Leftrightarrow x = \gamma - \beta$$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος μπορεί να μεταφέρεται από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημο (αντίθετο πρόσημο).

- **Επίλυση εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha x + \beta = \gamma}$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$**

$$\boldsymbol{\alpha x + \beta = \gamma,}$$

Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη τον αριθμό β (ιδιότητες ισοτήτων).

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό α, $\alpha \neq 0$ (ιδιότητες ισοτήτων).

$$\Leftrightarrow \alpha x + \cancel{\beta} - \cancel{\beta} = \gamma - \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha x = \gamma - \beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha}\, x}{\cancel{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{\gamma - \beta}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}$$

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την εξίσωση $4x + 3 = 5x - 5 - 3x$

Λύση:

$4x + 3 = 5x - 5 - 3x$

$\Leftrightarrow\ 4x + 3 = 5x - 5 - 3x$

$\Leftrightarrow\ 4x - 5x + 3x = -5 + 3$ *Διαχωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.*

$\Leftrightarrow\ 2x = -2$ *Γίνεται αναγωγή ομοίων όρων.*

$\Leftrightarrow\ \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2}$ *Διαιρούμε με το συντελεστή της μεταβλητής.*

$\Leftrightarrow\ x = \frac{-2}{2}$

$\Leftrightarrow\ x = -1$ *Λύση της εξίσωσης.*

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$

Λύση:

$\frac{2y}{3} + 1 = \frac{y}{2} - \frac{y+3}{3}$

$\Leftrightarrow \overset{2}{\frac{2y}{3}} + \overset{6}{\frac{1}{1}} = \overset{3}{\frac{y}{2}} - \overset{2}{\frac{y+3}{3}}$ *Βρίσκουμε το $Ε.Κ.Π.[3,2,1] = 6$ και μετατρέπουμε σε ομώνυμα.*

$\Leftrightarrow \frac{4y+6}{6} = \frac{3y-2(y+3)}{6}$ *Απαλείφουμε τους παρονομαστές εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ισοτήτων.*

$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2(y + 3)$ *Απαλείφουμε τις παρενθέσεις.*

$\Leftrightarrow 4y + 6 = 3y - 2y - 6$

$\Leftrightarrow 4y - 3y + 2y = -6 - 6$ *Διαχωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους.*

$\Leftrightarrow 3y = -12$ *Γίνεται αναγωγή ομοίων όρων.*

$\Leftrightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-12}{3}$ *Διαιρούμε με το συντελεστή της μεταβλητής.*

$\Leftrightarrow y = -4$ *Βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.*

3. Σε ένα κουτί υπάρχουν 30 κέρματα των 5 και 10 σεντ.
   (α) Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση που να εκφράζει την αξία των κερμάτων.
   (β) Αν η αξία των κερμάτων είναι €2,40, να βρείτε πόσα κέρματα από κάθε είδος υπάρχουν;

Λύση:

(α) *Έστω* x *ο αριθμός των κερμάτων των* 5 *σεντ, τότε ο αριθμός των κερμάτων των* 10 *σέντ είναι* $30 - x$.

Αριθμός των κερμάτων των 5 *σεντ:* x
Αριθμός των κερμάτων των 10 *σεντ:* $30 - x$

Άρα, η αξία των κερμάτων των 5 *σεντ είναι:* $5x$
η αξία των κερμάτων των 10 *σεντ είναι:* $10(30 - x)$

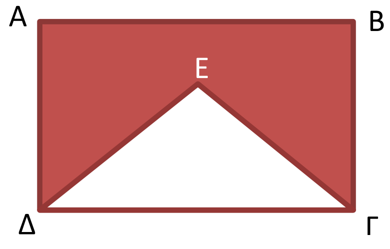
$$\begin{aligned} A\xi\acute{\iota}\alpha &= 5x + 10(30 - x) \\ &= 5x + 300 - 10x \\ &= 300 - 5x \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} &A\xi\acute{\iota}\alpha = 240 \\ \Leftrightarrow\ &300 - 5x = 240 \\ \Leftrightarrow\ &-5x = 240 - 300 \\ \Leftrightarrow\ &-5x = -60 \\ \Leftrightarrow\ &-\frac{5x}{-5} = \frac{-60}{-5} \\ \Leftrightarrow\ &x = 12 \end{aligned}$$

Άρα τα κέρματα των 5 *σεντ είναι* 12, *ενώ τα κέρματα των* 10 *σεντ είναι* 18.

