ΣΤΡΑΤΗΣ ΑΝΤΩΝΕΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad , \quad \alpha\neq 0$$

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κεφάλαιο 1ο

Κεφάλαιο 1ο

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- *Πράξεις με Πραγματικούς αριθμούς.*
- *Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα*
- *Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων*
- *Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων*
- *Αξιοσημείωτες ταυτότητες*
- *Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων*
- *Διαίρεση πολυωνύμων*
- *Ε.Κ.Π και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων*
- *Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις*
- *Πράξεις Ρητών παραστάσεων*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1.1. ***Ποιές είναι οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;***

Απάντηση:

Οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός	Ιδιότητα
$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	αντιμεταθετική
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$	προσεταιριστική
$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$	
$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$	
$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$		επιμεριστική
	$\alpha\cdot 0=0$	

1.2. ***Να γράψετε τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων.***

Απάντηση:

Ορισμοί:

Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός με $\nu\geq 2$ τότε ορίζουμε:

$$\alpha^\nu=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$$

Για $\nu=1$ ορίζουμε $\alpha^1=\alpha$.

Για $\alpha\neq 0$, ορίζουμε $\alpha^0=1$ και

$$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}.$$

Είναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$, $\alpha,\beta\neq 0$

Ιδιότητες:

Με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται έχουμε:

1. $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$
2. $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$
3. $\alpha^\nu\cdot\beta^\nu=(\alpha\cdot\beta)^\nu$
4. $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$
5. $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$

1.3. ***Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α;.***

Απάντηση:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, ονομάζουμε τον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

Δηλαδή $\sqrt{\alpha}=x$, τότε $x^2=\alpha$ ή $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$.

Ακόμα ορίζουμε $\sqrt{0}=0$.

1.4. ***Να αποδείξετε ότι*** $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ **, *με*** $\alpha,\beta\geq 0$.

Απάντηση:

Υψώνουμε κάθε μέλος της ισότητας στο τετράγωνο και έχουμε:

Από το 1ο μέλος: $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$

Από το 2ο μέλος: $\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$

Άρα $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2$ και επομένως $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

1.5. ***Να αποδείξετε ότι*** $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ ***με*** $\alpha \geq 0$ ***και*** $\beta > 0$**.**

Απάντηση:

Υψώνουμε κάθε μέλος της ισότητας στο τετράγωνο και έχουμε:

Από το 1ο μέλος: $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Από το 2ο μέλος: $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Άρα $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ και επομένως $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

1.5.1. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

Η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ισχύει αν ένας τουλάχιστον είναι ίσος με 0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2003 - \frac{6-10x+2(4x-y-3)}{3(x-z)+3(y+z)} - 2(x+\frac{1}{3}) - 2y\ ,$$

αν είναι $x + y = 2003$.

[Απ. Α=-2003]

1.7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{12^{15}\cdot 18^{17}}{36^{24}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

[Απ. Π=1]

1.8. Να μετατρέψετε την παράσταση:

$$(5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5)^2\cdot(2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2)^2$$

σε δύναμη με βάση το 10.

[Απ. 10^{12}]

1.9. Να μετατρέψετε την παράσταση:

$$(3^3)^3 : 3^3 + 3^3 \cdot 3^3 + \left(\frac{3^3}{3}\right)^3$$

σε δύναμη με βάση το 3.

[Απ. 3^7]

1.10. Αν ισχύει $\dfrac{3x+4y}{2x-2y} = 5$ να αποδείξετε ότι το κλάσμα $A = \dfrac{x^2+2y^2}{xy}$ έχει σταθερή τιμή.

[Απ. Α=3]

1.11. Αν $x = 0{,}03$ και $y = \dfrac{3}{10}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \left[(x^{-3}y^5)^{-2} : \dfrac{x^7}{y^{11}}\right]^3$.

[Απ. Α=1000]

1.12. Αν $x = 2$ και $y = 10^{-1}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 5^{-1}\cdot(x^{-1} - y^{-1} - 2x^{-1}y)$$

[Απ. $-\frac{48}{25}$]

1.13. Δείξτε ότι $\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}} = 6$.

1.14. Δείξτε ότι $\sqrt{24\sqrt{6\sqrt{9\sqrt{16}}}} = 12$.

1.15. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}$

β) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{12}{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{45}{4}}$

[Απ. α)12 β)3]

1.16. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}}$ **β)**

[Απ. α)2 β)]

1.17. Να εξετάσετε αν η παράσταση:

$$\sqrt{\sqrt{16}} + 2\sqrt{\sqrt{81}} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$

είναι πολλαπλάσιο του 7.

[Απ. 14=πολ.7]

1.18. Αν α, β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\sqrt{49-2\beta+\sqrt{4\beta^2+\alpha-\sqrt{\alpha^2}}}\ .$$

[Απ. 7]

1.19. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
$A = \frac{4+\sqrt{12}}{2}$ και $B = \frac{8-\sqrt{20}}{2}$

[Απ. A=2+ $\sqrt{3}$, B=4- $\sqrt{5}$]

1.20. Αν x, y είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι η παράσταση:
$5x\sqrt{xy^3} - 2y\sqrt{x^3y} - 3\sqrt{x^3y^3}$
είναι ίση με μηδέν.

1.21. Να βρείτε το εμβαδόν ενός τριγώνου με μια πλευρά $\sqrt{12}$ cm και αντίστοιχο ύψος $\sqrt{3}$ cm.

[Απ. Ε=3cm^2]

1.22. Να βρείτε το αποτέλεσμα:
i) $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}$
ii) $\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}$

[Απ. i)5 ii)4]

1.23. Αν $A = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $B = \sqrt{12} - \sqrt{8}$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις: Α+Β , Α – Β , Α·Β.

[Απ. A+B=3 $\sqrt{3}$ - $\sqrt{2}$, A-B=3 $\sqrt{2}$ - $\sqrt{3}$, AB=2]

1.24. Να απλοποιήσετε οι παραστάσεις
i) $A = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ **ii)** $B = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{8\sqrt{8}}$

[Απ. i)A=6 ii)B= $\frac{1}{2}$]

1.25. Να βρείτε το αποτέλεσμα:
$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

[Απ. 7]

1.26. Να λύσετε την εξίσωση:
$x\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{5}\,(1-x)$

[Απ. x=1]

1.27. Να λύσετε την εξίσωση:
$\frac{x-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{x+1}{\sqrt{5}+1}$

[Απ. x= $\sqrt{5}$]

1.28. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης
$\left(\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+13\right):\sqrt{3}$ είναι ίση με 6.

1.29. Να αποδείξετε ότι:
$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right):\frac{32\sqrt{15}}{15} = 1.$

1.30. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις $\sqrt{27}$ cm και $\sqrt{12}$ cm και ύψος $2\sqrt{3}$ cm. Πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν του από το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\sqrt{5}$ cm;

[Απ. 3 φορές]

* * * * *

β΄ Ομάδα

3.1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2})^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+2)^2}} = 1.$

3.2. Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να γίνει "**μαγικό**", δηλαδή όλες του οι γραμμές, οι στήλες και οι διαγώνιοι να έχουν το ίδιο άθροισμα.

$\sqrt{32}$		
$9\sqrt{2}$	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{8}$		

3.3. Να υπολογιστεί η παράσταση $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

[Απ. 16]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΜΟΝΩΝΥΜΑ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

2.1. ***Τι ονομάζουμε αλγεβρικές παραστάσεις;***

Απάντηση:

Οι εκφράσεις που περιέχουν μεταβλητές, λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

2.1.1. Για παράδειγμα, αλγεβρικές παραστάσεις είναι: $5x$, $4\alpha - 1$, $\sqrt{3}\,\alpha^2 + 9\beta$, $2{,}6\kappa^4 + \lambda\mu^3$

2.2. ***Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;***

Απάντηση:

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται, προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

2.2.1. Για παράδειγμα: Αν για $\alpha = -2$ η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $3\alpha^2 - 5\alpha - 8$ είναι

$$3(-2)^2 - 5(-2) - 8 = 3{\cdot}4 + 10 - 8 = 12 + 10 - 8 = 14.$$

2.3. ***Τι ονομάζουμε μονώνυμο;***

Απάντηση:

Μονώνυμο ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

2.3.1. Παραδείγματα μονωνύμων: 3 , α , $\frac{3}{5}x^2$, $-\sqrt{2}\,\alpha^3\beta^4$, $4{,}35\kappa^6\lambda^2\mu^9$.

2.4. ***Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια;***

Απάντηση:

Δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια μονώνυμα**.

2.4.1. Για παράδειγμα: Τα μονώνυμα $\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2\beta\gamma^5$, $-9\alpha^2\beta\gamma^5$, $2{,}7\alpha^2\beta\gamma^5$ είναι όμοια.

2.5. ***Πως βρίσκουμε το άθροισμα όμοιων μονωνύμων;***

Απάντηση:

Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοια με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

2.5.1. **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Το άθροισμα των όμοιων μονωνύμων $5\alpha^2\beta$, $\alpha^2\beta$, $-2\alpha^2\beta$ είναι:

$5\alpha^2\beta + \alpha^2\beta + (-2\alpha^2\beta) = (5 + 1 - 2)\alpha^2\beta = 4\alpha^2\beta.$

2.6. ***Τι ονομάζουμε πολυώνυμο;***

Απάντηση:

Πολυώνυμο ονομάζουμε την αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

2.6.1. Για παράδειγμα: $3x^2 - 1$, $5\alpha^3\beta^2 + 3{,}2\alpha^2\beta^2$, $6\mu^2 - \sqrt{5}\,\mu\nu^3 + \frac{4}{3}\mu^2\nu\rho^5$.

2.7. ***Πως βρίσκουμε το γινόμενο μονωνύμων;***
Απάντηση:
Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε καθεμιά το άθροισμα των εκθετών τους.

2.7.1.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το γινόμενο των μονωνύμων $2\alpha^2\beta$, $-\frac{3}{4}\alpha\beta^5\gamma^4$, $-\alpha\beta\gamma^5 x$ είναι:

$(2\alpha^2\beta)\cdot(-\frac{3}{4}\alpha\beta^5\gamma^4)\cdot(-\alpha\beta x) = 2(-\frac{3}{4})(-1)\alpha^2\alpha\alpha\cdot\beta\beta^5\beta\cdot\gamma^4\gamma^3\cdot x) = \frac{3}{2}\alpha^4\beta^7\gamma^9 x.$

2.8. ***Πως βρίσκουμε το πηλίκο δύο μονωνύμων;***
Απάντηση:
Το πηλίκο δύο μονωνύμων βρίσκεται, όπως και στους αριθμούς, με πολλαπλασιασμό επί τον αντίστροφο του διαιρέτη.

2.8.1.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **(1)** $12\alpha^5\beta^2\gamma : (-3\alpha^3\beta\gamma) = 12\alpha^5\beta^2\gamma\cdot\frac{1}{-3\alpha^3\beta\gamma} = \frac{12\alpha^5\beta^2\gamma}{-3\alpha^3\beta\gamma} = \frac{12}{-3}\cdot\frac{\alpha^5}{\alpha^3}\cdot\frac{\beta^2}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\gamma} = -4\alpha^2\beta.$

(2) $(-10x^2y^2\omega) : (-5xy^4\omega) = (-10x^2y^2\omega)\cdot\frac{1}{-5xy^4\omega} = \frac{-10x^2y^2\omega}{-5xy^4\omega} = \frac{-10}{-5}\cdot\frac{x^2}{x}\cdot\frac{y^2}{y^4}\cdot\frac{\omega}{\omega} = \frac{2x^2}{y^2}.$

2.8.2.ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι το πηλίκο δύο μονωνύμων ΔΕΝ είναι πάντοτε μονώνυμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.9. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι μονώνυμα

i) $\sqrt{3}\,\alpha^3\beta^2\gamma$ **ii)** $-1{,}4x^4y^5$ **iii)** $\frac{2x^2}{y}$

iv) $4x^6\omega^{-3}$ **v)** $x-\frac{1}{x}$ **vi)** $(1+\sqrt{5})\kappa\lambda$

2.10. Αν $x+y=-2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$x(x-3)+y(y-3)+2xy$

[Απ. 10]

2.11. Να αντικαταστήσετε τα κενά με τα κατάλληλα μονώνυμα στην ισότητα

α) $3\alpha x^2y - 7\alpha x^2y - 5x^3y^5 + 7\alpha x^2y + \ldots + \ldots = 5\alpha x^2y$

β) $0{,}6\alpha^3\beta^2\gamma + \ldots - \alpha^3\gamma^2 - \frac{3}{5}\alpha^3\beta^2\gamma + \ldots + 4\gamma^2\alpha^3 = -2\alpha^3\gamma^2$

2.12. Για ποια τιμή του κ η αλγεβρική παράσταση
$(5\kappa+4)\alpha^4\beta^3\gamma$
είναι το μηδενικό μονώνυμο;

2.13. Να βρείτε ποια από τα επόμενα μονώνυμα

$-2x^2$, $\frac{1}{2}xy^2$, $-x^2y$, yx^2 , $2x^2y^2$, $-\frac{x^2}{3}$, $-\frac{1}{2}x^2$

είναι όμοια.

2.14. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $2x^2y - 3x^2y - x^2y + \frac{1}{2}x^2y$

ii) $-\frac{1}{3}xy^3\omega - x\omega y^3 - \frac{2}{3}y^3\omega x + \frac{5xy^3\omega}{6}$

iii) $\frac{3}{4}\kappa^3\lambda^2\mu^4 - 2\kappa^3\lambda^2\mu^4 - 1{,}25\kappa^3\mu^4\lambda^2 + 1\frac{4}{5}\kappa^3\lambda^2\mu^4$

2.15. Δίνονται τα μονώνυμα $-3x^{2\alpha-3}y^{\beta+2}$, $2x^3y^{4-\beta}$.
Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε τα παραπάνω μονώνυμα να είναι όμοια.

[Απ. α=3, β=1]

2.16. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς κ, μ ώστε να είναι μονώνυμο η αλγεβρική παράσταση:
$2\alpha^{\kappa+1}x^2 + 5\alpha^3x^{\mu+2}$

2.17. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους αριθμούς λ, μ ώστε να είναι μονώνυμο η αλγεβρική παράσταση:
$-3\alpha^2x^2y^{\mu+7} + 2\alpha^2x^{\lambda+1}y^{12}$

2.18. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $2xy^2\cdot(-3x^2y^4)$ **ii)** $\left(-\frac{2}{3}\alpha^3\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\alpha y^2\right)$

iii) $\frac{2}{5}x^2y^3\omega\cdot\left(-\frac{15}{8}x^5y^3\omega\right)$

iv) $2xy^2\cdot(-4x^3y)\cdot(-x^4y^6)$

v) $xy\cdot(-\alpha^2\beta^2\gamma)\cdot 4\alpha^3\gamma^5\cdot(-\frac{1}{2}\alpha^3\beta\gamma^2)$

2.19. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\beta\right)^3\cdot(-2\beta^3\alpha^5)\cdot(-3\alpha\beta^4\gamma)^2$

ii) $(-2x^3y^2\omega)^2\cdot\left(\frac{1}{2}x\omega^2y^4\right)^3$

iii) $(-3\kappa\lambda^2\mu^3)^3 \cdot (-\kappa^4\lambda\mu^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\mu\kappa^5\lambda^6\right)^2$

v) $\left(-3\alpha^4x^2\beta^5y\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}\alpha\beta^4xy^3\right)^2 \cdot \left(-ax^6y^2\right)^4$

2.20. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $-12x^8 : (-6x^5)$ **ii)** $(-24\alpha^9\beta^7) : (6\alpha^5\beta^3)$

iii) $(-18\alpha^2\beta^3) : (9\alpha^3\beta)$ **iv)** $10xy^4z^3 : (-15x^3y^4z^5)$

2.21. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $[2x^3y^4 \cdot (-6x^2y)] : (-4x^5y^7)$

ii) $[(-4\alpha^2\beta^3x) \cdot \alpha^5x^3) \cdot (-\frac{1}{2}\alpha^6\beta x)] : (-14\alpha^{11}\beta^5x^4)$

iii) $(-\frac{2}{3}\alpha^3x^5)^3 : (-\frac{4}{9}\alpha^4x^4)^2$

iv) $\left[\left(-\frac{1}{3}\kappa^2\lambda^3\mu\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\kappa\lambda^4\right)^3\right] : \left(-\frac{3}{4}\mu^2\lambda\right)^2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

3.1.*Τι ονομάζουμε αναγωγή των όμοιων όρων;*

Απάντηση:

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τους όμοιους όρους με το άθροισμά τους, η εργασία αυτή λέγεται **αναγωγή των όμοιων όρων**.

3.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $5\alpha^2 - 3\alpha + 6\beta + 2 + 9\beta - \alpha^2 + 3 - \beta - 2 + \alpha = 4\alpha^2 - 2\alpha + 14\beta + 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.2.Να κάνετε τις αναγωγές των όμοιων όρων

i) $4x^2 - 3x^3 + 5x - 2x^2 + 7 - x - 2 + 3x^2 + 4x^3$

ii) $5x^4 - 3x^2 + 2x - 7x^4 - 3x^3 - 1 - 2x + 4 - 5x^2$

iii) $\alpha x^2 + 2x + 3\alpha x^2 - x + 5 - 4x$

iv) $2\alpha^3 x - 6\alpha^2 x^2 + 5\alpha^3 x + \alpha^3 - 2\alpha^4 + x^4$

3.3.Αν $\mathrm{A} = x^2 - 3x + 1$, $\mathrm{B} = -x^2 + 2x + 5$ και $\Gamma = 2x^2 - x - 3$

να βρεθούν τα επόμενα αθροίσματα

i) $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ **ii)** $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma$ **iii)** $\mathrm{A} - \mathrm{B} - \Gamma$

3.4.Να κάνετε τις πράξεις:

i) $3x^2 - [(5x^3 - x) + 4x^2 - (2x^2 + 6)] + (-2x^2 - 5x)$

ii) $5\alpha^3 - (2\alpha^2 + \alpha - 3) + [-(3\alpha^2 - 2\alpha - 4) + (-2 + 6\alpha)]$

3.5.Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $(2x-3) - [-2x - (x^2-2)] - \{x^2 - [3x + 4 - (x^2 - 1)]\}$

ii) $3x^2 - \{x^2 - [x - (1 - x^3)] + 2x\} - \{2x^3 + [x + (x^2 - 3) - 3x^2] - 1\} - 4$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

4.1. ***Πως πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο;***

Απάντηση:

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

4.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(2\alpha^2\beta)\cdot(3\alpha\beta - \frac{1}{2}\beta^3\gamma^2 + 4) = 6\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3\gamma^2 + 8\alpha^2\beta$.