4. Στο διπλανό σχήμα $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο ενώ το $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με τις πλευρές $ΔΕ = ΓΕ$. Το μήκος των $ΔΕ$ και $ΓΕ$ είναι 3 cm μικρότερο από το διπλάσιο του πλάτους $ΑΔ$ του ορθογωνίου, ενώ το μήκος $ΑΒ$ του ορθογωνίου είναι 7 cm μικρότερο από το τριπλάσιο του μήκους του $ΔΕ$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, αν η περίμετρος του σκιασμένου σχήματος είναι 38 dm.



Λύση:

Έστω $ΑΔ = x$ *το πλάτος του ορθογωνίου. Άρα, το μήκος των πλευρών* $ΔΕ$ *και* $ΓΕ$ *θα είναι* $2x - 3$, *ενώ το μήκος των πλευρών* $ΑΒ$ *και* $ΔΓ$ *θα είναι* $3(2x - 3) - 7$.

$$\begin{aligned} ΑΔ &= ΒΓ = x \\ ΔΕ &= ΕΓ = 2x - 3 \\ ΑΒ &= ΔΓ = 3(2x - 3) - 7 \\ &= 6x - 9 - 7 \\ &= 6x - 16 \end{aligned}$$

$$\Pi_{\sigma\kappa\iota\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\upsilon\ \sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = \varDelta A + AB + B\varGamma + \varGamma E + E\varDelta = 38$$
$$\Leftrightarrow x + 6x - 16 + x + 2x - 3 + 2x - 3 = 38$$
$$\Leftrightarrow x + 6x + x + 2x + 2x = 38 + 16 + 3 + 3$$
$$\Leftrightarrow 12x = 60$$
$$\Leftrightarrow \frac{12x}{12} = \frac{60}{12}$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

Άρα,

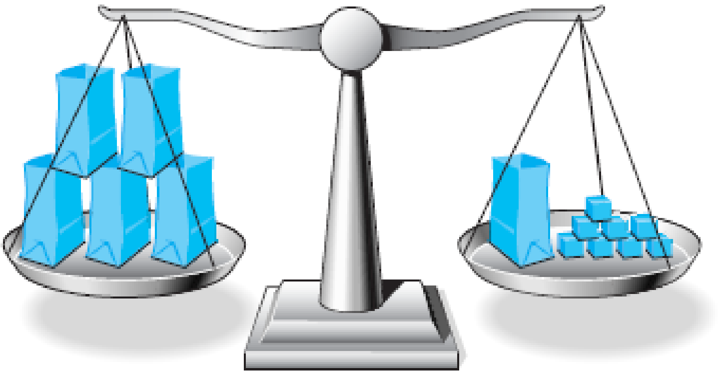
$\varDelta\varDelta = B\varGamma = 5\ dm$

$AB = \varDelta\varGamma = 6x - 16 = 14\ dm$

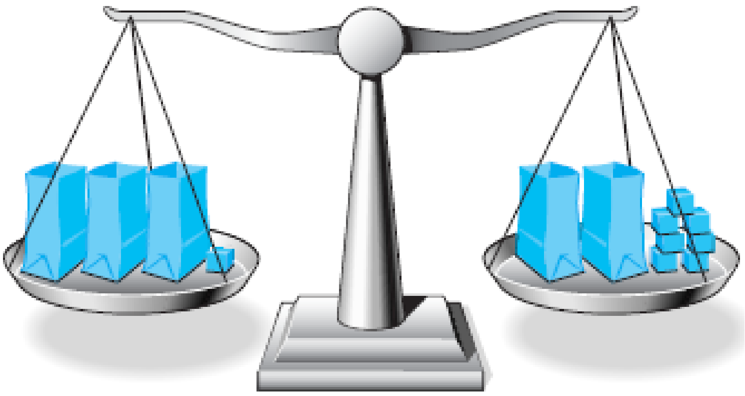
Δραστηριότητες

1. Στο καθένα από τα πιο κάτω σχήματα κάθε σακούλι περιέχει ίσο αριθμό κύβων. Να βρείτε πόσους κύβους έχει μέσα το σακούλι, αν σε κάθε περίπτωση η ζυγαριά ισορροπεί (η μάζα της σακούλας είναι αμελητέα).

(α)



(β)



2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $7 + y = -5$ (β) $4\nu = -16$

(γ) $6 - \omega = 3$ (δ) $11 = 4\alpha - 1$

(ε) $3\alpha - 4 = -19$ (στ) $5 + 2\kappa = 9 - 2\kappa$

(ζ) $8\omega - 4 + 3\omega + 26 = 3\omega - 4 + 2$

(η) $-2\beta + 4 - \beta - \beta = 2\beta + 4$

(θ) $-x + (5x - 7) = -5$

(ι) $4(1 - y) + 3y = -2(y + 1)$

(ια) $3(\alpha + 2) - (\alpha - 2) = -4(\alpha + 1)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$ (β) $\frac{\alpha - 1}{3} = \frac{5}{3}$

(γ) $\frac{y}{2} = 1$ (δ) $\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(ε) $\frac{\kappa - 3}{4} = \frac{\kappa}{6}$ (στ) $\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3} = \frac{1}{12}$

(ζ) $\frac{2\alpha}{3} - 1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}$ (η) $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x + 2}{6} = -2$

4. Να βρείτε το λάθος που έγινε στη επίλυση των πιο κάτω εξισώσεων:

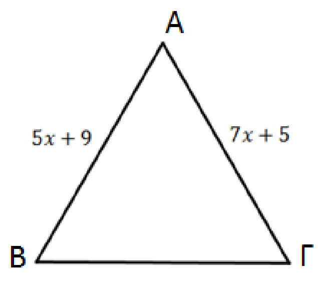
(α) $3x - 9 = 18$
$\Leftrightarrow 3x = 9$
$\Leftrightarrow x = 3$

(β) $-2y = 6$
$\Leftrightarrow y = 6 + 2$
$\Leftrightarrow y = 8$

(γ) $5 - \alpha = 9$
$\Leftrightarrow \alpha = 9 - 5$
$\Leftrightarrow \alpha = 4$

5. Να υπολογίσετε τον ακέραιο αριθμό του οποίου το τριπλάσιο ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 10.

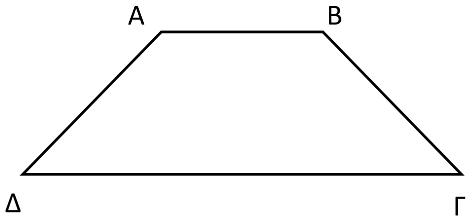
6. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ, στο διπλανό σχήμα, είναι ισόπλευρο και $AB = 5x + 9$, $A\Gamma = 7x + 5$. Να υπολογίσετε την περίμετρό του.



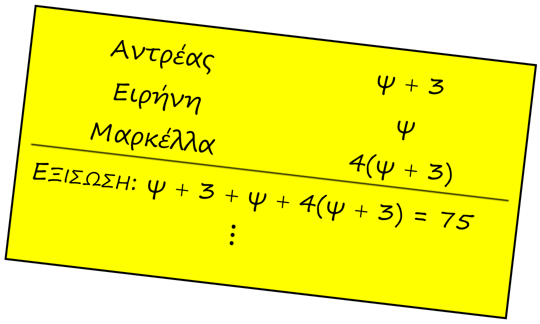
7. Σε ένα αεροπλάνο ταξιδεύουν 280 επιβάτες. Αν τα παιδιά είναι 20 λιγότερα από τις γυναίκες και οι άνδρες είναι τόσοι όσοι είναι το άθροισμα των παιδιών και των γυναικών, να υπολογίσετε πόσοι άνδρες, πόσες γυναίκες και πόσα παιδιά ταξιδεύουν.

8. Ο Κώστας έχει €5 περισσότερα από τα διπλάσια του Γιάννη. Αν ο Κώστας δώσει €6 στο Γιάννη τότε θα έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων. Να υπολογίσετε πόσα χρήματα κρατεί ο καθένας.

9. Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ στο οποίο η πλευρά ΔΓ είναι πενταπλάσια της $ΑΒ$, η $ΒΓ$ είναι $3\ cm$ μεγαλύτερη της $ΑΒ$ και η $ΑΔ$ είναι $1\ cm$ μεγαλύτερη της $ΒΓ$. Αν η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι $87\ cm$, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.



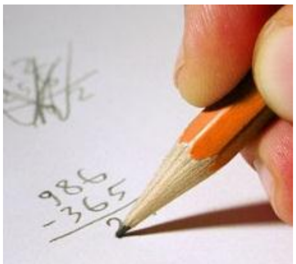
10. Ο Κυριάκος έλυσε ένα πρόβλημα όπως φαίνεται δίπλα. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα που πιθανόν να έλυσε ο Κυριάκος.



11. Σε μια εκδρομή το κανονικό εισιτήριο ήταν €10 ενώ για τους συνταξιούχους ήταν €6. Οι συνταξιούχοι ήταν 10 λιγότεροι από τους υπόλοιπους. Αν συνολικά πλήρωσαν €260, να υπολογίσετε πόσοι ήταν οι συνταξιούχοι.

12. Κόβουμε ένα σύρμα μήκους $31\ cm$ και φτιάχνουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αν η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου είναι κατά $1\ cm$ μεγαλύτερη από την πλευρά του τετραγώνου, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου και την περίμετρο του τριγώνου.

13. Ένας μαθητής απάντησε σε 50 ερωτήματα και πήρε 2 μονάδες για κάθε ορθή απάντηση, ενώ έχασε 1 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Αν τελικά ο μαθητής συγκέντρωσε 79 μονάδες, να βρείτε πόσα ερωτήματα απάντησε ορθά.



Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(-2)\cdot(-3)$

(β) $(-2)\ +(-3)$

(γ) $(-2)-(-3)$

(δ) $-2-3$

(ε) $(-3)-(-5)+(+4)$

(στ) $-3+4-|-5|$

(ζ) $-(-3)-|-5+4|$

(η) $(-3)\cdot(-5)\cdot(+4)$

(θ) $(-3-5):(-4)$

(ι) $(-5):(-4+3)$

2. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις παρακάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) Ο αντίστροφος του -10 είναι το $+\frac{1}{10}$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(β) Ο αντίθετος του -10 είναι το 10 **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(γ) $-10\ <\ 0$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(δ) $|-10|\ <\ 0$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(ε) $|-10|=\ -(-10)$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

(στ) $-10\ <\ -|-10|$ **ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

3. Να συμπληρώσετε τα κενά με τα σύμβολα $<, =, >,$ ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

(α) $0\ldots\ldots\ -1$

(β) $5\ \ldots\ldots -6$

(γ) $-9\ldots\ldots -7$

(δ) $-5\ldots\ldots|-5|$

(ε) $0\ \ldots\ldots 12$

(στ) $-\frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ +\frac{3}{5}$

(ζ) $+5\ \ldots\ldots -5\frac{3}{4}$

(η) $-3\ \frac{1}{2}\ldots\ldots -3\frac{2}{3}$

(θ) $0\ldots\ldots -\frac{2}{3}$

(ι) $-3\ \ \ldots\ldots -(+3)$

(ια) $-2010\ldots\ldots -2011\frac{1}{2}$

(ιβ) $0\ \ldots\ldots -|-4|$

4. Να γράψετε τη δεκαδική μορφή των ρητών αριθμών: $-\frac{15}{10},\ \ \frac{13}{3},\ \ \frac{20}{11},\ \ \frac{7}{8}$

5. Να εξετάσετε σε ποιο μέρος της Κύπρου, σημειώθηκε η μεγαλύτερη μεταβολή θερμοκρασίας:

Πόλη	Ελάχιστη θερμοκρασία	Μέγιστη θερμοκρασία
Λευκωσία	-1	5
Πρόδρομος	-5	-1
Λεμεσός	0	3

6. Να τοποθετήσετε στα κενά τα κατάλληλα πρόσημα, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