4.2. ***Πως πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα;***

Απάντηση:

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

4.2.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(\alpha - 2)\cdot(\alpha^2 - 3\alpha - 4) = \alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha^2 + 6\alpha + 8$
$= \alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha + 8$

4.2.2. ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όταν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο ή δύο πολυωνύμων, λέμε πολλές φορές ότι **αναπτύσσουμε** τα γινόμενα αυτά και το αποτέλεσμα λέγεται **ανάπτυγμα του γινομένου**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.3. Να γίνουν οι πράξεις:
$(x^2-2y)3y + (xy+y^2)(-x) + (x+y)(-2xy) - (x+3)2y^2$.
Μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του εξαγόμενου για $x = 2$ και $y = -1$.

4.4. Να δείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση
$2x(\alpha^2-\alpha+1) - (\alpha x+1)(\alpha-2) - x(\alpha^2+2) + \alpha$
έχει σταθερή τιμή για τις διάφορες τιμές των α, x.

4.5. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του εξαγόμενου για τις τιμές των μεταβλητών που αναφέρονται.

α) $(2x+3)(x^2+x-1) - (x^2-1)(x+2) - 2x^3$, $x = -2$.

β) $(x^2y-2xy^2)(2x-y) - 2x^3(x+y) - (x-y)(-2y^3)$, $x = -1$, και $y = 2$.

4.6. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $3x(x^2-1) - 4x^2(x+2) - 3x + 4(x^2-1)$

β) $-5x^2(x^3-2x^2+4) + (1-2x)(-4x^3) - x(x-1) - 2x$

γ) $2\alpha(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) - \beta^3 - (\alpha-\beta)(-3\alpha\beta) - 4\alpha^2\beta$

δ) $3[x^2-(x+4) - 3] - 2x^2[x + (x-2)] - 5$

ε) $2\alpha\{\alpha\beta - [\alpha^2-(-\alpha\beta+4)] + 2\} - 3(\alpha^2-2)$

4.7. Να αντικατασταθούν οι παρακάτω αστερίσκοι έτσι, ώστε να ισχύει κάθε μια από τις ισότητες:

α) $* \cdot(4\beta^2-7\beta+8) = 28\beta^3 - 49\beta^2 + 56\beta$

β) $* \cdot(3x^2+8x-7) = 36x^5 + * - *$

γ) $5\alpha^2\beta^3(* - 9\beta^2 + *) = 20\alpha^5\beta^7 - * + \alpha^4\beta^9$

4.8. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $(3x+1)(2x-3)$

β) $(3x^2-2x+4)(2x-5)$

γ) $(x+2)(x-2)(x+5)$

δ) $(x+1)(x+2)(x+3)$

4.9. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $(\kappa-2)(1-\kappa)(2\kappa-3)$

β) $\mu(\mu-3)(4\mu+1)(2-\mu)$

γ) $(x-1)(2x-5)(x^2+5x-1)$

δ) $(\alpha+3)(2-\alpha)(\alpha^2-2\alpha-1)(4-\alpha^2)$

4.10. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $(x–3)(1–x) + (x^2–x+2)(x–2+x^2)$
ii) $\alpha(\alpha+1)(2–\alpha) – (2\alpha^2+\alpha–3)(3–\alpha+2\alpha^2)$

4.11. Αν $Α = \alpha^2–\alpha+1$, $Β = \alpha+2$ και $Γ = \alpha–1$ να βρεθούν τα εξαγόμενα:

$Α·Β$, $Β·Γ$, $Α·Γ$ και $Α·Β + Β·Γ – Γ·Α$.

4.12. Αν $Κ = 4x–1$, $Λ = x–2$ και $Μ = x^2+x–1$ να βρεθούν τα εξαγόμενα:

$Κ·Λ$, $Λ·Μ$, $Κ·Μ$ και $Κ·Λ – Κ·(Λ·Μ – Κ·Μ)$.

4.13. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$(x–2y)(4x–3y) – \left[(2x-5y)\left(2x-\frac{11}{3}y\right) - \left(\frac{37}{3}y^2-2xy\right) \right]$

4.14. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις x , $2x$ και ύψος $\frac{x}{2}$.

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά x. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών του τραπεζίου και του τετραγώνου.

[Απ. $\frac{3}{4}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

5.1.*Τι ονομάζουμε ταυτότητα;*

Απάντηση:

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

5.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(i) $\alpha(\alpha - 2) = \alpha^2 - 2\alpha$

(ii) $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$

(iii) $\kappa^2 + \lambda^2 = (\kappa + \lambda)^2 - 2\kappa\lambda$

Τετράγωνο αθροίσματος

5.2.*Να αποδείξετε την ταυτότητα* $\boldsymbol{(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$ **.**

Απάντηση:

Είναι :
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\ .\end{aligned}$$

5.2.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: **(i)** $(\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\cdot 3 + 3^2 = \alpha^2 + 6\alpha + 9.$

(ii) $(5x + 4y)^2 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot 4y + (4y)^2 = 25x^2 + 40xy + 16y^2.$

(iii) $(2\mu^3 + \frac{1}{4}\nu^2)^2 = (2\mu^3)^2 + 2\cdot 2\mu^3\cdot\frac{1}{4}\nu^2 + (\frac{1}{4}\nu^2)^2 = 4\mu^6 + \mu^3\nu^2 + \frac{1}{16}\nu^4.$

Τετράγωνο διαφοράς

5.3.*Να αποδείξετε την ταυτότητα* $\boldsymbol{(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$ **.**

Απάντηση:

Είναι :
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\ .\end{aligned}$$

5.3.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: **(i)** $(\beta - 11)^2 = \beta^2 - 2\beta\cdot 11 + 11^2 = \beta^2 - 22\beta + 121.$

(ii) $(-6x^2 + 7\alpha)^2 = (7\alpha - 6x^2)^2 = (7\alpha)^2 - 2\cdot 7\alpha\cdot 6x^2 + (6x^2)^2 = 49\alpha^2 - 84\alpha x^2 + 36x^4.$

(iii)
$$\begin{aligned}\left(-\frac{\kappa^4}{2} - 4\lambda\mu^3\right)^2 &= \left[-\left(\frac{\kappa^4}{2} + 4\lambda\mu^3\right)\right]^2 = \left(\frac{\kappa^4}{2} + 4\lambda\mu^3\right)^2 = \left(\frac{\kappa^4}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{\kappa^4}{2}\cdot 4\lambda\mu^3 + (4\lambda\mu^3)^2\\ &= \frac{\kappa^8}{4} + 4\kappa^4\lambda\mu^3 + 16\lambda^2\mu^6.\end{aligned}$$

Κύβος αθροίσματος

5.4.*Να αποδείξετε την ταυτότητα* $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ **.**

Απάντηση:

Είναι :
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2\\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\ .\end{aligned}$$

Κύβος διαφοράς

5.5.*Να αποδείξετε την ταυτότητα* $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ **.**

Απάντηση:

Είναι :
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^3 &= (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2\\ &= (\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2-\beta^3\\ &= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3\ .\end{aligned}$$

Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

5.6.*Να αποδείξετε την ταυτότητα* $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$ **.**

Απάντηση:

Είναι :
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) &= \alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2\\ &= \alpha^2-\beta^2\ .\end{aligned}$$

5.6.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: **(i)** $(9\alpha x+2\beta y)(9\alpha x-2\beta y) = (9\alpha x)^2-(2\beta y)^2 = 81\alpha^2x^2-4\beta^2y^2$.

(ii) $(-3\mu^5+\lambda^3v^2)(3\mu^5+\lambda^3v^2) = (\lambda^3v^2-3\mu^5)(\lambda^3v^2+3\mu^5) = (\lambda^3v^2)^2-(3\mu^5)^2 = \lambda^6v^4-9\mu^{10}$.

Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων

5.7.*Να αποδείξετε τις ταυτότητες* (i) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ **.**

(ii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ **.**

Απάντηση:

(i) Το 2^o μέλος της ταυτότητας γράφεται:
$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3\\ &= \alpha^3-\beta^3\ .\end{aligned}$$

(ii) Το 2^o μέλος της ταυτότητας γράφεται:
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) &= \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3\\ &= \alpha^3+\beta^3\ .\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

5.8.Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+5)^2$ **β)** $(2x-3)^2$ **γ)** $(3\alpha-7\beta)^2$

δ) $(3xy+2)^2$ **ε)** $(x^2-4y)^2$ **στ)** $(2\alpha^3-\alpha\beta^2)^2$

5.9.Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\frac{3}{2}x^2+4xy)^2$ **β)** $(7\alpha-\frac{3}{2}\beta^2)^2$

γ) $(3\alpha-\frac{1}{2\alpha})^2$ **δ)** $(\frac{3}{4a^2}+2\alpha^3\beta)^2$

ε) $(\frac{5}{6}x^2y^4-\frac{2}{xy})^2$ **στ)** $(\frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma^3-\frac{6}{\beta\gamma^2})^2$

5.10.Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(-\alpha^2+2\beta^4)^2$ **β)** $(-2x^3+\frac{y^2}{4})^2$

γ) $(-\frac{2}{3}\alpha^2x^3-\frac{3}{4}\beta^5)^2$ **δ)** $(-\frac{1}{4}x^2y^3-\frac{11}{6x^2y})^2$

5.11.Να μετατρέψετε την παράσταση $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha\gamma+\beta\gamma)$ σε μία δύναμη.

5.12.Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα και μετά να τα γράψετε ως τέλεια τετράγωνα:

α) $x^2+2\alpha x+\ldots$ **β)** $4x^2+4xy+\ldots$

γ) $9\alpha^2-6\alpha\beta+\ldots$ **δ)** $x^2+4y^2+\ldots$

ε) $25\alpha^2 + 4\beta^2 + \ldots$ **στ)** $81\mu^2 + 49\nu^2 - \ldots$
ζ) $40xy + 16x^2 + \ldots$ **η)** $-60\kappa\lambda + 9\kappa^2 + \ldots$
θ) $12\mu^3\nu^2 + 4\nu^4 + \ldots$

5.13. Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα και μετά να τα γράψετε ως τέλεια τετράγωνα:

α) $\alpha^2 - \alpha\beta + \ldots$ **β)** $\alpha^2 + \frac{1}{4} + \ldots$

γ) $x^2 + \frac{6}{5}x + \ldots$ **δ)** $49\alpha^6 + \beta^8 + \ldots$

ε) $\frac{9}{4}x^2 - 6xy + \ldots$ **στ)** $\frac{25}{4}\alpha^2 - 5\beta + \ldots$

5.14. Αν $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

5.15. Να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή της παράστασης $\text{Α} = (2\nu+3)^2 - (2\nu-3)^2$ είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 24, όταν ο ν παίρνει ακέραιες τιμές.

5.16.i) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\kappa^2 + \lambda^2$ και $2\kappa\lambda$.
ii) Με τη βοήθεια της προηγούμενης σύγκρισης να αποδείξετε ότι:
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

5.17. Να βρείτε τα γινόμενα:
α) $(4x+3)(4x-3)$ **β)** $(\alpha\beta+2)(\alpha\beta-2)$
γ) $(5\alpha-2\beta^3)(5\alpha+2\beta^3)$ **δ)** $(2x^2y^4-3a^3x)(2x^2y^4+3a^3x)$

5.18. Να βρείτε τα γινόμενα:
α) $(7a+4\beta)(4\beta-7\alpha)$
β) $(\frac{2}{5}x^2y^3 - \omega^2)(\omega^2 + \frac{2}{5}x^2y^3)$
γ) $(4\alpha x^3 - 9\beta^2 y)(-4\alpha x^3 - 9\beta^2 y)$
δ) $(\sqrt{2}\,x^3 - a^4\kappa)(-a^4\kappa - \sqrt{2}\,x^3)$

5.19. Να βρείτε τα γινόμενα:
α) $(x+y-1)(x+y+1)$
β) $(2x+y-3\omega)(2x+y+3\omega)$
γ) $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma)$
δ) $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$
ε) $(\alpha-x+\beta-y)(\alpha+x+\beta+y)$

5.20. Αν $\alpha = \sqrt{2} - 1$, $\beta = \sqrt{2} + 1$, να υπολογιστούν:
i) $\alpha\cdot\beta$ **ii)** $\alpha + \beta$ **iii)** $\dfrac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha+\beta}$

[Απ. i)1 ii)2$\sqrt{2}$ iii)6]

5.21. Να βρείτε τα αναπτύγματα:
α) $(x + 4)^3$ **β)** $(2x - 3)^3$ **γ)** $(2x - 3y)^3$
δ) $(3xy + 2)^3$ **ε)** $(-x^2 + 2y)^3$ **στ)** $(-2a^3 - \alpha x^2)^3$

5.22. Να γίνουν οι πράξεις:
α) $(\alpha+3\beta)^2 - (\alpha-2\beta)^2 - 5\beta^2$
β) $(x-\alpha)^2 - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-3x) - (x-\beta)^2$
γ) $(x^3+2y^2)^2 - (y^2+2x^3)^2 + (x^3-2y^2)(x^3+2y^2)$
δ) $(2x+3)^2 + (2x-3)^2 + (2x+3)(2x-3) - 3(x-5)^2$

5.23. Να εκτελέσετε τις πράξεις:
α) $(x+3)^2 + (x-3)^2 + (x-2)^2 - (x+2)^2 + (x+3)(x-3) - (x+2)(x-2)$
β) $(2x+5)^2 - (x-5)^2 + (3x-1)^2 - (2x+1)^2 - (2x-3)(2x+3)$
γ) $-(2x+1)^2 + (2x+1)(-2x-1) - (x+3)(x-3) - (x-3)(-x-3)$
δ) $(x^2+1)^2 + (2x^2-3)^2 - (3x^2+4)^2 + (x^2-2)^2 + (x^2-3)(x^2+3)$

5.24. Να αποδείξετε ότι:
$$(3x+2)(3x-2)(x-1) - (2x-1)^3 - x(x-2)(x-5) + 5 = 10(x-1)^2.$$

5.25. Αν $\alpha = 2\sqrt{4-\sqrt{15}}$ και $\beta = \sqrt{6} - \sqrt{10}$ τότε:
i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 - \beta^2$.
ii) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι.

5.26. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ δίνονται από τις ισότητες
$$\beta = \sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{3}{4-\sqrt{14}} + \frac{3}{4+\sqrt{14}}.$$
Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.

[Απ. Π=30, Ε=30]

5.27. Αν αφαιρέσουμε από το τετράγωνο του ημιαθροίσματος δύο αριθμών, το τετράγωνο της ημιδιαφοράς τους, βρίσκουμε τον αριθμό 1. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί αυτοί είναι αντίστροφοι.

5.28. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\rho = 10 + 5\sqrt{2}$ είναι λύση της εξίσωσης: $x^2 - 20x + 50 = 0$.

5.29. Αν $x^2 - 6xy + 11y^2 - 8y + 8 = 0$
α) Να δείξετε ότι: $(x - 3y)^2 + 2(y - 2)^2 = 0$.
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $\text{Α}(x,y)$ που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

[Απ. β)Α(6,2)]

5.30. Να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$.
β) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$.

5.31. Να εκτελεστούν οι πράξεις:
α) $(x-1)^3 - (3x+2)^3 - x(x-2)(x+2)$
β) $(x+y)^3 - y(x-y)(x+y) - x(x-y)$
γ) $(x+2)^3 - 3x(x-1)^2 + (x-1)(x+1)(x-2)$

5.32. Να βρείτε τα εξαγόμενα:
i) $(x+1)^3 + 3(x+1)^2(x-1) + 3(x+1)(x-1)^2 + (x-1)^3$
ii) $(x-y)^3 - 3(x-y)^2(x+y) + 3(x-y)(x+y)^2 - (x+y)^3$
iii) $(\kappa+\lambda)^3 - (\kappa-\lambda)^3 - 3(\kappa+\lambda)^2(\kappa-\lambda) + 3(\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)^2$

iv) $\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{5}\right) + 3\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{5}\right)^2$

5.33. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$
β) $(\alpha^2+\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2-\beta^2)^2$
γ) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$
δ) $(x+3y)^2 - (x-2y)^2 - 5y^2 = 10xy$
ε) $(\alpha^2+4)(x^2+1) - (\alpha x+2)^2 = (2x-\alpha)^2$
στ) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2 + (\alpha y-\beta x)^2$

5.34. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right]^2 = \alpha^3$

5.35. Αν $\mu > \nu$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\mu^2 + \nu^2$, $\mu^2 - \nu^2$ και $2\mu\nu$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

5.36. Αν $\mu > 1$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί μ, $\frac{\mu^2-1}{2}$ και $\frac{\mu^2+1}{2}$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

5.37. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\gamma+\alpha)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2$
β) $(x^2+y^2+xy)^2 = x^2y^2 + (x+y)^2(x^2+y^2)$
γ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 + (\alpha+\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\beta-\gamma)^2 = 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

5.38. Να αποδείξετε ότι:

$(3x^2+2)^2 - (2x^2+3)^2 - 2(2x^2-1)^3 + 27x^2 = 5(x^4-1) - (x^2-2)(4x^2+1)^2$

5.39. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $999^2 + 1998 + 1$
β) $1001^2 + 1 - 2002$
γ) $1001 \cdot 999 = (1000+1)(\ldots - \ldots)$
δ) $99^3 + 3\cdot 99^2 + 3\cdot 99 + 1$
ε) $101^3 - 3\cdot 101^2 + 303 - 1$

5.40. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i) $(2\alpha + \ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + 9\beta^2$
ii) $(3\alpha + \ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + 4x^4$
iii) $(\ldots - 3y^3)^2 = 25x^4 - \ldots\ldots + \ldots\ldots$
iv) $(\ldots - 3\kappa)^2 = \ldots\ldots - 24\mu^2\kappa + \ldots\ldots$
v) $(\ldots + \ldots)^2 = 4\alpha^2 + 9\beta^4 + \ldots\ldots$
vi) $(\ldots - \ldots)^2 = 9x^2 - 9x + \ldots\ldots$

5.41. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i) $(5\alpha^3 + \ldots)(\ldots - 8\beta^2) = \ldots\ldots - \ldots\ldots$
ii) $(\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots) = 121\alpha^8x^2 - \frac{9}{4}\beta^2y^6$
iii) $(\ldots - \ldots)(\frac{1}{2}x^3 + \ldots) = \ldots\ldots - 3\alpha^2\beta^4$

5.42. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i) $(\ldots + \ldots)^3 = 64\alpha^3 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + 125\beta^3$
ii) $(\ldots + \ldots)^3 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + \ldots\ldots + \ldots\ldots$
iii) $(\ldots - 3\alpha)^3 = 1000x^3 - \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots$

5.43. Να αποδείξετε τις ισότητες:

i) $(\alpha+1)^3 = \alpha(\alpha-3)^2 + (3\alpha-1)^2$
ii) $(\alpha+\beta)^3 = \alpha(\alpha-3\beta)^2 + \beta(\beta-3\alpha)^2$
iii) $(x^3+y^3)^2 - (x^2+y^2)^3 + 3x^2y^2(x+y)^2 = (2xy)^3$

5.44. Αν $x = \alpha^2-\beta^2$, $y = 2\alpha\beta$ και $\omega = \alpha^2+\beta^2$, να αποδείξετε ότι θα είναι $x^2 + y^2 = \omega^2$.

5.45. Αν $\alpha = (x+1)^2$, $\beta = (x-1)^2$ και $\gamma = \alpha+8$ τότε αποδείξτε ότι:

$$\alpha - \beta + \gamma = (x+3)^2$$

5.46. Αν $x + y = 3$ και $xy = -1$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

i) $x^2 + y^2$ **ii)** $x^3 + y^3$

[Απ.i)11 ii)36]

5.47. Αν $x + y = \alpha$ και $xy = \beta$, να αποδείξετε ότι:

i) $x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\beta$ **ii)** $x^3 + y^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta$

5.48. Αν $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, να βρεθεί η τιμή των επόμενων παραστάσεων:

i) $\mathrm{A} = \alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2$
ii) $\mathrm{B} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

5.49. Να βρεθούν δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που τα τετράγωνά τους να διαφέρουν κατά 99.

[Απ.49 , 50]

5.50. Αν $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 7$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ **ii)** $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$.

[Απ.i)51 ii)364]

5.51. Αν $x > 0$ και $(x + \frac{1}{x})^2 = 9$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

[Απ.18]

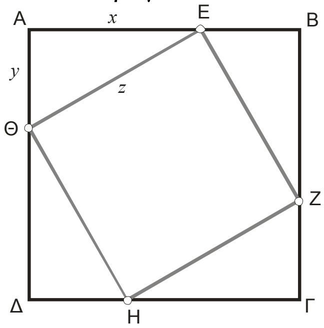
5.52. Να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες:

i) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$
ii) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$
iii) $\frac{x^2+1}{2} \geq x$

iv) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$, $\alpha > 0$

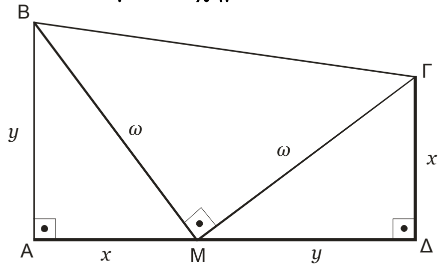
Πότε ισχύει η ισότητα σε κάθε μία από αυτές;

5.53. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι εγγεγραμμένο στο τετράγωνο ΑΒΓΔ.



Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα που προκύπτει από τα εμβαδά των δύο τετραγώνων και των ίσων τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων για να συμπεράνετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή ότι: $x^2 + y^2 = z^2$.

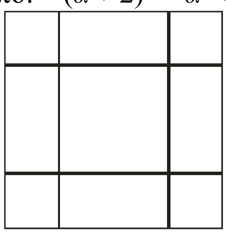
5.54. Δίνεται το επόμενο σχήμα:



Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα που προκύπτει από τα εμβαδά των δύο σχημάτων για να συμπεράνετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή ότι: $x^2 + y^2 = \omega^2$.

Β΄ Ομάδα

5.55. Χρησιμοποιήστε το πιο κάτω σχήμα για να δικαιολογήσετε τον τύπο: $(\alpha + 2)^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4$.



5.56. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα το x, τότε δείξτε ότι και οι αριθμοί $\alpha = 3x + 2y + 2z$, $\beta = 2x + y + 2z$, $\gamma = 2x + 2y + z$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

5.57. Να δείξετε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών αυξημένο κατά μια μονάδα είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή,

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3) + 1 = (\nu^2+3\nu+1)^2.$$

5.58. Αν $x \cdot y = 6$ και $x^2y + xy^2 + x + y = 35$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^2 + y^2$.

[Απ. 13]

5.59. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:

$$A = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8.$$

α) Να μετασχηματίσετε την παράσταση Α σε άθροισμα τετραγώνων.

β) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η παράσταση Α παίρνει την ελάχιστη τιμή.

[Απ. β) α=10, β=2]

5.60. Για τους πραγματικούς αριθούς x, y, z, w ισχύει η ισότητα $x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zw)$.

α) Να μετασχηματίσετε την ισότητα ώστε στο ένα μέλος να γραφεί σαν άθροισμα τριών τέλειων τετραγώνων και στο άλλο μέλος το 0.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους x και w.

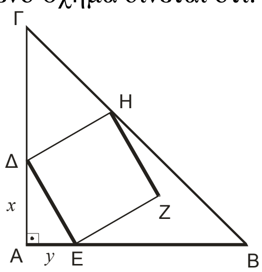
[Απ. x=27w]

5.61. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β και γ οι οποίοι ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0.$$

[Απ. α=1, β=2, γ=3]

5.62. Για το επόμενο σχήμα δίνεται ότι:



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. $ΑΔ = x$, $ΑΕ = y$, $ΑΓ = 2x + y$.

Το εμβαδόν (ΔΕΖΗ) του τετραγώνου ΔΕΖΗ ισούται με τα $\dfrac{2}{5}$ του εμβαδού (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ. Να υπολογίσετε:

i) Το λόγο $\dfrac{x}{y}$

ii) Το λόγο $\dfrac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$

[Απ. i) 2 ii) $\frac{2}{25}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 6.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

6.1. ***Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση;***

Απάντηση:

Η διαδικασία να μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κοινός παράγοντας

6.2. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

α) $2\alpha\beta - 4\alpha\gamma$

β) $6x^3 + 3x^2$

γ) $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$

δ) $15\alpha^2\beta - 25\alpha\beta\gamma + 30\alpha\beta^2\gamma$

6.3. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

α) $\alpha(x-1) - x + 1$

β) $\kappa(\alpha-2) + 6 - 3\alpha$

γ) $\alpha(2x+3y) - 7\beta(2x+3y) - (3y+2x)$

6.4. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

α) $(\alpha-\beta)^3 + (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta) - 2\beta(\alpha^2+\beta^2)$

β) $(5\alpha-2\beta)(4x-3y) + (3y-4x)\alpha$

6.5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$3^{\nu+3} - 3^{\nu+2} + 3^{\nu}$

είναι πολλαπλάσιο του 19.

Ομαδοποίηση

6.6. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α) $\alpha x + 2\alpha y + 3x + 6y$

β) $5y - 5\omega - \lambda\omega + \lambda y$

γ) $4\alpha y - 2\beta y + 2\alpha\omega - \beta\omega$

δ) $15x\alpha + 6x\beta - 20y\alpha - 8y\beta$

ε) $xy - 2x + 3y^2 - 6y$

στ) $x^3 + x^2 + x + 1$

ζ) $\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

6.7. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $\alpha + \alpha\beta - \beta - 1$

β) $x^2 + xy - x - y$

γ) $3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 10$

δ) $\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3$

ε) $8xy^3 - 24y^2 - 7\alpha xy + 21\alpha$

στ) $2x^2 + x - 2xy - y$

ζ) $\alpha\beta x - \alpha\beta y - \alpha\gamma x + \alpha\gamma y$

η) $x^3 - 5x^2 + 3x - 15$

6.8. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $x^2 + (5-y)x - 5y$

β) $\alpha(\alpha-\gamma) - \beta(\beta-\gamma)$

γ) $x(x-3\beta) + y(\alpha-x) - \alpha(x-3\beta)$

δ) $xy(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta(x^2+y^2)$

ε) $\kappa\lambda(\mu^2-\nu^2) + \mu\nu(\kappa^2-\lambda^2)$

6.9. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $(\alpha+\beta)(\lambda+\mu) - \gamma\lambda - \gamma\mu$

β) $\kappa x - 2\kappa y - \lambda x + 2\lambda y + \mu x - 2\mu y$

γ) $\alpha x - \beta x + \beta y + \gamma y - \gamma x - \alpha y$

δ) $\alpha^2\beta - \alpha^2 + \alpha + \beta - \alpha\beta - 1$

ε) $x^2y + xy\omega + xy\varphi + y\varphi\omega + x^2 - \omega^2$

6.10. Οι αριθμοί x , y είναι μη μηδενικοί και διάφοροι μεταξύ τους. Αν $\frac{x^2+1}{y^2+1} = \frac{x}{y}$ τότε να δείξετε ότι οι x, y είναι αντίστροφοι.

Διαφορά τετραγώνων

6.11. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α) $81\alpha^2 - 49\beta^2$

β) $3xy^3 - 27x^3y$

γ) $45x^2y^4 - 80\omega^2$

δ) $20\kappa^2 - 15$

ε) $\frac{x^2y^2}{9} - \frac{1}{4}$

στ) $1 - 4x^2$

ζ) $1 - x^8$

ζ) $16\alpha^6 - 49\beta^8$

6.12. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α) $1001^2 - 1$ **β)** $\dfrac{1540^2-463^2}{1077}$

γ) $\dfrac{62{,}31^2-37{,}69^2}{24{,}62}$ **δ)** $\dfrac{225{,}12^2-72{,}12^2}{297{,}24}$

ε) $\dfrac{2004^2-1834^2}{1924^2-1914^2}$

6.13. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α) $\alpha^2\beta - \alpha^2 + \alpha + \beta - \alpha\beta - 1$
β) $81x^4 - 16y^4$
γ) $x^8 - 1$
δ) $27x - 3x^3$
ε) $20x - 5x^3$

6.14. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α) $\alpha^3 - 5\alpha^2 - 4\alpha + 20$
β) $2x^2y - 18y + 3x^2 - 27$
γ) $\alpha^2x^2 - 4\alpha^2 - x^2 + 4$
δ) $\alpha^5 - 1 + \alpha^4 - \alpha$
ε) $\alpha x^2 + \beta x^2 - \alpha y^2 - \beta y^2$
στ) $\alpha x^3 - \alpha^3 x(y+z)^2$
ζ) $9\alpha^2x^2 - 4\alpha^2 - 9\beta^2x^2 + 4\beta^2$

6.15. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

i) $(5x-6)^2 - 9$
ii) $(\mu-3\nu)^2 - 16\nu^2$
iii) $(3\alpha-2\beta)^2 - (3\beta-2\alpha)^2$
iv) $(x-5y)^2 - 9(x+2y)^2$
v) $9(\alpha-2\beta)^2 - 16(\alpha+2\beta)^2$
vi) $x^3 - x(y-z)^2$

6.16. Αν ο x είναι φυσικός αριθμός, τότε η παράσταση $(x^2+3x+1)^2 - 1$ είναι γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών.

6.17. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

α) $(4x^2-3x-18)^2 - (4x^2+3x)^2$
β) $5(4-x^2) - (x-2)^2$
γ) $(5-3x)(x+4) + (3x-5)(2x-3) + 9x^2 - 25$

6.18. Αν ο κ είναι ακέραιος τότε δείξτε ότι ο $\kappa^3 - \kappa$ γράφεται σαν γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων.

6.19. Έστω ν θετικός ακέραιος και $A = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1$.

i) Να παραγοντοποιήσετε τον Α.
ii) Να βρείτε τις τιμές του ν, για τις οποίες ο Α είναι πρώτος αριθμός.

[Απ. ii) ν=2]

Διαφορά & άθροισμα κύβων

6.20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $\alpha^3 - 125$ **ii)** $8\kappa^3 + 27$ **iii)** $27\alpha^3 + 64\beta^3$
iv) $216\omega^3 - 1$ **v)** $x^4 - 64x$

6.21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $64x^3y^6 + 27$ **ii)** $\dfrac{\kappa^6}{\mu^3} - \dfrac{1}{8}$

iii) $\alpha^6 + 64\beta^3$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

6.22. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $1 - 2x + x^2$
β) $\kappa^2 - 4\kappa y + 4y^2$
γ) $9x^2 + 48xy + 64y^2$
δ) $\dfrac{9}{16}x^2 - \dfrac{3}{5}xy + \dfrac{4}{25}y^2$
ε) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$
στ) $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}$

6.23. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α) $\alpha(\alpha+2) + 1$
β) $9(x+y)^2 - 6y(x+y) + y^2$
γ) $x + 1 + 2\sqrt{x}$, $x > 0$
δ) $y^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 3x^2$

6.24. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α) $2\alpha x^2 - 12\alpha x + 18\alpha$
β) $x^2 - 4x^3 + 4x^4$
γ) $x^3 + 2x^2 + x + xy + y$

Τριώνυμο

6.25. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $x^2 - 10x + 24$
β) $\alpha^2 + 12\alpha + 27$
γ) $y^2 + 3y - 10$
δ) $\alpha^2 + 2\alpha - 15$
ε) $3x^2 - 6x - 24$
στ) $2x^2 - 2x - 40$
ζ) $14 - 5x - x^2$
η) $-x^2 + 2x + 15$
θ) $x^2 - 17x - 84$
ι) $\beta x^2 + 6\beta x + 5\beta$

6.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = x^2 - 5x + 6$ παίρνει θετικές τιμές, για κάθε $x > 3$.

6.27. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α) $x^2 + 9\alpha x + 14\alpha^2$
β) $\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2$
γ) $\mu^2 + 4\mu\nu - 5\nu^2$

Ανάπτυγμα τετραγώνου και διαφορά τετραγώνων

6.28. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $x^2 - \alpha^2 + 6\alpha - 9$

β) $x^2 - 4y^2 + 4y - 1$
γ) $9 - 9\alpha^2 - \beta^2 + 6\alpha\beta$
δ) $9\alpha^2 - 12\alpha + 4 - 4\beta^2$
ε) $1 + \alpha^2 + 2\beta\gamma - 2\alpha - \beta^2 - \gamma^2$
στ) $9y^2 - 4x^2 + 4x - 1$
ζ) $4x^2 - 36x^2 + 81 - y^2$
η) $16y^2 - 9x^2 + 12x - 4$

6.29. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
i) $\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\beta - 8)$
ii) $\kappa^2\lambda^2 - x^2y^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\kappa\lambda\beta - 2\gamma xy$
iii) $y^2 - 4y\omega + 3\omega^2 - 2x\omega - x^2$

6.30. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
i) $\alpha^4 + \alpha^2 + 1$
ii) $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4$
iii) $\alpha^4 - 11\alpha^2\beta^2 + \beta^4$
iv) $x^4 + 3x^2 + 4$
v) $y^4 - 2y^2 + 1$
vi) $25\alpha^4 + 31\alpha^2\beta^2 + 16\beta^4$

6.31. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
i) $\kappa^4 + 4\lambda^4 + 3\kappa^2\lambda^2$
ii) $x^4 + 9y^2 + 5x^2y^2$
iii) $\kappa^4 - 13\kappa^2 + 36$

Ανάπτυγμα κύβου

6.32. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
α) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
β) $8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 6\alpha - 1$
γ) $\alpha^3x + 6\alpha^2x + 12\alpha x + 8x$

6.33. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις
α) $(x+y)^3 - 3(x+y)^2\cdot y + 3(x+y)\cdot y^2 - y^3$
β) $(\kappa+\lambda)^3 + (\kappa-\lambda)^3 + 3(\kappa+\lambda)^2\cdot(\kappa-\lambda) + 3(\kappa+\lambda)\cdot(\kappa-\lambda)^2$

Όλες οι περιπτώσεις

6.34. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
α) $(2x-1)(x+3) + 1 - 2x$
β) $(\alpha+\beta)(2\beta-\alpha) + (\alpha-2\beta)^2 - (\alpha^2-4\beta^2)$
γ) $(x^2-9)^2 - (x+3)^2$
δ) $(2x^2-5x+2)^2 - 4x^2 + 4x - 1$
ε) $5\kappa^3 - \frac{9}{5}\kappa$
στ) $y^2 + 4x - 16x^2 - y$

6.35. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
i) $\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa + \lambda - 2\kappa\lambda$
ii) $x^2 + (2\alpha+1)x + \alpha^2 + \alpha$
iii) $\gamma^2 + 9(\beta^2-\alpha^2) + 6\beta\gamma$
iv) $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2\alpha\beta + 2\gamma\delta$
v) $\alpha^2 + \alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1) + \beta^2$

6.36. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
i) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$
ii) $9x^2 - 4y^2 - 4y - 1$
iii) $x^2 - y^2 - \omega^2 + 2x - 2y\omega + 1$
iv) $x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$
v) $9(x + y)^2 - 6y(x + y) + y^2$
vi) $(\alpha^3 - 1) - 2(\alpha^2 - 1) - (\alpha - 1)^2$
vii) $(\omega - 1)^3(\omega^2 - 4) + (4 - \omega^2)$