(α) $(+14) + (\ldots\ldots) = +5$

(β) $(-2{,}4) - (\ldots\ldots) = -9{,}2$

(γ) $(-20)\,(\ldots\ldots) = +100$

(δ) $(-8) : (\ldots\ldots) = 1$

(ε) $(+12{,}6) - (\ldots\ldots) = -2{,}1$

(στ) $(\ldots\ldots) : (+2) = 4$

(ζ) $\left(-12\frac{1}{3}\right) + (\ldots\ldots) = -7$

(η) $\left(+2\frac{1}{5}\right) - (\ldots\ldots) = +7\frac{3}{10}$

(θ) $(-2-1)\,(\ldots\ldots) = 1$

(ι) $(-3+3) : (-1) = (-1)(\ldots\ldots)$

(ια) $(\ldots\ldots)\,(+3-1) = -6$

(ιβ) $(\ldots\ldots) : (+2-4) = |-2|$

(ιγ) $\frac{-2+4}{\ldots\ldots} = -2+3$

(ιδ) $\frac{\ldots\ldots}{-2+7-1} = -2012+2012$

7. Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το x, ώστε να ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:

(α) $-4 > x > -6$

(β) $|\,x\,| = 12$

(γ) $|\,x\,| < 3$

8. Να αποφασίσετε κατά πόσο οι επόμενες προτάσεις είναι *κάποτε, ποτέ* ή *πάντοτε* αληθείς. Να εξηγήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για να στηρίξετε την απάντησή σας.

(α) *Το μέτρο (απόλυτη τιμή) ενός θετικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός.*

(β) *Αν α και β είναι ρητοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε $|\alpha| > |\beta|$.*

(γ) *Αν α και β είναι ρητοί αριθμοί, τότε $|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta|$.*

(δ) *Αν α και β είναι ρητοί αριθμοί, τότε $|\alpha\beta| = \alpha\beta$*

9. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-1-3)\cdot(4-7)$

(β) $(12-24) : (-3)$

(γ) $(-6)\cdot(-3)+(-4)$

(δ) $(-5)\cdot 4-(-3)$

(ε) $-8\cdot(-7)-8\cdot 7$

(στ) $-11\cdot 4+(-8)\cdot(-3)$

(ζ) $(-6+10) : (-2)$

(η) $\frac{(-3)\cdot(-4)}{-2}$

(θ) $\frac{5\cdot(-6)}{-3}$

(ι) $\frac{(-7)\cdot(-5)\cdot(-2)}{5}$

10. Μερικοί κάτοικοι της Φινλανδίας, συνηθίζουν να κάνουν σάουνα σε θερμοκρασία $48\ ^\circ\mathrm{C}$ και αμέσως να βγαίνουν έξω και να κολυμπούν σε πισίνες σε θερμοκρασία $-28\ ^\circ\mathrm{C}$. Πιστεύουν ότι η έκθεση του ανθρωπίνου σώματος σε τόσο μεγάλη διαφορά θερμοκρασίας, είναι ευεργετικό για την υγεία. Να βρείτε τη διαφορά θερμοκρασίας.

11. Η Νάγια και ο Παναγιώτης παίζουν ένα παιχνίδι, στο οποίο ο ένας καλείται να μαντέψει τους αριθμούς που σκέφτεται ο άλλος. Ο καθένας δικαιούται να κάνει δύο ερωτήσεις.

Ο Παναγιώτης ρώτησε:	η Νάγια απάντησε
Τι πρόσημο έχει το γινόμενο τους;	*αρνητικό*
Και το άθροισμα τους τι πρόσημο έχει;	*αρνητικό.*

(α) Ποιο από τα πιο κάτω ζεύγη αριθμών μπορεί να σκέφτηκε η Νάγια:

i. $-2\,,+4$ ii. $-2\,,-4$ iii. $+2\,,-4$ iv. $+2\,,+4$

(β) Γιατί επέλεξε αυτές τις ερωτήσεις ο Παναγιώτης; Θα μπορούσε να βρει το ζεύγος των αριθμών με λιγότερες ερωτήσεις;

12. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	*Ο αριθμός $-x$ είναι πάντοτε ένας αρνητικός ρητός αριθμός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(β)	*Ο αριθμός $-x$ είναι ο αντίθετος του αριθμού x.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(γ)	*Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(δ)	*Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 0*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(ε)	*Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο -1*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(στ)	*Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν διαφορετικές απόλυτες τιμές.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**
(ζ)	*Η διαφορά δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.*	**ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ**

13. Αν ο αριθμός α είναι αρνητικός ακέραιος, ποια από τις πιο κάτω παραστάσεις παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή:

$A = 3 + \alpha$ $B = 3 - \alpha$ $\Gamma = 3 : \alpha$ $\Delta = 3\alpha$

14. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, =, >$, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις. Αν $x < 0$, $\omega > 0$ και $\psi > 0$ τότε:

(α) $|x|$ …… 0 (β) $x\psi$ …… 0 (γ) $\frac{3x}{2\psi}$ …… 0

(δ) $-\psi$ …… 0 (ε) $x - \psi$ …… 0 (στ) $\frac{x^2}{\omega}$ …… 0

15. Αν $\chi - \psi = -3$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = 2(x-5) - 4(\psi - 2) - 4\psi + 6x$

$B = x + 5(3 - x) - 4\psi - 4(5 - 2\psi)$

16. Αν $\alpha + \beta = -5$ και $\alpha - \beta = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $3\alpha + (-3\beta)$

(β) $5\alpha - (-\beta) + 4\beta$

17. Αν α, β είναι αριθμοί ετερόσημοι διαφορετικοί του μηδενός να εξετάσετε σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις κατά πόσο ο γ είναι ΘΕΤΙΚΟΣ ή ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ αριθμός ή ΜΗΔΕΝ:

(α) Αν $\alpha\beta\gamma < 0$, τότε *ο αριθμός γ είναι* **ΘΕΤΙΚΟΣ / ΜΗΔΕΝ / ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ**

(β) Αν $\alpha(-1)\beta\gamma > 2$, τότε *ο αριθμός γ είναι* **ΘΕΤΙΚΟΣ / ΜΗΔΕΝ / ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ**

(γ) Αν $\alpha\beta\gamma < -2$, τότε *ο αριθμός γ είναι* **ΘΕΤΙΚΟΣ / ΜΗΔΕΝ / ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ**

(δ) Αν $\alpha \cdot (-2{,}5)\beta\gamma = 0$, τότε *ο αριθμός γ είναι* **ΘΕΤΙΚΟΣ / ΜΗΔΕΝ / ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ**

(ε) Αν $(-\alpha)(-\beta)(-\gamma) > 0$, τότε *ο αριθμός γ είναι* **ΘΕΤΙΚΟΣ / ΜΗΔΕΝ / ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ**

18. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x - 3(2 - x) = 4x - 8$ (β) $5\alpha - (2\alpha - 1) = -2$

(γ) $2(y - 1) = 3y + 4$ (δ) $5\omega - 16 = 14 - 5\omega$

(ε) $3 - (2x + 1) = x - 1$ (στ) $-x + 6 - 5x = 14 - 2x$

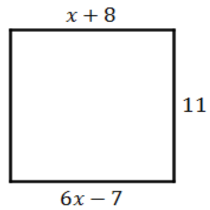
(ζ) $\frac{x}{5} = -2$ (η) $\frac{y}{5} - \frac{y}{10} = \frac{7}{10}$

(θ) $\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{2} = 1 + \alpha$ (ι) $\frac{2y-1}{3} + \frac{y}{2} = 2$

19. Ένας πατέρας μοίρασε στα τέσσερα παιδιά του €160. Στο Φίλιππο έδωσε τριπλάσια χρήματα από τον Κωνσταντίνο, στην Αννίτα έδωσε €20 λιγότερα από τα διπλάσια χρήματα του Κωνσταντίνου και στο Σταύρο τα τριπλάσια χρήματα της Αννίτας. Πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

20. Η κυρία Γιολάντα είναι 27 χρόνια μεγαλύτερη από τις δίδυμες κόρες της. Σε 3 χρόνια θα έχει ηλικία διπλάσια από το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών της. Να βρείτε την ηλικία της κυρίας Γιολάντας.

21. Να εξετάσετε κατά πόσο το διπλανό ορθογώνιο είναι τετράγωνο και αν ναι, να βρείτε το εμβαδόν του.