6.37. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:
i) $(x^2-5x+6)(x-1) - (x-3)(x^2-1)$
ii) $4(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)^2$
iii) $(5\alpha^2 + 2\alpha - 3)^2 - (\alpha^2 - 2\alpha - 3)^2$
iv) $(3x - 6)(x^2 - 1) - (5x - 10)(x - 1)^2$
v) $(\omega^2 - 9)^2 - (\omega + 3)^2$

6.38. Να γίνει γινόμενο η παράσταση:
$$(\nu^2 + 3\nu + 1)^2 - 1.$$
[Απ.ν(ν+1)(ν+2)(ν+3)]

6.39. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
α) $\kappa^4 - \lambda^4 - (\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)^3$
β) $(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2$
γ) $\alpha^6 - 1$
δ) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$

6.40. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
α) $4\alpha^2 - 4\alpha + 1 - 2\alpha(2\alpha-1) + 18\alpha^3 - 9\alpha^2$
β) $\kappa^5 + 2\kappa^4 + \kappa^3 - \kappa^2 - 2\kappa - 1$

6.41. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
i) $1 - x^3$
ii) $(2+x+x^2)^2 - 1$
iii) $(2+x+x^2)^2 - x^2$
iv) $x^3 + 2x^2 - 3$

6.42. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
i) $\alpha^3 + \beta^3 - \alpha - \beta - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$
ii) $\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 - \beta^2\gamma + \alpha^2\gamma - \alpha\gamma^2$
iii) $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma$
iv) $\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + \beta^3\gamma^2 - \beta^2\gamma^3 + \gamma^3\alpha^2 - \gamma^2\alpha^3$

Θέματα με παραγοντοποίηση

6.43. **i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μη αρνητικών ακεραίων α, β με $\alpha > \beta$ ο αριθμός
$$\kappa = \frac{(2\alpha+1)^2 - (2\beta+1)^2}{4}$$
είναι θετικός ακέραιος.
ii) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες ο κ είναι πρώτος, δηλαδή είναι $\kappa > 1$ και οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 1 και κ.
[Απ. ii)α=1, β=0]

6.44. Αν ισχύει $(10^5 + 25)^2 - (10^5 - 25)^2 = 10^\nu$, όπου ν φυσικός αριθμός, να βρεθεί η τιμή του ν.
[Απ. ν=7]

6.45. Να απλοποιηθεί το κλάσμα:

$$K = \frac{2+4+6+8+\ldots+2002}{3+6+9+12+\ldots+3003}.$$

[Απ. $K=\frac{2}{3}$]

6.46. Να γίνει γινόμενο η παράσταση

$$\Pi = \alpha^3 + \beta^3 - \alpha - \beta - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2.$$

6.47. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (2 + x + x^2) - x^3$$

(Υπόδειξη: Προσθέστε και αφαιρέστε τον 1.*)*

[Απ. $A=(1+x+x^2)(4+x^2)$]

6.48. **α)** Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$x^4 + 4y^4.$$

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $y \geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

6.49. Δίνεται το άθροισμα

$$S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1^2 .$$

α) Να αποδείξετε ότι $100^2 - 99^2 = 100 + 99$ και έπειτα ότι $S = 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1$.

β) Να υπολογίσετε το S χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που εφάρμοσε ο Gauss όταν ήταν μικρός.

[Απ. β) S=5050]

ΕΝΟΤΗΤΑ 7.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7.1. Να κάνετε τις διαιρέσεις:
i) $(x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x + 5)$
ii) $(18x^3 + 9x^2 - 50x - 25) : (3x - 5)$
iii) $(2x^3 - 3x^2 - 17x - 12) : (2x + 3)$
iv) $(15\alpha^3 - 14\alpha^2 + 7\alpha + 6) : (5\alpha + 2)$

7.2. Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις:
i) $(x^3 + 4x^2 - 18x + 2) : (x^2 + 1)$
ii) $(\omega^3 + 4\omega^2 - 11\omega - 30) : (\omega^2 - \omega - 6)$
iii) $(-2y^4 + 8y^3 - 16y + 8) : (2y^2 - 4)$
iv) $(2x^5 + 4x^6 + x^2 - 6 + 5x - 3x^3) : (x - 3 + x^2 + 2x^3)$

7.3. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
i) $[(3x+5)^2 + (2x+3)^2 - 3x(2x+4) - (x+1)^2] : (3x - 2)$
ii) $[(x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2] : (x^2 + x - 12)$
iii)

7.4. Να βρεθεί το πολυώνυμο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x^2 - x + 1$ να δίνει γινόμενο το $x^4 - x^2 + 2x - 1$.

7.5. Να βρεθεί το πολυώνυμο, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x + 3$ γίνεται $x^3 - 5x^2 + 7x + 95$.

7.6. Αν είναι $\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 3$, να εκτελεστεί η διαίρεση:

$$[\varphi(x) + \varphi(x-2) - \varphi(x-1)] : (x - 3)$$

7.7. Αν είναι $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, να γίνει η διαίρεση:

$$[\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - \varphi(x)] : (x - 2)$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 8.

Ε.Κ.Π. & Μ.Κ.Δ. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8.1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $12\alpha^3\beta^2\gamma$, $15\alpha^2\beta^3\gamma$, $6\alpha^4\beta^3$
β) $8\alpha^2x^3$, $4\alpha^3x^5$, $12\,\alpha^3x^3$
γ) $3\alpha^2(\alpha-\beta)^2$, $6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$

8.2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $4(x^2-y^2)$, $6(x+y)^2$, $3(x-y)^2$
β) $\alpha^2-\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $\alpha^3-\beta^3$
γ) $\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-8$, α^2-4 , $\alpha^2-2\alpha$
δ) $\alpha^2-3\alpha+2$, $\alpha^2+3\alpha-4$, $\alpha^3-\alpha$, $\alpha^2-2\alpha+1$

ΕΝΟΤΗΤΑ 9.

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

9.1. ***Τι ονομάζουμε κλασματική αλγεβρική παράσταση;***

Απάντηση:

Μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μεταβλητή στον παρονομαστή, λέγεται **κλασματική αλγεβρική παράσταση**.

Για παράδειγμα: Οι παραστάσεις $\frac{1}{x}$, $\frac{2\alpha}{\beta+3}$, $\frac{x^2-5y}{xy-3y^4}$ είναι κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9.2. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

i) $\frac{33\alpha^2\lambda\mu}{22\alpha\lambda}$ **ii)** $\frac{\alpha^2-3\alpha}{6\alpha^3-18\alpha^2}$

iii) $\frac{\alpha^2-4}{3\alpha^2-6\alpha}$ **iv)** $\frac{\alpha^2-4\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta}$

9.3. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

i) $\frac{3\alpha-3\beta}{4\beta-4\alpha}$ **ii)** $\frac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}$

iii) $\frac{x^3-x}{x^2+x}$ **iv)** $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

9.4. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα

i) $\frac{x^2-1}{(1-x)^2}$ **ii)** $\frac{\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2}$

iii) $\frac{\alpha\lambda-\alpha\mu+\lambda x-\mu x}{\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta x-\gamma x}$ **iv)** $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$

9.5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $\frac{9x^2-4y^2}{9x^2-12xy+4y^2}$ **ii)** $\frac{xy^2-7y^2+x-7}{x^2-14x+49}$

iii) $\frac{49x^2-16y^2}{49x^2-56xy+16y^2}$ **iv)** $\frac{3\alpha\beta^3+3\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2}{6\alpha\beta^3-6\alpha^3\beta}$

9.6. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

i) $\frac{\omega^4-81}{\omega^2-9}$ **ii)** $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}$

iii) $\frac{(\alpha\beta-1)^2-(\alpha+1)^2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$ **iv)** $\frac{(x^2-4)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+3}$

9.7. Δίνεται το κλάσμα $K=\frac{4x^2+4x-48}{2x^2-8x+6}$.

i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;

ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα;

iii) Για ποιες τιμές του x παίρνει την τιμή μηδέν;

[Απ. i)x≠1 και 3 iii)x=-4]

9.8. Για ποιες τιμές του κ το παρακάτω κλάσμα παίρνει την τιμή μηδέν;

$$\frac{\kappa^2-14\kappa+49}{\kappa^2-49}$$

[Απ. καμμία]

9.9. Δίνεται η παράσταση $A=\frac{(3\alpha-2\beta)^2-(2\alpha-3\beta)^2}{(5\alpha-4\beta)^2-(4\alpha-5\beta)^2}$

και οι αριθμοί α, β δεν είναι ίσοι ούτε αντίθετοι.

Να δείξετε ότι $A>\frac{1}{2}$.

9.10. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $\frac{x^3+2x^2-2-x}{x^2+3x+2}$ **ii)** $\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta-\beta^4}$

iii) $\frac{\alpha^4x-\beta^4x}{2\alpha^3+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+2\beta^3}$ **iv)** $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\alpha-\beta-\beta^2}$

9.11. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-yx^3-y^2x^2+y^3x}$$

9.12. Δίνεται το κλάσμα $A=\frac{(x-2)^2+2x^2-4x}{9x^2-4}$

i) Ποιες τιμές δεν μπορεί να πάρει το x;

ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα.

iii) Να λυθεί η εξίσωση Α = 1.

[Απ. iii) x=-2]

9.13. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \dfrac{x^2-7x+6}{x^2-36}$,

$B = \dfrac{x^2+7x+6}{x^2-1}$.

i) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι δύο παραστάσεις;

ii) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β.

iii) Να αποδείξετε ότι: $(A+B)^2 - (A-B)^2 = 4$.

9.14. Να δείξετε ότι:

$$\frac{x^7-2x^4y^3+xy^6}{x^5-x^2y^3-x^4y+xy^4} = x^2+xy+y^2$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 10.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

10.1. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4}$ **ii)** $\frac{x^2-1}{\alpha+\beta} : \frac{x+1}{\alpha^2-\beta^2}$

10.2. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{\alpha^2-3}{6\alpha\beta} \cdot \frac{12\beta}{5\alpha^4-15\alpha^2}$ **ii)** $\frac{\alpha^2-16}{\alpha^2-8\alpha+16} : \frac{3\alpha+12}{3\alpha-9}$

iii) $\frac{3\kappa^2-6\kappa}{1-2\kappa+\kappa^2} : \frac{12-3\kappa^2}{2\kappa^2+2\kappa-4}$

[Απ. i) $\frac{2}{5\alpha^3}$ ii) $\frac{\alpha-3}{\alpha-4}$ iii) $\frac{2\kappa}{1-\kappa}$]

10.3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$A = \frac{x^2y^2-y^4}{x^3-y^3} : \frac{xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2}$ είναι σταθερή.

[Απ. Α=1]

10.4. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$\frac{8x^3}{x^3-y^3} : \frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x}{xy-y^2}$ είναι σταθερή.

[Απ. 1]

10.5. Δίνεται το κλάσμα $A = \frac{x^3-x^2-4}{x^2-5x+6}$

i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;

ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα.

10.6. Να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2+2\alpha\sqrt{2}+2}{5+4\alpha} : \frac{\alpha^2-2}{16\alpha^2+25+40\alpha} = \frac{(4\alpha+5)(\alpha+\sqrt{2})}{\alpha-\sqrt{2}}.$$

Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

10.7. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $\frac{3}{5} - \frac{5+9\alpha}{15\alpha}$ **ii)** $\frac{\beta+4}{4\beta} - \frac{1}{\beta}$

[Απ. i) $-\frac{1}{3\alpha}$ ii) $\frac{1}{4}$]

10.8. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1}$

ii) $\frac{2}{x-y} + \frac{4y}{y^2-x^2}$

iii) $\frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha+2} - \frac{4}{\alpha^2-4}$

iv) $\frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha-3} - \frac{6}{\alpha^2-9}$

v) $\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

[Απ. i) $\frac{3}{x+1}$ ii) $\frac{2}{x+y}$ iii) $\frac{2}{\alpha+2}$ iv) $\frac{2}{\alpha+3}$ v) 2]

10.9. Αν οι αριθμοί x , y, z είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0.$$

10.10. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{4xy}{x^2-y^2}$

ii) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta} + \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

iii) $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta+\beta^2} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{a^2+\alpha\beta}$

iv) $\frac{\alpha^2}{xy} + \frac{(\alpha+x)^2}{x^2-xy} - \frac{(\alpha+y)^2}{xy-y^2}$

v) $\frac{1-\alpha}{\alpha-2} - \frac{\alpha-3}{\alpha+2} - \frac{4}{4-a^2}$

[Απ. i) $\frac{x-y}{x+y}$ ii) $-\frac{\beta}{\alpha}$ iii) $-\frac{\beta}{\alpha}$ iv) 1 v) $-\frac{2\alpha}{\alpha+2}$]

10.11. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{3}{2\alpha+2} - \frac{2}{3a-3} + \frac{5\alpha+3}{6a^2-6}$

ii) $\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2+\alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$

iii) $\frac{2\beta}{\alpha-2\beta} + \frac{\alpha}{2\beta+\alpha} - \frac{4\alpha\beta}{a^2-4\beta^2}$

iv) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x^2-4}$

v) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}+\dfrac{2x+4}{x^2-4x+4}$

10.12. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\dfrac{6\alpha\beta}{9\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{3\alpha}{3\alpha+\beta}+\dfrac{\beta}{3\alpha-\beta}$

ii) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{3x+3}-\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$

iii) $\dfrac{\kappa}{3-\kappa}-\dfrac{\kappa}{1+\kappa}+\dfrac{4}{\kappa^2-2\kappa-3}$

[Απ. i) $\frac{3\alpha+\beta}{3\alpha-\beta}$ ii) $\frac{x}{3(x-2)}$ iii) $\frac{2(\kappa-2)}{3-\kappa}$]

10.13. Δίνεται η παράσταση $A=1-\dfrac{6x}{x^2-9}+\dfrac{3}{x-3}$.

i) Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση;

ii) Να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται στην παράσταση.

[Απ. i) $x\neq -3$ και 3 ii) $A=\frac{x}{x+3}$]

10.14. Δίνεται η παράσταση

$$\Pi=\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{2x+1}{x}-\frac{x^2+x-3}{x^2+3x}$$

α) Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση;

β) Να γράψετε την παράσταση σε απλούστερη μορφή, αφού εκτελέσετε τις πράξεις.

[Απ. α) $x\neq 0,-3$ και 3 β) $\Pi=\frac{2(x+1)}{x}$]

10.15. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\cdot\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$

ii) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right):\left(\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\dfrac{1}{(\alpha-\beta)^2}\right)$

iii) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}+1\right)\cdot\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

iv) $\left(\alpha-\dfrac{4y^2}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta-\dfrac{4x^2}{\beta}\right):\left(1+\dfrac{2x}{\beta}+\dfrac{2y}{\alpha}+\dfrac{4xy}{\alpha\beta}\right)$

10.16. Να δείξετε ότι η παράσταση:

$\dfrac{4\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ είναι σταθερή.

10.17. Να εκτελεστούν οι πράξεις στην παράσταση:

$$\left(\frac{1}{x^2+x-6}-\frac{1}{4-x^2}-\frac{2}{x^2+2x}\right):\frac{x+4}{x^3-4x}$$

[Απ. $\frac{3}{x+3}$]

10.18. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

i) $\dfrac{1-x}{1+\dfrac{1}{x}}$ **ii)** $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$

10.19. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

i) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}}$ **ii)** $\dfrac{\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}{1-\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta}{1+\alpha\beta}}$

[Απ. i) β-α ii) -β]

10.20. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

i) $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+1}$ **ii)** $\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha-\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha+\beta}}$

[Απ. i) $\frac{\beta}{\alpha}$ ii) $\frac{1}{\beta}$]

10.21. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{1+\alpha}-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}$

ii) $\dfrac{3}{1+\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}}+\dfrac{3}{1+\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}}+\dfrac{3}{1+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}}$

[Απ. i) $\frac{1}{2\alpha^2-1}$ ii) 6]

10.22. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-\alpha\right)\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}:\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$$

[Απ. α]

10.23. Αν $\alpha=\dfrac{1}{1+x}$, $\beta=\dfrac{1}{1-x}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$T=\frac{\alpha+\beta x}{\beta-\alpha x}$$

10.24. Αν υποθέσουμε ότι: $\beta=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $x=\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$,

$y=\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}$ και $z=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$y=\frac{2xz}{x+z}.$$

10.25. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{1999\cdot 2000\cdot 2001}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4000}+\frac{1}{4002}$$

10.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$\left(\frac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\alpha}{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha} - \frac{2\beta+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \right) : \frac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

είναι σταθερή.

[Απ. 2]

10.27. Αν οι αριθμοί x , y, ω είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-\omega)} + \frac{y^2}{(y-\omega)(y-x)} + \frac{\omega^2}{(\omega-x)(\omega-y)} = 1.$$

Κεφάλαιο 2ο

Κεφάλαιο 2ο

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- *Η εξίσωση* $\alpha x + \beta = 0$
- *Εξισώσεις δευτέρου βαθμού*
- *Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού*
- *Κλασματικές εξισώσεις*
- *Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha x+\beta=0$

1.1. ***Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση;***
Τι γνωρίζετε για τις λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης;
Απάντηση:
Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ λέγεται **γραμμική εξίσωση**.
Οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(3-x)\cdot 2^{-1}=x$
β) $10^{-1}\cdot(x-3)=5\cdot 10^{-2}$.

[Απ. α)1 β)3,5]

1.2. Ποιος είναι ο ίδιος αριθμός, που πρέπει να τοποθετήσουμε σε κάθε ένα από τα παρακάτω τετραγωνάκια, ώστε να ισχύει η ισότητα;

$$\frac{\square}{6}+\frac{\square}{30}=\frac{\square}{\square}.$$

[Απ. 5]

1.3. Να βρεθούν δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που τα τετράγωνά τους να διαφέρουν κατά 15.

[Απ. 7,8]

1.4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{33}{10}+\frac{2x+1}{3}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{3x+2}{6}-\frac{2x-1}{10}$$

[Απ. x=60]

1.5. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\,(1-x)$ **β)** $\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}+1}$

[Απ. α)1 β) $\frac{\sqrt{5}}{2}$]

1.6. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{\alpha x-2}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2\alpha}{x^2-1}$.
α) Ποιοι αριθμοί δεν μπορούν να είναι λύση της εξίσωσης αυτής;
β) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει λύση $x=3$.

[Απ. α)-1,1 β)α=5]

1.7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2}-\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{3x+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}+\frac{15}{2}=0\,.$$

[Απ. x=-1]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

2.1. ***Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.***

Απάντηση:

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει τη γενική μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$.

Έχουμε διαδοχικά

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

$4\alpha\cdot\alpha x^2+4\alpha\cdot\beta x+4\alpha\cdot\gamma=0$ [πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με 4α]

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x=-4\alpha\gamma$ [μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο 2^{ο} μέλος]

$(2\alpha x)^2+2\cdot 2\alpha x\cdot\beta=-4\alpha\gamma$

$(2\alpha x)^2+2\cdot 2\alpha x\cdot\beta+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$ [στο 1^{ο} μέλος προσθέτουμε το β^2 για να γίνει συμπλήρωση τετραγώνου]

$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$ με Δ (διακρίνουσα) τότε η εξίσωση γράφεται:

$(2\alpha x+\beta)^2=\Delta$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$ τότε έχουμε:
  $2\alpha x+\beta=\pm\Delta$
  $2\alpha x=-\beta\pm\Delta$
  $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$ τότε έχουμε:
  $2\alpha x+\beta=0$
  $2\alpha x=-\beta$
  $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

2.1.1. Συμπέρασμα:

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$

- Αν $\Delta>0$ έχει δύο άνισες λύσεις τις $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$ έχει μία διπλή λύση την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$ δεν έχει λύση (αδύνατη).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - x = 0$ **ii)** $2x^2 - 7x = 0$

iii) $4x^2 + 36x = 0$ **iv)** $3x^2 = 5x$

[Απ. i)0,1 ii)0, $\frac{7}{2}$ iii)0,-9 iv)0, $\frac{5}{3}$]

2.3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - 1 = 0$ **ii)** $3x^2 - 27 = 0$

iii) $6x^2 + 12 = 0$ **iv)** $x^2 - 12 = 0$

v) $5x^2 - 10 = 0$ **vi)** $8x^2 - \frac{25}{2} = 0$

[Απ. i)-1,1 ii)-3, 3 iii)αδύνατη iv)$-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ v)$-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ vi)$-\frac{5}{4}$, $\frac{5}{4}$]

2.4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $300x^2 - 600 \cdot 2^5 = 0$ **ii)** $200x^2 = 2000x$

[Απ. i)-8,8 ii)0,10]

2.5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x(x^2 - 4) = 0$ **ii)** $4x(x^2 + 6) = 0$

iii) $(x - 5)(3x^2 - 147) = 0$ **iv)** $(2x + 1)(8 - x^2) = 0$

[Απ. i)-2,0,2 ii)0 iii)-7,5,7 iv)$-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$]

2.6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - 9x + 14 = 0$ **ii)** $x^2 - 12x + 20 = 0$

iii) $12x^2 - x - 6 = 0$ **iv)** $3x^2 - 5x - 2 = 0$

[Απ. i)2,7 ii)2, 10 iii)$\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$ iv)2, $-\frac{1}{3}$]

2.7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $1000x^2 + 4000 = 4000x$

ii) $400x^2 + 300x = 1000$

iii) $3 \cdot 2^{10} \cdot x^2 - 5 \cdot 2^{10} \cdot x + 2^{12} = 0$

[Απ. i)2 ii)-2, $\frac{5}{4}$ iii)αδύνατη]

2.8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x + 2)^2 = x + 2$

ii) $(x + 2)^2 + x^2 - 4 = 0$

iii) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 29$

iv) $x^2 + (x+1)^2 = (x + 2)^2$

v) $(2x + 1)^2 + (3x + 1)^2 = (5x + 2)^2$

[Απ. i)-1,-2 ii)0,-2 iii)3,-4 iv)3,-1 v)$-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$]

2.9. Να λύσετε την εξίσωση:

$$25(x + 2)^2 - 9(x - 2)^2 = 0.$$

[Απ. -8, $-\frac{1}{2}$]

2.10. α) Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$$A = (2x - 3)^2 - 8x^2 - 7(1 - x - x^2)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

[Απ. α)$A=3x^2-5x+2$ β)1, $\frac{2}{3}$]

2.11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x + 1)(x^2 + 2x - 8) = 0$

ii) $(2x - 1)(x^2 + 3)(x^2 + x - 2) = 0$

iii) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

iv) $2x^3 + x^2 - 3x = 0$

[Απ. i)-4, -1, 2, -2 ii)-2, 1, $\frac{1}{2}$ iii)$-\frac{3}{2}$, 0, 1]

2.12. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^2-5x+4)^2 + (2x^2-6x+4)^2 = 0.$$

[Απ. 1]

2.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$

β) $x^2 + 3\sqrt{3}\,x - 12 = 0$

γ) $4x^3 - 4\sqrt{3}\,x^2 - x + \sqrt{3} = 0$

[Απ. α)1, $\sqrt{2}$ β)$\sqrt{3}$, $-4\sqrt{3}$ γ)$\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$]

2.14. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x(x - \sqrt{5}) = 5$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης, να υπολογίσετε το γινόμενο: $x_1 \cdot x_2$.

[Απ. β)-5]

2.15. Δίνονται τα πολυώνυμα

$A = (x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2$ και

$B = (x-1)^2 - 4$

i) Να παραγοντοποιήσετε τα A, B.

ii) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\frac{A}{B}$;

iii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$.

iv) Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $\frac{A}{6B} = x - 3$.

v) Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $\frac{A}{x^2-9} = 3B$.

[Απ. i)$A=(x-3)^2(x+1)(x+4)$ $B=(x+1)(x-3)$ ii)$x \neq -1, x \neq 3$ iii)$(x-3)(x+4)$ iv)x=2 v)x=-5/2]

2.16. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{x^2-4x}{x}$,

$B = \frac{(x-3)(x^2-9)}{x+3}$ και $\Gamma = \frac{x^3-4x^2+4x}{x}$

i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μία από τις τρεις παραστάσεις;

ii) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και Γ.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $A^2 - B = \Gamma$.

[Απ. i)Η A και η Γ όταν $x \neq 0$, η B όταν $x \neq -3$ ii)$A=x-4$, $B=(x-3)^2$, $\Gamma=(x-2)^2$ iii)x=-1, x=3]

2.17. Δίνονται οι παραστάσεις $A = 2x + 4x^2$,

$B = 1 - 4x^2$ και $K = \frac{A}{B}$, $\Lambda = \frac{x^2+1+2x}{4x^3+8x^2+4x}$

i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται οι παραστάσεις K και Λ;

ii) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις K και Λ.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $K = \Lambda$.

[Απ. i)Η Κ όταν $x \neq \pm \frac{1}{2}$, η Λ όταν $x \neq 0$ και -1
iii)$x=\frac{1}{4}$]

2.18. Δίνονται οι παραστάσεις:
$$A = x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad \text{και} \quad B = (x-3)^2 - 4.$$

i) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$ και να βρείτε τις τιμές που μπορεί να παίρνει το x ώστε αυτό ορίζεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = -12$.

[Απ. i)$x \neq \pm 1$ και 5, $\frac{A}{B} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-5}$ ii)x=-16, x=4]

2.19. Να λυθεί η εξίσωση:
$$(x+1)^3 - 3(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1) = (x-1)^3 + 8$$
[Απ. -7 , 1]

2.20. Να λύσετε την επόμενη εξίσωση με άγνωστο το x.
$$(x-\alpha)^2 + (x+\alpha)^2 = (x-\alpha)(x+\alpha) + 4\alpha x .$$
[Απ. α,3α]

2.21. Να λυθεί η εξίσωση:
$$(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$$
[Απ. 1, 2]

2.22. Για τον θετικό αριθμό α ισχύει η ισότητα:
$$\frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha} = 2.$$

i) Να βρείτε τον α.

ii) Για την τιμή του α που θα βρείτε, να λύσετε την εξίσωση: $\alpha^{x-x^2} = \frac{1}{4}$.

[Απ. i)α=2 ii)-1,2]

2.23. Να λυθεί η εξίσωση: $5^{(x^2+3x+1)^2} = 5$.
[Απ. -3,-2,-1,0]

2.24. **i)** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
$$A = x^3 - 3x + 2 \quad \text{και} \quad B = x^5 - x^3 - x^2 + 1.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{B}{x+1} = A$.

[Απ. i)$A=(x-1)^2(x+2)$, $B=(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ ii)x=1]

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1. Δίνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $x+3$ και $x-3$. Το εμβαδόν του είναι $40\ cm^2$.

i) Να δείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει την περίμετρο του ορθογώνιου είναι μονώνυμο και να βρείτε το συντελεστή και το κύριο μέρος του.

ii) Να βρείτε το x.

iii) Να υπολογίσετε την περίμετρό του.

[Απ. i)4x ii)x=7 iii)28cm]

3.2. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου έχουν μήκη $2x$ m, $\sqrt{3}\,(x+1)$ m ενώ η υποτείνουσα έχει μήκος 4 m. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

[Απ. $6+2\sqrt{3}$ m]

3.3. Το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 5cm και η περίμετρός του ισούται με 12cm. Να υπολογίσετε τα μήκη των κάθετων πλευρών του.

[Απ. 3cm, 4cm]

3.4. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν διαφέρουν κατά 2cm και η υποτείνουσά του είναι 10cm.

[Απ. 6cm , 8cm]

3.5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μια κάθετη πλευρά είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από την άλλη, ενώ η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μικρότερη κάθετη πλευρά.
Να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου, η περίμετρος του και το εμβαδόν του.

[Απ. 3cm 4cm 5cm , 12cm , 6cm^2]

3.6. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 10m , αν η μια κάθετη πλευρά είναι ίση με το ημιάθροισμα της υποτείνουσας και της άλλης κάθετης πλευράς.

[Απ. 6m, 8m]

3.7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ έχουμε: $\alpha = \dfrac{\omega^2+1}{\omega}$ και $\beta = \dfrac{\omega^2-1}{\omega}$ και $\omega > 1$. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ.

[Απ. 2ω+2]

3.8. Σε ένα ορθογώνιο η μια πλευρά του είναι κατά 2cm πιο μεγάλη απ' το διπλάσιο της άλλης. Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 60cm^2, να βρεθεί η περίμετρος του και η διαγώνιος του.

[Απ. 34cm , 13cm]

3.9. Οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να υπολογίσετε τις πλευρές του και το εμβαδόν του.

[Απ. 3, 4, 5]

3.10. Το τετράγωνο της ηλικίας ενός μαθητή είναι ίσο με το ενναπλάσιο της ηλικίας που θα έχει μετά από 10 χρόνια. Ποια είναι η ηλικία του;

[Απ. 15]

3.11. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών άρτιων φυσικών αριθμών είναι ίσο με 100. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

[Απ. 6,8]

3.12. Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ δίνονται $AB = 2x-7$ cm , $B\Gamma = x-5$ cm και το εμβαδόν του ισούται με 27 cm^2. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του.

[Απ. 9cm, 3cm]

3.13. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ έχει $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$. Αν $AB = A\Delta = x-2$ cm , $\Gamma\Delta = x+10$ cm και εμβαδόν 112 cm^2 , να υπολογίσετε τις βάσεις του και το ύψος του.

[Απ. β=υ=8cm, Β=20cm]

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1. ***Ποια εξίσωση ονομάζουμε κλασματική;.***

Απάντηση:

Μια εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή, λέγεται **κλασματική εξίσωση**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x}{x^2-4}$

β) $\dfrac{2}{x^2+2x} = \dfrac{-1}{x^2+5x+6}$

γ) $\dfrac{13}{x+1} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{5x-3}{x^2-1}$

[Απ. α)3/2 β)αδύνατη γ)αδύνατη]

4.3. Να εξετάσετε αν έχουν τις ίδιες λύσεις οι εξισώσεις: $\dfrac{8}{x-10} = \dfrac{x}{10-x}$ και $\dfrac{x-10}{8} = \dfrac{10-x}{x}$

[Απ. όχι]

4.4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{1}{x^2-2x} = \dfrac{4-x}{x^2+2x}$

β) $\dfrac{5}{x+3} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x^2+5x+6}$

γ) $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{x^2+4}{x^2-2x}$

δ) $\dfrac{x+2}{x-3} + \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{2(x^2+6)}{x^2-9}$

[Απ. α)3 β)αδύνατη γ)αδύνατη δ)Όλοι εκτός των -3,3]

4.5. Δίνονται οι κλασματικές παραστάσεις

$\mathrm{A} = \dfrac{2x}{x^2+2x}$, $\mathrm{B} = \dfrac{3}{2x-4}$ και $\Gamma = \dfrac{x-14}{2(x^2-4)}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \Gamma$.

[Απ. α)Η Α όταν $x \neq 0$ και -2. Η Β όταν $x \neq 2$, η Γ όταν $x \neq \pm 2$ β)Όλοι οι αριθμοί εκτός των 0,-2,2]

4.6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x} = 2$

β) $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-2x} = 0$

γ) $\dfrac{2x-3}{x} - \dfrac{5x-3}{x^2} = \dfrac{2x^2+x-8}{x^3} + 2$

δ) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

[Απ. α)2 β)1, $-\frac{1}{2}$ γ)1, -0,8 δ)αδύνατη]

4.7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{4}{x+1} - \dfrac{4x-3}{x^2-1} = 2$

β) $1 - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{2x}{x^2-4}$

γ) $\dfrac{12}{3x-2} - \dfrac{8}{3x+2} = \dfrac{2-33x}{4-9x^2}$

[Απ. α) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ β)0 γ)2]

4.8. Το άθροισμα των κλασμάτων $\dfrac{2}{x^2+2x}$ και $\dfrac{3}{2x+4}$ με ποιόν αριθμό πρέπει να είναι ίσο, ώστε η εξίσωση που θα προκύψει να έχει λύση $x = 1$;
Ποια είναι η άλλη λύση της εξίσωσης;

[Απ. $\frac{7}{6}$, η άλλη λύση είναι $-\frac{12}{7}$]

4.9. Δίνονται οι παραστάσεις

$$\mathrm{A} = \frac{x+\dfrac{2x}{x-2}}{1+\dfrac{4}{x^2-4}} \quad , \quad \mathrm{B} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^3}{x^3-x}.$$

α) Να μετασχηματιστούν οι Α και Β στην πιο απλή τους μορφή και να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται.

β) Να λύσετε η εξίσωση $\dfrac{2}{x}\cdot\mathrm{A} - (x+1)\cdot\mathrm{B} = 0$.

[Απ. α)Η Α όταν $x\neq 0$, 2 και -2. Η Β όταν $x\neq 0$, 1 και -1 β)4]

4.10. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$x^2-\frac{\lambda^2+1}{\lambda-1}\cdot x+2\lambda+2=0$$

έχει ρίζα τον αριθμό -1.

[Απ. -1, $\frac{2}{3}$]

4.11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$

β) $\frac{x-1}{x-3}+1=\frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}$

γ) $\frac{x-1}{x+3}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x^2+3}{x^2-9}$

[Απ. α)αδύνατη β)1,4 γ)1,-6]

4.12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{5x-4}{x^2+5x+6}-\frac{10x+1}{3x^2-27}=\frac{5}{3x-9}$

β) $\frac{4}{x^2-x-2}+\frac{x+5}{2x+2}=\frac{2x}{3x-6}$

γ) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{x^2+2x-3}$

δ) $\frac{3x^2}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2+2x}=\frac{x+2}{x-2}+2$

[Απ. α) $\frac{4}{103}$ β)3 γ)αδύνατη δ)1, $\frac{2}{5}$]

4.13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{1-x}+1=\frac{3x^2-5}{x^2-1}$

β) $\frac{2x+1}{x^2+3x}+\frac{4x}{x^2-9}=\frac{4}{3+x}-\frac{2}{3-x}$

γ) $\frac{7-x^2}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}$

δ) $\frac{x-2}{x}+\frac{4}{x-2}=\frac{8}{x^2-2x}$

[Απ. α)-4 β)αδύνατη γ)2 δ)-1]

4.14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x^2-x}=\frac{x^2-3x+2}{x}$

ii)

[Απ. i)-3 ii)]

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

5.1. ***Πως συγκρίνουμε δύο αριθμούς α και β;.***

Απάντηση:

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς α και β, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha-\beta$ και:

- Αν $\alpha-\beta>0$ τότε $\alpha>\beta$
- Αν $\alpha-\beta<0$ τότε $\alpha<\beta$
- Αν $\alpha-\beta=0$ τότε $\alpha=\beta$

5.2. ***Να εξηγήσετε ότι αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $\alpha>\beta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.***

Απάντηση:

Έχουμε: $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=\alpha+\gamma-\beta-\gamma=\alpha-\beta>0$, αφού $\alpha>\beta$.

Άρα $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

5.3. ***Να εξηγήσετε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>0$ τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$.***

Απάντηση:

Έχουμε: $\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\gamma=\gamma\cdot(\alpha-\beta)>0$, αφού $\gamma>0$ και $\alpha-\beta>0$.

Άρα $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$.

5.4. ***Να εξηγήσετε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα α-ντίθετης φοράς. Δηλαδή αν $\alpha>\beta$ και $\gamma<0$ τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$.***

Απάντηση:

Έχουμε: $\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\gamma=\gamma\cdot(\alpha-\beta)<0$, αφού $\gamma<0$ και $\alpha-\beta>0$.

Άρα $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$.

5.5. ***Να εξηγήσετε ότι αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.***

Απάντηση:

Έχουμε: $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)=\alpha+\gamma-\beta-\delta=(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)>0$, αφού $\alpha-\beta>0$ και $\gamma-\delta>0$.

Άρα $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

Βασικές εφαρμογές

5.6. ***Να αποδείξετε ότι αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$ τότε $\alpha>\gamma$. (Μεταβατική ιδιότητα)***

Απάντηση:

Επειδή $\alpha>\beta$ τότε $\alpha-\beta>0$ (1). Όμοια, επειδή $\beta>\gamma$ τότε $\beta-\gamma>0$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2), οπότε έχουμε:

$$\alpha-\beta+\beta-\gamma>0$$
$$\alpha-\gamma>0$$
$$\alpha>\gamma.$$

5.7. ***Να αποδείξετε ότι αν $\alpha>\beta$ τότε $-\alpha<-\beta$.***

Απάντηση:

Έχουμε διαδοχικά:
$$\alpha > \beta$$
$$(-1)\cdot\alpha < (-1)\cdot\beta$$
$$-\alpha < -\gamma\ .$$

5.8. ***Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > \beta$ και α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.***

<u>Απάντηση:</u>

Αφού οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε $\alpha\beta > 0$ οπότε και $\frac{1}{\alpha\beta} > 0$.

Έχουμε διαδοχικά:
$$\alpha > \beta$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\alpha > \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\beta$$
$$\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}\ .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.9. Αν $x > y$, να συγκρίνετε τους αριθμούς
$\frac{3}{4}x - 5z$ και $\frac{3}{4}y - 5z$.

5.10. Αν $\kappa > \lambda$, να συγκρίνετε τους αριθμούς
$8{,}3\mu - 6\kappa$ και $8{,}3\mu - 6\lambda$.

5.11. Αν $\beta > 0$ να δείξετε ότι: $\alpha + \beta > \alpha - \beta$.

5.12. Αν $x < z$ και $0 < y < \omega$ να δικαιολογήσετε ότι:
$$x - \frac{1}{y} < z - \frac{1}{\omega}\ .$$

5.13. Αν $x > 3$ να συγκρίνετε τους αριθμούς
$\mathrm{A} = \sqrt{(x-3)^2}$ και $\mathrm{B} = 2x$.

[Απ. Α<Β]

5.14. Αν είναι $2\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:
$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{3} < \frac{\beta}{2}\ .$$

5.15. Αν $-1 < x < 3$ και $2 < y < 3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

i) $\mathrm{A} = 3x + 2y - 1$
ii) $\mathrm{B} = 4x - 2y + 5$

[Απ. i) $0<A<14$ ii) $-5<B<13$]

5.16. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
$$\frac{1}{2}\cdot x + 2 - \frac{3x+1}{3} > x \quad \text{και} \quad \frac{2(x-3)}{3} - x < 0.$$

[Απ. $-6<x<\frac{10}{9}$]

Κεφάλαιο 3ο

Κεφάλαιο 3ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- *Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης*
- *Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του*
- *Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1.1. *Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx + β;*

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $y = \alpha x$.

1.2. *Τι παριστάνει η εξίσωση αx + β = γ;*

Απάντηση:

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = \gamma$ παριστάνει μια ευθεία ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το σημείο Α$(5\lambda-2, 2\lambda+1)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x+6$.

[Απ. λ=1]

1.2. Δίνονται οι ευθείες ε_1, ε_2 με εξισώσεις $y = (\lambda^2+4)x + 5$ και $y = 4\lambda x - 3\lambda$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες.

[Απ. λ=2]

1.3. Για ποιες τιμές του κ οι ευθείες $y = 3\kappa^2 x + 1$ και $y = (\kappa+4)x - 5\kappa^2$ είναι παράλληλες;

[Απ. κ=-1 ή κ=4/3]

1.4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1 : y = (3\lambda-4)x + 2\lambda - 6$.
Για ποια τιμή του λ η ευθεία ε_1 :
α) Περνά από το σημείο Α(2,2)
β) Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
γ) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων
δ) Είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_2 : y = 8x + 7$
ε) Τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3
στ) Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 4
ζ) Είναι παράλληλη στην ευθεία
$$\varepsilon_3 : y = \frac{(3\lambda-1)x+2\lambda-1}{2}$$

[Απ. α)λ=2 β)λ=$\frac{4}{3}$ γ)λ=3 δ)λ=4 ε)λ=$\frac{18}{11}$ στ)λ=5 ζ)λ=$\frac{7}{3}$]

1.5. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $4x + 3y = 12$.
i) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.
ii) Να βρείτε τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας ε με τους άξονες.
iii) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

[Απ.ii)Α(3,0) Β(0,4) iii)Π=12,Ε=6]

1.6. Δίνεται η ευθεία $\frac{2-\alpha}{2}x + (\alpha-1)y = 12$ η οποία διέρχεται από το σημείο Μ(3,–2). Να βρείτε:
i) Την τιμή του α.
ii) Τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας με τους άξονες.
iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

[Απ.i)α=-2 ii)Α(6,0) Β(0,-4) iii)Ε=12]

1.7. Δίνονται οι ευθείες ε_1, ε_2 με εξισώσεις $y = 2\kappa^2 x + 3\lambda + 1$ και $y = (5\kappa-3)x + 9$ αντίστοιχα, όπου κ, λ ακέραιοι αριθμοί. Δίνεται ακόμα ότι η ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(1,6)$.
i) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ..
ii) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες.

[Απ.i)κ=λ=1]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=4 \\ y=1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x=2 \\ x+y=5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} y=x \\ 2x+y=6 \end{cases}$

[Απ. α) (x,y)=(3,1) β) (x,y)=(2,3) γ) (x,y)=(2,2)]

2.2. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

α) $\begin{cases} y=x \\ y=2x-3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y=x+2 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

[Απ. α) (x,y)=(3,3) β) (x,y)=(2,4)]

2.3. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω συστήματα έχουν λύση, ποια είναι αδύνατα και ποια είναι αόριστα.

i) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ y=x+3 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4y=6x+7 \end{cases}$ **iv)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=3 \\ 2x-8y-12=0 \end{cases}$

2.4. Το σύστημα $\begin{cases} 2(x+y)-4=0 \\ 5(x+y)-10=0 \end{cases}$ είναι αδύνατο ή αόριστο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Να λύσετε τα συστήματα και έπειτα να κάνετε την επαλήθευση.

i) $\begin{cases} x=3y+1 \\ 3x-2y=-11 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=31 \end{cases}$

[Απ. i)(x,y)=(-5,-2) ii) (x,y)=(22,9)]

2.2. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x-2y=2 \\ x-7y+13=0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 5x+y=45 \\ 2y-3x=25 \end{cases}$

[Απ. i)(x,y)=(8,3) ii) (x,y)=(5,20)]

2.3. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x=5(y+1) \end{cases}$.

[Απ. (x,y)=(5,2)]

2.4. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2[x-(4-y)]+20=0 \\ x+4y=0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \end{cases}$

[Απ. i)x=-8, y=2 ii)x=$\frac{5}{2}$,y=1]

2.5. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x+y=-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\cdot x-\frac{2}{3}\cdot y=\frac{19}{2} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 0,3x-1,5y+0,3=0 \\ y-0,3x=-0,2 \end{cases}$

[Απ. i)(x,y)=(5,-3) ii)(x,y)=(4,1)]

2.6. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{4x-y}{6}=1-\frac{x}{4} \\ x+y=7 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+4y=1 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$

[Απ. i)x=2, y=5 ii)x=-2,y=$\frac{1}{2}$]

2.7. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ \frac{x}{3}=\frac{y}{4} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{3x-2y+1}{2}=\frac{x-3y-2}{3} \\ \frac{x+2y}{5}=\frac{2x+y+1}{3} \end{cases}$

[Απ. i)(-3,-4) ii)(-1,-2)]

2.8. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{2x+2}{3}+y=3 \\ \frac{x+2}{2}-1=\frac{y+2}{3} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x+3+(y+1)^2=y^2 \\ 3(x+2y)=2 \end{cases}$

[Απ. i)(2,1) ii)αδύνατο]

2.9. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3}-\frac{x+y}{6}=-\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2}+y=7 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x+y+4=0 \\ \frac{3x+y}{3}+\frac{2y-x}{5}=x+\frac{2}{5} \end{cases}$

[Απ. i)(x,y)=(4,5) ii)(x,y)=(-2,0)]

2.10. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (2\alpha-1)x+(4\beta+1)y=3 \\ (\alpha+1)x+(\beta-2)y=2 \end{cases}$ με αγνώστους τα x, y. Να βρείτε τις τιμές των α, β, ώστε το σύστημα να έχει λύση το ζεύγος $(-1,1)$.

[Απ. α=-1/2, β=9/2)]

2.11. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 2(x+2y)-3(x-3y)=-83 \\ 2(y-2x)-(x-2y)=-49 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2(3x+2y)+4(2y+3x)=42 \end{cases}$

[Απ. i)x=5, y=-6 ii)αόριστο]

2.12. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x-2}{4}+\frac{y-3}{8}=\frac{x}{2}-1 \\ \frac{4x+1}{4}-\frac{5y-9}{6}=\frac{x}{2}+1 \end{cases}$ ii)

[Απ. i)x=2,y=3 ii)]

2.13. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2}+\frac{x+y}{5}=x+\frac{y+2}{3}+1 \\ x-\frac{x+y}{2}-1=y-\frac{x+6}{3} \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{4}{3} \\ 2x-3y+\frac{x+y}{5}=-4 \end{cases}$

[Απ. i)(6,4) ii)(2,3)]

2.14. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x-5y=\lambda^2-3 \\ 2x-5y=1 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σύστημα να είναι αόριστο.

[Απ. λ=2 ή λ=-2]

2.15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x-3y=3 \\ \mu x-\mu y=\mu^2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του μη μηδενικού αριθμού μ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.
Για την τιμή του μ που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

[Απ. μ=1]

2.16. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5 \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=2 \end{cases}$

[Απ. $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}$]

2.17. Δίνεται η εξίσωση $5x-4y=7$. Να βρείτε μια άλλη εξίσωση που να σχηματίζει με αυτή
α) ένα σύστημα, που να έχει μια λύση.
β) ένα σύστημα, που να είναι αδύνατο.
γ) ένα σύστημα, που να είναι αόριστο.

2.18. Να λυθούν τα συστήματα:
i) $\begin{cases} x^2-9y^2=5 \\ x+3y=2 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12} \\ x+y=7 \end{cases}$

[Απ. i)x=3,y=$-\frac{1}{3}$ ii)(3,4), (4,3)]

2.19. Να λυθούν τα συστήματα:
i) $\begin{cases} y-x=1 \\ x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$

[Απ. i)(-1,0), (2,3) ii)(2,1), (3,-1)]

2.20. Να λυθούν τα συστήματα:
i) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x^2-xy+2y=3 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x-y^2=9 \end{cases}$

[Απ. i)(1,2), ($\frac{8}{5}$,$\frac{11}{10}$) ii)(2,1), (53,-16)]

2.21. i) Να βρείτε τον β, αν η ευθεία με εξίσωση $y=2x+\dfrac{\beta}{3}$ διέρχεται από το σημείο Α(0,1).
ii) Για τις τιμές του β που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} y=2x+\dfrac{\beta}{3} \\ y^2+xy=12 \end{cases}$

[Απ. i)β=3 ii)(x,y)=(1,3), ($-\frac{11}{6}$,$-\frac{8}{3}$)]

2.22. Να λυθούν τα συστήματα:
i) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3 \\ \dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{2}{y-2}=4 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \dfrac{4}{x-y}+\dfrac{12}{x+y}=-1 \\ \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{2x+2y}=0 \end{cases}$

[Απ. i)($-\frac{1}{4}$,1) ii)(5,-15)]

2.23. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι:
ΑΒ $=x+4$, ΑΓ $=4x-y$ και ΒΓ $=y+2$.
Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.

[Απ. 7]

2.24. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, το οποίο έχει περίμετρο 10 cm και η βάση του είναι μεγαλύτερη κατά 1 cm κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του.

[Απ. 3cm 4cm]

2.25. Ένας φυσικός αριθμός, όταν διαιρείται με το 5 ή το 3 αφήνει υπόλοιπο 2 και πηλίκα που δίνουν άθροισμα 8. Ποιος είναι ο αριθμός;

[Απ. 17]

2.26. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ που διέρχεται από τα σημεία Α(2,5) και Β(4,–1).

[Απ. y=-3x+11]

2.27. Να βρεθούν τα α, β, ώστε η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ να αληθεύει για $x=3$ και $x=-7$.

[Απ. α=4, β=-21]

2.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+x+\beta$. Αν ισχύει $f(1)=2$ και ο 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ να βρείτε τα α, β καθώς και το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση.

[Απ. α=-1, β=2, Μέγιστο]

2.29. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ αν αυτή διέρχεται από τα σημεία $(\alpha,-1)$ και $(1,3\alpha)$.

[Απ. y=-x-2]

2.30. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθενε 9 χρόνια ενωρίτερα, θα βασίλευε κατά το της ζωής του. Αν .ομως πέθενε 9 χρόνια αργότερα, θα βασίλευε κατά το μισό της ζωής του. Σε ποά ηλικία πέθανε και επί πόσο χρόνο βασίλεψε;

[Απ. Πέθανε 33 χρόνων και βασίλεψε 12 χρόνια]

2.31. Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = $3x+6$, ΒΓ = x^2 , ΓΔ = $5y+4$ και ΔΑ = y όπου x θετικός ακέραιος. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογώνιου.

[Απ. 20]

2.32. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το Α έχει ΑΒ = x^2 , ΑΓ = $5-y^2$ και τα ύψη του από το Β, Γ είναι ΒΔ = $x+y$ και ΓΕ = 1 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

[Απ. ΑΒ=ΑΓ=1 ή ΑΒ=ΑΓ=4]

2.33. Αν η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ έχει διακρίνουσα 16 και κοινή λύση με την εξίσωση
$3+\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2\alpha+1}{x-1}$, να βρείτε τα α, β.

[Απ. α=1,β=$-\frac{15}{4}$ ή α=-3,β=$-\frac{7}{4}$]

2.34. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 9. Αν ο αριθμός αυξηθεί κατά 27 προκύπτει διψήφιος αριθμός με εναλλαγή των ψηφίων του αρχικού αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

[Απ. 36]

Κεφάλαιο 4ο

Κεφάλαιο 4ο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- *Η συνάρτηση* $y = \alpha x^2$

- *Η συνάρτηση* $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \;,\quad \alpha \neq 0$

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \alpha x^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20x^2$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{\alpha^2+\beta^2} = 20$.

β) $\dfrac{f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)}{f(\alpha)+f(\beta)} = 2$.

1.2. Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x + 6$.

[Απ. (-2,4) , (3,9)]

1.3. Για ποιες τιμές του α η παραβολή $y = (2\alpha - 6)x^2$ έχει ελάχιστο;

[Απ. α>3]

1.4. Για ποιες τιμές του α η παραβολή $y = \dfrac{3-5\alpha}{7}\cdot x^2$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

[Απ. $\alpha > \frac{3}{5}$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές της μεταβλητής x οι οποίες να αντιστοιχούνται στο 11.

[Απ. x=-2, x=5]

2.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - (\lambda+1)x - 2$.

α) Για ποια τιμή του λ, η γραφική της παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1,-5)$;

β) Για την τιμή του λ που θα βρείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης όταν $-1 \le x \le 4$.

[Απ. α)λ=5]

2.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 4x + 5$.

i) Να βρείτε τις τιμές του λ, αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,8)$.

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

iii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τους άξονες.

[Απ. i)λ=-1]

2.4. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + 2\alpha x + \beta$.

i) Να βρείτε τα α, β αν γνωρίζετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή του συστήματος των αξόνων και από το σημείο $A(1,5)$.

ii) Να την παραστήσετε γραφικά.

[Απ. i)α=2, β=0]

2.5. Δίνεται η ευθεία $y = x + 3$ και η παραβολή $y = x^2 - 2x + 3$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών τους σημείων.

ii) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις τους στο ίδιο σύστημα αξόνων.

[Απ. (0,3) και (3,6)]

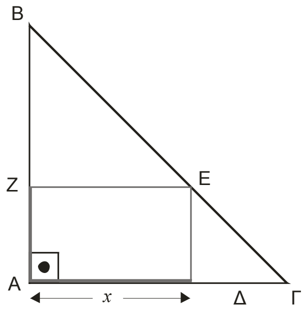
2.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $y = 2x^2 + \alpha x + \beta$ και $y = \alpha x - \beta$. Αν το σημείο Α(1,2) είναι κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων τότε:

i) Να βρεθούν τα α, β.

ii) Να βρεθεί το άλλο κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων.

[Απ. i)α=1, β=-1 ii)Β(-1,0)]

2.7. Στο επόμενο σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκος 10cm.



Να βρείτε την τιμή που πρέπει να πάρει το x ώστε το ορθογώνιο ΑΔΕΖ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

[Απ. 5cm]

2.8. Το άθροισμα μιας βάσης και του αντίστοιχου ύψους ενός τριγώνου είναι 12 cm.

i) Αν η βάση είναι $2x$ cm, να εκφράσετε το ύψος ως συνάρτηση του x.

ii) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x.

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού για $0 \le x \le 6$.

iv) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού να βρείτε το μήκος που πρέπει να έχουν η βάση και το ύψος για να είναι το εμβαδόν μέγιστο.

[Απ. i)υ=12-2x ii)Ε(x)=-2x^2+12x iv)x=3, β=υ=6cm]

2.9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 9x + 12$. Για ποιές τιμές του x είναι:

i) $f(x) = -6$ **ii)** $f(x) = -x$

iii) $f(x) = f(-x)$ **iv)** $f(x) = f(x+1)$

[Απ. i)x=3, x=6 ii)x=2, x=6 iii)x=0 iv)x=4]

2.10. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + x + \beta$, αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(1,3).

Κεφάλαιο 6ο

Κεφάλαιο 6ο

ΙΣΟΤΗΤΑ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

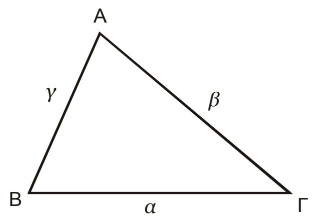
- *Τρίγωνα - Ίσα τρίγωνα*
- *Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων*
- *Θεώρημα του Θαλή*
- *Όμοια πολύγωνα*
- *Όμοια τρίγωνα*
- *Εμβαδά όμοιων σχημάτων*
- *Όγκοι όμοιων σχημάτων*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

1.1. ***Τι αναφέρει η τριγωνική ιδιότητα;***
Να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τη σχέση.
Απάντηση:

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο. Η ιδιότητα αυτή των πλευρών ενός τριγώνου ονομάζεται **τριγωνική ιδιότητα**.



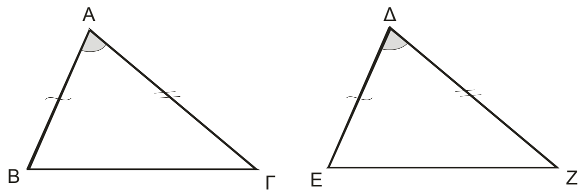
Στο διπλανό τρίγωνα συμβολίζουμε α, β, γ τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Η σχέση της τριγωνικής ανισότητας είναι:

$$\alpha < \beta + \gamma$$
$$\beta < \alpha + \gamma$$
$$\gamma < \alpha + \beta .$$

1.2. ***Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων.***
Για κάθε κριτήριο να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τις σχέσεις.
Απάντηση:

Τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι:

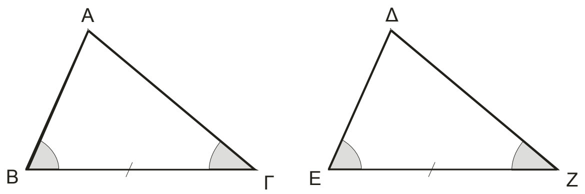
1) Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



Αν ΑΒ = ΔΕ
ΑΓ = ΔΖ
$\hat{A} = \hat{\Delta}$

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

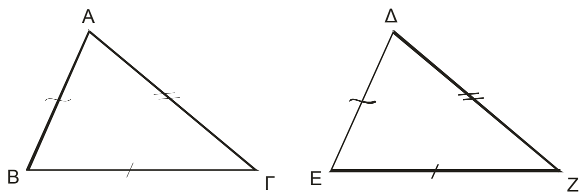
2) Όταν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών γωνίες είναι μια προς μια ίσες, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



Αν ΒΓ = ΕΖ
$\hat{B} = \hat{E}$
$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

3) Όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



Αν ΑΒ = ΔΕ
ΑΓ = ΔΖ
ΒΓ = ΕΖ

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

1.3. ***Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.***

Απάντηση:

Τα δυο κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων είναι:

1) Όταν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μια αντίστοιχη πλευρά και οξεία γωνία ενός άλλου, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.

2) Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με δυο αντίστοιχες πλευρές του άλλου, τότε τα δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4. Στις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε από ένα σημείο Δ, Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΖ είναι μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

1.5. Πάνω στις πλευρές ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, παίρνουμε από ένα σημείο Ε, Ζ, Η και Θ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι μικρότερη από την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

1.6. Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι:

$$ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

1.7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα δύο απέναντι πλευρών του.

1.8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

α) $\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

β) $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

1.9. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ και Ε. Αν Κ είναι το σημείο τομής της ΒΕ με την ΓΖ και Δ το σημείο τομής της ΑΚ με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

1.10. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

1.11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Πάνω στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

1.12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

1.13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΒΕ.

1.14. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ πάνω στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

1.15. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ έτσι ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΚΛ.

β) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΚΜ και ΚΛ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

1.16. Κατασκευάζουμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.

1.17. Δίνεται κύκλος κεντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς τα δύο άκρα της, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $Ο\hat{Γ}Α = Ο\hat{Δ}Β$.

β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές.

1.18. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε τμήματα ΟΑ, ΟΓ και ΟΒ, ΟΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΟΑ = ΟΒ, ΟΓ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = ΑΔ

β) ΜΓ = ΜΔ

γ) Το τμήμα ΟΜ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}y$.

1.19. Θεωρούμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε καθέτους ΒΔ , ΓΕ στη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

1.20. Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και παίρνουμε το μέσο του Μ. Φέρνουμε μια ευθεία ε που να διέρχεται από το Μ και να μην είναι κάθετη στο ΑΒ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των Α , Β από την ευθεία ε είναι ίσες.

1.21. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κορυφών του Α και Γ από τη διαγώνιο ΒΔ είναι ίσες.

1.22. Κατασκευάζουμε μια γωνία $x\hat{O}y$ και φέρνουμε τη διχοτόμο της $O\delta$. Παίρνουμε ένα σημείο Μ πάνω στην $O\delta$ και φέρνουμε τις καθέτους ΜΑ και ΜΒ πάνω στις πλευρές Ox και Oy της γωνίας. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

β) Το τμήμα ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{M}B$.

γ) Το τμήμα ΟΜ είναι κάθετο στο ΑΒ.

1.23. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες.

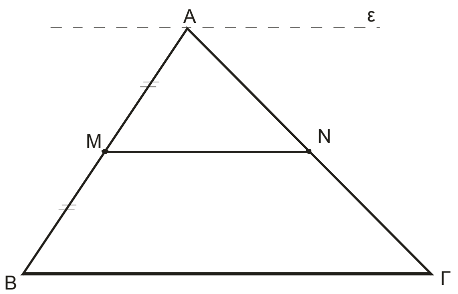
1.24. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι ΒΗ = ΓΕ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

2.1. ***Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο πλευράς τριγώνου φέρουμε την παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.***

Απάντηση:



Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΜΝ//ΒΓ. Αν φέρουμε την ευθεία ε // ΒΓ η οποία διέρχεται από το Α, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ και ΒΓ θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Δηλαδή το Ν θα είναι μέσο της ΑΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Κ , Λ , Μ των πλευρών του. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΚΛΜ είναι η μισή της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ.

2.3. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ. Σημειώνουμε τα μέσα Κ , Λ των τμημάτων ΑΒ και ΑΔ. Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΚΛ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΓ.

2.4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Μ , Ν των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ. Πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ σημειώνουμε τα σημεία Κ , Λ έτσι ώστε $ΑΚ = \frac{1}{2}ΑΜ$ και $ΑΛ = \frac{1}{2}ΑΝ$. Να αποδείξετε ότι $ΚΛ = \frac{1}{4}ΒΓ$.

2.5. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και παίρνουμε τα μέσα Ε , Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ. Το τμήμα ΕΖ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΕΖ.

2.6. Κατασκευάζουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και παίρνουμε τα μέσα Κ , Λ , Μ , Ν των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

2.7. Κατασκευάζουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ (ΑΒ < ΓΔ) και φέρνουμε τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ. Παίρνουμε τα μέσα των Κ , Λ των ΑΔ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι

α) το τμήμα ΚΛ προεκτεινόμενο διέρχεται από τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ.

β) $ΚΛ = ΜΝ = \frac{ΑΒ}{2}$.

γ) $ΚΜ = ΛΝ = \frac{ΔΓ}{2}$.

δ) $ΚΝ = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2}$.

ε) $ΛΜ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$.

2.8. Κατασκευάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Παίρνουμε τα μέσα Μ , Ν των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΜΝ είναι η μισή της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ.

2.9. Σε ένα οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και παίρνουμε τα μέσα Μ, Ν, Ρ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΝΡΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

2.10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$, η ΒΓ = 12 cm και η ΑΒ = $2x+2$ cm. Αν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα είναι $2x–1$ cm, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$.

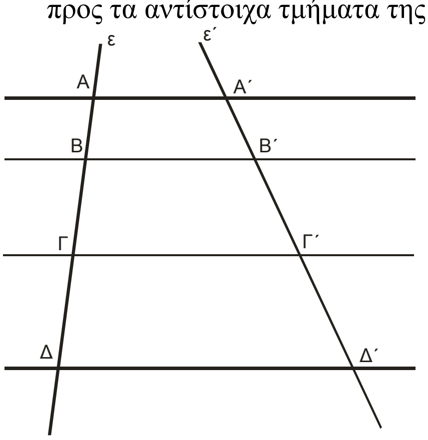
ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

3.1. ***Τι αναφέρει το θεώρημα του Θαλή;***
Να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τη σχέση.

Απάντηση:

Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.

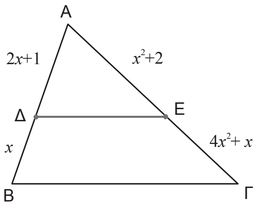


Οι ευθείες ε και ε΄ τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες ε_1 , ε_2 , ε_3 και ε_4.

Είναι: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

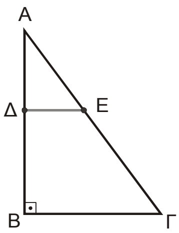
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η ΔΕ//ΒΓ. Δίνεται ότι ΑΔ = $2x+1$, ΔΒ = x, ΑΕ = x^2+2 και ΕΓ = $4x^2+x$. Να βρείτε το x.



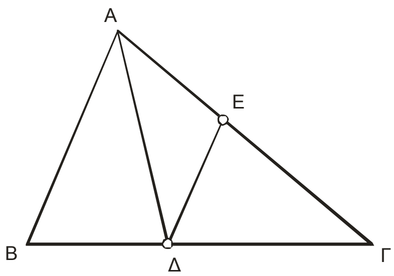
[Απ. $x=\frac{1}{7}$]

3.3. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B}=90^0$ και ΑΒ = 8cm , ΒΓ = 6cm. Φέρνουμε ΔΕ//ΒΓ ώστε η ΑΕ = 4cm. Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΔ.



[Απ. ΑΔ=3,2cm]

3.4. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$ και ΑΕ = ΕΔ.



Να αποδείξετε ότι:

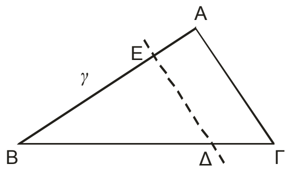
i) ΔΕ//ΑΒ

ii) $\dfrac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{\Gamma E}$

3.5. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Αν από σημείο Α εντός των παραλλήλων αυτών ευθειών φέρουμε τις τέμνουσες ΒΑΓ και ΔΑΕ ώστε ΑΒ = 2cm, ΑΓ = x cm , ΔΑ = x+1 cm και ΑΕ = 3cm, να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΑΓ.

[Απ. 2cm]

3.6. Στο επόμενο σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΒΔ = ΑΒ = γ.



Από το σημείο Δ φέρνουμε την ΔΕ παράλληλη προς την ΑΓ. Αν είναι ΓΔ = 2,5 m και ΒΕ = 8 m να βρεθεί το μήκος γ της πλευράς ΑΒ.

[Απ. γ=10m]

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

5.1. ***Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;***

Απάντηση:

Δύο πολύγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

5.2. ***Να αναφέρεται τα κριτήρια ομοιότητας δύο τριγώνων.***

Απάντηση:

1) Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή είναι όμοια.

2) Όταν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες τις γωνίες τους ίσες, δηλαδή είναι όμοια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.3. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 5cm , 3cm ενώ ένα άλλο έχει διαστάσεις 15cm , 9cm. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

5.4. Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν ΑΒ = 7,2dm , ΒΓ = 40cm , $\hat{A} = \hat{A}' = 65^0$, Α΄Β΄ = 72cm , Β΄Γ΄ = 4dm. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

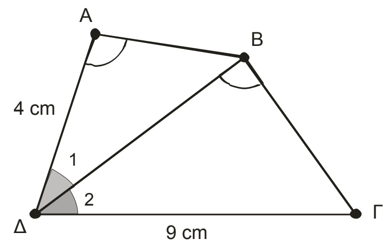
5.5. Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν ΑΒ = 8cm , ΒΓ = 2cm , $\hat{A} = \hat{A}' = 70^0$, Α΄Β΄ = 10cm , Β΄Γ΄ = 4cm. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

5.6. Δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{4}$. Αν ΑΒ = 4cm , ΑΓ = 5cm να υπολογίσετε τις πλευρές των δύο ορθογωνίων.

5.7. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ΑΒ = 12 cm και ΑΓ = 18 cm. Από ένα σημείο Δ της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΔ = 8 cm φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν ΔΕ = 10 cm, να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΕ, ΕΓ και ΒΓ.

[Απ. ΑΕ=12cm, ΕΓ=6cm, ΒΓ=15cm]

5.8. Στο παρακάτω τετράπλευρο είναι $\hat{A} = \Delta\hat{B}\Gamma$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, ΑΔ = 4 cm και ΔΓ = 9 cm.



Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

[Απ. 6cm]

5.9. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 6 cm προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = 2 cm. Αν η ΕΒ τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο σημείο Ζ, να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΑΖ.

[Απ. ΑΖ=18cm]

5.10. Για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ δίνονται τα εξής:

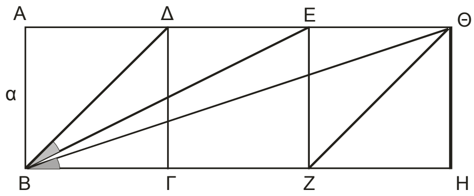
$\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$, ΑΒ = 4cm , ΒΓ = x+6 cm , ΔΕ = x+2 cm , ΔΖ = 4x+8 cm.

i) Να αποδείξετε ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

ii) Να υπολογίσετε το x.

iii) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{3}$.

5.11. Στο επόμενο σχήμα τα διαδοχικά τετράγωνα ΑΒΓΔ , ΓΔΕΖ και ΕΖΗΘ έχουν πλευρά α.



i) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΔ , ΒΕ , ΒΘ και ΖΘ ως συνάρτηση του α.

ii) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΖΘ είναι όμοια.

iii) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{B}E = \Theta\hat{B}H$.

5.12. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$, είναι ΑΓ = 8 cm και ΒΓ = 10 cm. Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΓ φέρνουμε την κάθετη ΜΔ προς την ΒΓ.

i) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΜΔ και ΓΔ.

ii) Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα που βρήκατε, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΔΜ.

[Απ. i)ΜΔ=2,4cm , ΓΔ=3,2cm]

5.13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = $6 - x$, ΑΓ = $x(x+3)$ και ΒΓ = $x^2 + 5x$.

α) Είναι δυνατόν το x να ισούται με 2;

β) Να βρεθεί το x αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 15 cm.

γ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τις πλευρές τριγώνου το οποίο είναι όμοιο με το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$.

[Απ. α)Όχι β)x=1 γ)10cm, 8cm, 12cm]

ΕΝΟΤΗΤΑ 6.

ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

6.1.*Πως συνδέονται τα εμβαδά δύο όμοιων σχημάτων;*

Απάντηση:

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.2.Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $490 cm^2$. Στην πλευρά του ΑΒ παίρνουμε ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{2}{5}$. Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Από το Ε φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Ζ.

i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΓΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΕΖ.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΔΕΖΒ.

[Απ. i)$40cm^2$ ii)$250cm^2$ iii)$200cm^2$]

Κεφάλαιο 7ο

Κεφάλαιο 7ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- *Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας*
- *Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας*
- *Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών*
- *Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας*
- *Νόμος των ημιτόνων*
- *Νόμος των συνημιτόνων*

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

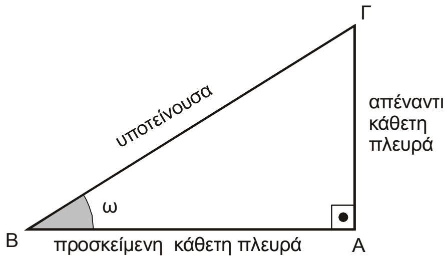
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

1.1. ***Τι ονομάζουμε ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου;***

Απάντηση:

Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

Δηλαδή, $\eta\mu\omega = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$.



Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ονομάζουμε το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

Δηλαδή, $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$.

Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.

Δηλαδή, $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$.

1.1.1. **<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>** Οι τρεις αριθμοί $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega$ λέγονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας** ω.

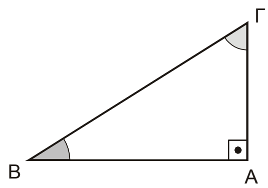
1.2. ***Να αποδείξετε ότι για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των συμπληρωματικών γωνιών ισχύει:***

ημ(90ο – ω) = συνω και συν(90ο – ω) = ημω.

Απάντηση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ παρατηρούμε ότι:

$\eta\mu\text{Β} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$, δηλαδή ημΒ = συνΒ.



Όμως οι γωνίες $\hat{\text{Β}}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές, ως οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου,

δηλαδή $\hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 90^0$ ή $\hat{\text{Β}} = 90^0 - \hat{\Gamma}$.

Επομένως $\eta\mu(90^0 - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu\Gamma$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(90^0 - \Gamma) = \eta\mu\Gamma$.

Γενικά, για τις συμπληρωματικές γωνίες ω και $90^0 - \omega$ ισχύει:

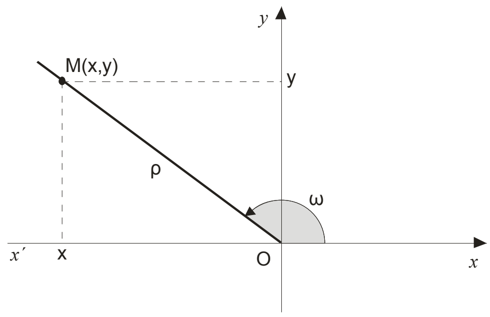
$\eta\mu(90^0 - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\sigma\upsilon\nu(90^0 - \omega) = \eta\mu\omega$.

1.2.1. Για παράδειγμα: $\eta\mu 54^0 = \eta\mu(90^0 - 36^0) = \sigma\upsilon\nu 36^0$.

$\sigma\upsilon\nu 73^0 = \sigma\upsilon\nu(90^0 - 17^0) = \eta\mu 17^0$.

1.3. *Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω.*

Απάντηση:



Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων παίρνουμε ένα σημείο $M(x, y)$ τέτοιο, ώστε $x\hat{O}M = \hat{\omega}$.
Αν θέσουμε $OM = \rho$, τότε ορίζουμε να είναι:

$$ημω = \frac{y}{\rho} \quad , \quad συνω = \frac{x}{\rho} \quad , \quad εφω = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

1.4. *Να εξηγήσετε ότι το ημω και το συνω, παίρνουν τιμές από το −1 έως το 1.*

Απάντηση:

Οι αριθμοί $|x|$ και $|y|$ εκφράζουν τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου στο οποίο η υποτείνουσα είναι $\rho > |x|$ και $\rho > |y|$. Τα ημω και συνω μπορούν ακόμα να πάρουν και τις τιμές -1 , 1 και 0.
Επομένως, για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν: $-1 \leq ημω \leq 1$ και $-1 \leq συνω \leq 1$.

1.5. *Να γράψετε τον πίνακα με τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών.*

Απάντηση:

Τεταρτημόριο / Τριγ. Αρ.	1ο	2ο	3ο	4ο
ημx	+	+	–	–
συνx	+	–	–	+
εφx	+	–	+	–

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = ημ25^0 - συν35^0 + ημ55^0 - συν65^0$

$B = 2συνx + 3ημ(90^0 - x) - 5συνx$

$$Γ = \frac{εφ^2 45^0 + 4ημ^2 30^0 - 2007}{2006 \cdot εφ^{100} 45^0 - 2συν60^0}$$

[Απ. Α=0, Β=0, Γ=-1]

1.7. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων παίρνουμε τα σημεία $A(-3,0)$, $B(2,-2)$, $Γ(-6,8)$, $Δ(0,-5)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $x\hat{O}A$, $x\hat{O}B$, $x\hat{O}Γ$ και $x\hat{O}Δ$.

1.8. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των επόμενων παραστάσεων:

i) $A = 3ημx - 5$ **ii)** $B = 4 - 2συνx$

iii) $Γ = 7ημx + 6συνx$ **iv)** $Δ = 2ημx - 3συνx$

1.9. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $y = 2συν^2x + 1$.

[Απ.Ελάχιστη 1, Μέγιστη 3]

1.10. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $y = 4ημ^2x - 1$.

[Απ.Ελάχιστη -1, Μέγιστη 3]

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες $\hat{\omega}$ και $180^0 - \hat{\omega}$ ισχύει:

$$\boxed{\begin{array}{c} ημ(180^0 - \omega) = ημ\omega \\ συν(180^0 - \omega) = -συν\omega \\ εφ(180^0 - \omega) = -εφ\omega \end{array}}$$

Παραδειγμα: **(i)** $ημ130^0 = ημ(180^0 - 50^0) = ημ50^0 \simeq 0{,}766$
(ii) $συν115^0 = συν(180^0 - 65^0) = -συν65^0 \simeq -0{,}423$
(iii) $εφ98^0 = εφ(180^0 - 82^0) = -εφ82^0 \simeq -7{,}115$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Αν $συν35^0 = 0{,}819$ να υπολογίσετε:
α) $ημ55^0$
β) $συν145^0$

[Απ. α)0,819 β)-0,819]

2.2. Να γραφεί σε απλούστερη μορφή η παράσταση:

$$A = \frac{ημ(90^0 - \theta)\cdot συν(90^0 - \theta)\cdot εφ(180^0 - \theta)\cdot εφ45^0}{εφ\theta \cdot ημ(180^0 - \theta)\cdot συν(180^0 - \theta)\cdot ημ150^0}$$

[Απ. 2]

2.3. Αν Α, Β, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι:
α) ημ(Α+Β) = ημΓ **β)** συν(Β+Γ) = –συνΑ
γ) εφ(Γ+Α) = –εφΒ

2.4. Να υπολογίσετε τη γωνία x, αν:
α) $2ημx - \sqrt{3} = 0$, $0^0 < x < 180^0$
β) $2συνx = 1$, $90^0 < x < 180^0$
γ) $3εφx + \sqrt{3} = 0$, $90^0 < x < 180^0$
δ) $εφx = -1$, $90^0 < x < 180^0$

2.5. Να υπολογίσετε τη γωνία x, αν:
α) $ημ^2x = 0{,}25$, $0^0 \le x \le 180^0$
β) $4συν^2x = 3$, $90^0 \le x \le 180^0$
γ) $ημ^2x - 2ημx + 1 = 0$, $0^0 \le x \le 180^0$
δ) $2ημ^2x + ημx - 1 = 0$, $0^0 \le x \le 180^0$
ε) $(2ημx - \sqrt{2})(συνx - 1) = 0$, $0^0 \le x \le 180^0$

2.6. Αν $90^0 < \omega < 180^0$ και

$$2(1 - ημ\omega) + 4 + \sqrt{3} = 3(\sqrt{3} - 2ημ\omega) + 6$$

να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω καθώς και την γωνία.

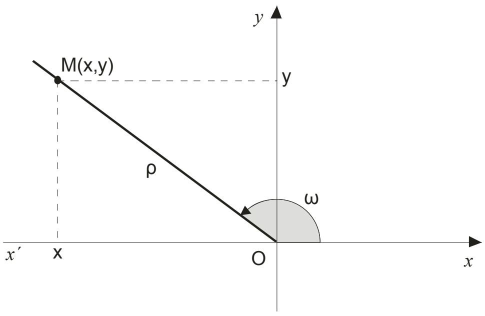
[Απ. $ημω=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συνω=-\frac{1}{2}$, $εφω=-\sqrt{3}$, $ω=120^0$]

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

3.1. ***Να αποδείξετε ότι:*** **$εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$.**

Απάντηση:



Για τη γωνία $x\hat{O}M = \hat{\omega}$, έχουμε

$$ημ\omega = \frac{y}{\rho} \quad \text{και} \quad συν\omega = \frac{x}{\rho}$$

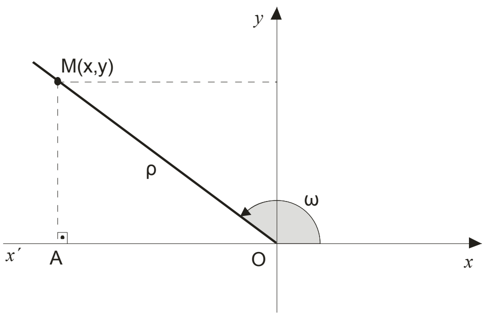
Επομένως $\dfrac{ημ\omega}{συν\omega} = \dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \dfrac{y\cdot\rho}{x\cdot\rho} = \dfrac{y}{x} = εφ\omega.$

Δηλαδή , $\boxed{εφ\omega = \dfrac{ημ\omega}{συν\omega}}$.

Ο τύπος ισχύει με την προϋπόθεση ότι η γωνία $\hat{\omega}$ είναι τέτοια, ώστε $συν\omega \neq 0$, δηλαδή όταν $\hat{\omega} \neq 90^0$ και $\hat{\omega} \neq 270^0$.

3.2. ***Να αποδείξετε ότι:*** **$ημ^2ω + συν^2ω = 1$.**

Απάντηση:



Έχουμε:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$
$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2}$$
$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1$$
$$(συν\omega)^2 + (ημ\omega)^2 = 1.$$

Δηλαδή , $\boxed{ημ^2\omega + συν^2\omega = 1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

[Απ. i)α=3,β=6 ii)Π=$\frac{3}{4}$]

3.3. i) Να βρείτε τους αριθμούς:

$\alpha = \sqrt{13-\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$ και $\beta = \sqrt{41-\sqrt{29-\sqrt{19-\sqrt{9}}}}$

ii) Αν η γωνία ω ανήκει στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο και είναι $ημ\omega = \dfrac{\alpha}{\beta}$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης: $Π = \dfrac{2ημ\omega - συν^2\omega}{εφ^2\omega}$.

3.4. Αν $ημx = \dfrac{3}{5}$ και $0^0 < x < 90^0$, να υπολογίσετε:

i) Το $συνx$ και την $εφx$.

ii) Την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$Α = \frac{3ημ^2x + 5ημx\cdot συνx}{εφ^2x}.$$

3.5. Αν $συνx = -\frac{5}{13}$ και $90^0 \le x \le 180^0$, να υπολογίσετε:

i) Το $ημx$ και την $εφx$.

ii) Την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$Α = \frac{5εφx+3ημ^2x+συνx}{2ημx+3}.$$

3.6. Αν $εφx = 3$ και $0^0 < x < 90^0$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$Π = \frac{ημ^2x-2ημx \cdot συνx}{4ημ^2x-3συν^2x}.$$

[Απ. $Π=\frac{1}{11}$]

3.7. Αν $ημω = 3λ$ και $συνω = 4λ$ με $0 < λ < \frac{1}{4}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$Α = 25λ^2 + (5λ - 1)^3$.

[Απ. Α=1]

3.8. Έστω ότι η εξίσωση $x^2 + ημα \cdot x + συν^2α = 0$ έχει μοναδική λύση. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $α$, αν η γωνία ανήκει στο $4^ο$ τεταρτημόριο.

[Απ. $ημα=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $συνα=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $εφα=-2$]

3.9. Αν $ημφ = \frac{κ^2-λ^2}{κ^2+λ^2}$, $κ > λ > 0$ και $90^0 < x < 180^0$, να βρείτε:

α) το $συνφ$ **β)** την $εφφ$

[Απ. α) $συνφ=-\frac{2κλ}{κ^2+λ^2}$ β) $εφφ=\frac{λ^2-κ^2}{2κλ}$]

3.10. Να αποδείξετε ότι: $συν^2ω\,(1 + εφ^2ω) = 1$.

3.11. Να αποδείξετε ότι: $εφα\,(συνα - συν^3α) = ημ^3α$.

3.12. i) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x-y+1}{3} + \frac{4x-3y}{2} = x+2 \\ 2y = 3(x-1) \end{cases}$$

ii) Αν (x,y) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος να αποδείξετε ότι:

$4(x \cdot ημω+2006y \cdot συνω)^2 + (2006y \cdot ημω+2x \cdot συνω)^2 = 4$.

[Απ. i) (x,y)=(1,0)]

3.13. Να αποδείξετε ότι: $1 + εφ^2α = \frac{1}{συν^2α}$.

3.14. Να αποδείξετε ότι:

$(ημα + συνα)^2 - (ημα - συνα)^2 = 4ημα \cdot συνα$.

3.15. Να αποδείξετε ότι:

$(3ημω + 4συνω)^2 + (4ημω - 3συνω)^2 = 25$.

3.16. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημα+εφα}{εφα} = 1 + συνα$.

3.17. Να αποδείξετε ότι: $ημx \cdot συνx \cdot εφx + \frac{1}{1+εφ^2x} = 1$.

3.18. Να αποδείξετε ότι: $(1 - \frac{1}{συν^2ω})(1 - \frac{1}{ημ^2ω}) = 1$.

3.19. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημα+συνα}{ημα-συνα} = \frac{εφα+1}{εφα-1}$.

3.20. Να αποδείξετε ότι: $\frac{εφ^2ω-1}{εφ^2ω+1} = ημ^2ω - συν^2ω$.

3.21. Αν $α = 3ημω \cdot ημφ$, $β = 3ημω \cdot συνφ$, $γ = 3συνω$ να δείξετε ότι: $α^2 + β^2 + γ^2 = 9$.

3.22. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1-ημω} + \frac{1}{1+ημω} = \frac{2}{συν^2ω}$.

3.23. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημα}{1+συνα} + \frac{1}{εφα} = \frac{1}{ημα}$.

3.24. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημα}{1-συνα} - \frac{1}{εφα} = \frac{1}{ημα}$.

3.25. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημα}{1-συνα} + \frac{1-συνα}{ημα} = \frac{2}{ημα}$.

3.26. Να αποδείξετε ότι: $εφ^2α - ημ^2α = εφ^2α \cdot ημ^2α$.

3.27. Να αποδείξετε ότι: $ημ^4α - ημ^2α = συν^4α - συν^2α$.

3.28. Να αποδείξετε ότι: $ημ^4x - συν^4x = 2ημ^2x - 1$.

3.29. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{συν^4ω-ημ^4ω}{1-εφ^2ω}$ **ii)** $\frac{2συν^2ω-1}{συν^4ω-ημ^4ω}$

[Απ. i) $συν^2ω$ ii) 1]

3.30. Να αποδείξετε ότι: $1 - \frac{συν^2ω}{1+ημω} = ημω$.

3.31. Να αποδείξετε ότι:

$$(εφω + \frac{συνω}{ημω})(\frac{1}{συνω} - συνω)(\frac{1}{ημω} - ημω) = 1.$$

3.32. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{συνx}{1-εφx} + \frac{ημ^2x}{ημx-συνx} = ημx + συνx.$$

3.33. Αν $0^0 < x < 90^0$ και $συνx = 2ημx - 1$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

[Απ. $ημx=\frac{4}{5}$, $συνx=\frac{3}{5}$, $εφx=\frac{4}{3}$]

3.34. i) Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$ και $90^0 \le \theta \le 180^0$ να υπολογιστούν τα $\eta\mu\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta$.

ii) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\eta\mu\theta)\cdot x - (\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot y = 1 \\ (-\varepsilon\varphi\theta)\cdot x - y = 1 \end{cases}$.

[Απ. i) $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$, $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{5}{12}$ ii) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{24})$]

3.35. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x, αν είναι $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x = 5$.

[Απ. $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5}$, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$]

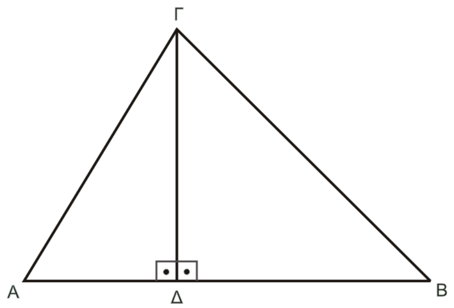
ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ & ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

4.1. ***Να γράψετε και να εξηγήσετε το νόμο των ημιτόνων.***

<u>Απάντηση:</u>

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ισχύει: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.



Σχεδιάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε το ύψος ΓΔ.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ είναι

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \quad \acute{\eta} \quad \Gamma\Delta = A\Gamma\cdot\eta\mu A \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ είναι

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} \quad \acute{\eta} \quad \Gamma\Delta = B\Gamma\cdot\eta\mu B \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$B\Gamma\cdot\eta\mu B = A\Gamma\cdot\eta\mu A \quad \acute{\eta} \quad \alpha\cdot\eta\mu B = \beta\cdot\eta\mu A \quad \acute{\eta} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύει $\dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

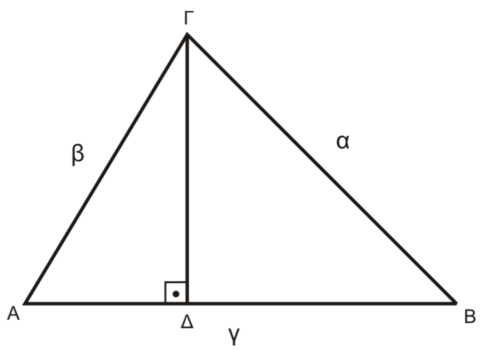
Επομένως, σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

4.2. ***Να γράψετε και να εξηγήσετε το νόμο των συνημιτόνων.***

<u>Απάντηση:</u>

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cdot\sigma\upsilon\nu \Gamma.$$



Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΓΔ.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΒ έχουμε $\alpha^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$ (1)
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\eta\mu A = \dfrac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}$ ή $\Gamma\Delta = \beta\cdot\eta\mu A$ (2)

Ακόμα $\sigma\upsilon\nu A = \dfrac{A\Delta}{A\Gamma}$ ή $A\Delta = \beta\cdot\sigma\upsilon\nu A$.

Είναι $\Delta B = AB - A\Delta = \gamma - \beta\cdot\sigma\upsilon\nu A$ (3)
Από τις (1), (2) και (3) έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (\beta\cdot\eta\mu A)^2 + (\gamma - \beta\cdot\sigma\upsilon\nu A)^2\\ &= \beta^2\cdot\eta\mu^2 A + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A + \beta^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 A\\ &= \beta^2\cdot(\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A) + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A\\ &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ισχύουν $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu B$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cdot\sigma\upsilon\nu \Gamma$.

4.2.1. **ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cdot\text{συνA}$$
$$2\beta\gamma\cdot\text{συνA} = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$$
$$\text{συνA} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

Όμοια $\text{συνB} = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha}$ και $\text{συνΓ} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.3. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και την διάμεσο του ΑΔ. Αν $\Delta\widehat{A}B = x$ και $\Delta\widehat{A}\Gamma = y$ να δείξετε ότι:
$$\frac{\text{ημ}x}{\text{ημ}y} = \frac{\text{ημB}}{\text{ημΓ}} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

4.4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90^0$ είναι $\hat{\Gamma} = 45^0$, ΑΒ = 10 cm και ΑΓ = $5\sqrt{2}$ cm. Να βρείτε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

[Απ. $\hat{B}=30^0$, $\hat{A}=105^0$]

4.5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 2\beta$, $\beta = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$.

i) Να υπολογίσετε τα ημΑ, ημΒ καθώς και τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$.
ii) Τι είδους είναι το τρίγωνο ΑΒΓ;
iii) Να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών β, γ όταν $\alpha = 10$cm.
iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

[Απ. i) $\hat{A}=90^0$, $\hat{B}=30^0$ iii) β=5cm, γ=$5\sqrt{3}$ cm iv) Ε=$\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2]

4.6. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:
$$\text{ημ}^2\text{A} = \text{ημ}^2\text{B} + \text{ημ}^2\Gamma.$$
Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^0$.

4.7. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = \sqrt{3}$ cm, $\gamma = 1$ cm και $\hat{A} = 30^0$, να βρεθούν:
i) η πλευρά α.
ii) η $\hat{B}$.

[Απ. i) α=1 ii) 120^0]

4.8. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta = 2$cm, $\gamma = \sqrt{2}$ cm και $\hat{A} = 45^0$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4.9. Για ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\alpha = \sqrt{31}$, $\beta = x+1$, $\gamma = x+2$ και $\hat{A} = 60^0$. Να βρείτε τις πλευρές β και γ.

[Απ. β=5, γ=6]

4.10. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα $\beta = 2\gamma\text{συνA}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4.11. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι:
$$\beta\text{συνΓ} + \gamma\text{συνB} = \alpha.$$

4.12. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι:
$$\alpha\beta\text{συνΓ} - \alpha\gamma\text{συνB} = \beta^2 - \gamma^2.$$

4.13. Για ένα τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι: $\alpha = 3$, $\beta = 5$ και $\gamma = 7$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 120^0$.