22. Σε μια εκδήλωση του σχολείου πήραν μέρος 115 συνολικά άτομα (μαθητές, γονείς και καθηγητές). Αν οι γονείς ήταν το $\frac{1}{4}$ των μαθητών και οι καθηγητές 5 λιγότεροι από τους γονείς, να βρείτε πόσοι μαθητές, πόσοι γονείς και πόσοι καθηγητές έλαβαν μέρος στην εκδήλωση.

23. Ένας μαθητής εργάστηκε κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών για 50 μέρες και πήρε συνολικά €1200. Κάθε εργάσιμη μέρα έπαιρνε €20 και για κάθε αργία τα διπλάσια λεφτά. Να βρείτε πόσες αργίες είχε δουλέψει.

24. Ένας περαστικός χαιρέτησε ένα βοσκό λέγοντας του: *«Γεια σου βοσκέ πρωτοβοσκέ των 100 προβάτων»*. Ο βοσκός χαμογέλασε και του απάντησε *«Μακάρι άνθρωπε μου να ήταν έτσι! Μόνο αν είχα όσο έχω και τα μισά που έχω και 5 και 50, θα ήμουν τότε ο βοσκός των 100 προβάτων»*. Πόσα πρόβατα είχε ο βοσκός;

25. Ο A έχει τριπλάσια χρήματα από το B. Αν ο A δώσει €20 στον B, τότε ο B θα έχει διπλάσια χρήματα από τον A. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας τώρα;

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Αν $\kappa \cdot \lambda = -11$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $-\kappa : \left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{3}{11} \cdot \kappa \cdot (-2) \cdot \lambda$

2. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι ρητοί αριθμοί και ισχύει ότι $-\frac{2}{3}\alpha\beta\gamma\delta > 0$, $\frac{\beta}{\alpha} = -222$ και $\gamma^{31} < 0$, να βρείτε το πρόσημο του δ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Η Μαριάνα παρατήρησε και έχει δοκιμάσει για αρκετά ζεύγη ρητών αριθμών ότι ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$. Να εξετάσετε κατά πόσο ο ισχυρισμός της είναι δυνατό να γενικευτεί για κάθε ρητό αριθμό α και β.

4. Ο Λίνος και ο Μάριος έχουν από μια υπολογιστική μηχανή. Ο Λίνος ξεκινά από το 100 και αφαιρεί 7 κάθε φορά, ενώ ο Μάριος ξεκινά από το 0 και προσθέτει 3 κάθε φορά και καταγράφουν το αποτέλεσμα τους. Υπάρχει περίπτωση οι υπολογιστικές μηχανές σε κάποια στιγμή να δείχνουν τον ίδιο αριθμό; Αν ναι, να βρείτε τον αριθμό αυτό. Να εξηγήσετε τον τρόπο που εργαστήκατε.

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (-200 + 199) - (-199 + 198) + (-198 + 197) - (-197 + 196) \ldots + (-2 + 1) - (-1)$$

6. Σε μια κατασκήνωση 34 παιδιά έλαβαν μέρος στο πρωτάθλημα σκακιού που διοργανώθηκε. Την πρώτη ημέρα έγιναν μόνο μερικοί αγώνες στους οποίους οι δύο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Στους αγώνες αυτούς της πρώτης ημέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης.

   (α) Πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη;

   (β) Πόσα κορίτσια δεν πήραν μέρος την πρώτη ημέρα στους αγώνες;

7. Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς α και β αν γνωρίζετε ότι:

$$|2010\alpha\beta\gamma| = -2010\alpha\beta\gamma \quad \text{και} \quad \gamma > 0$$

8. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός θεωρούνται κλειστές πράξεις στο σύνολο των φυσικών αριθμών, γιατί όταν προσθέτεις ή πολλαπλασιάζεις δύο φυσικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάλι στοιχείο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Να εξετάσετε κατά πόσο ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση είναι κλειστές πράξεις στο σύνολο των ακεραίων.

9. Αν η εξίσωση $4x - \mu\,(x + 3) = (x - 2)\,\mu - 7$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x + 5 = 2x + 3$, να βρείτε την τιμή του μ.

10. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω ακολουθίες αριθμών και να βρείτε το γενικό τύπο του όρου που προκύπτει ύστερα από ν-βήματα, σύμφωνα με το παράδειγμα:

Παράδειγμα: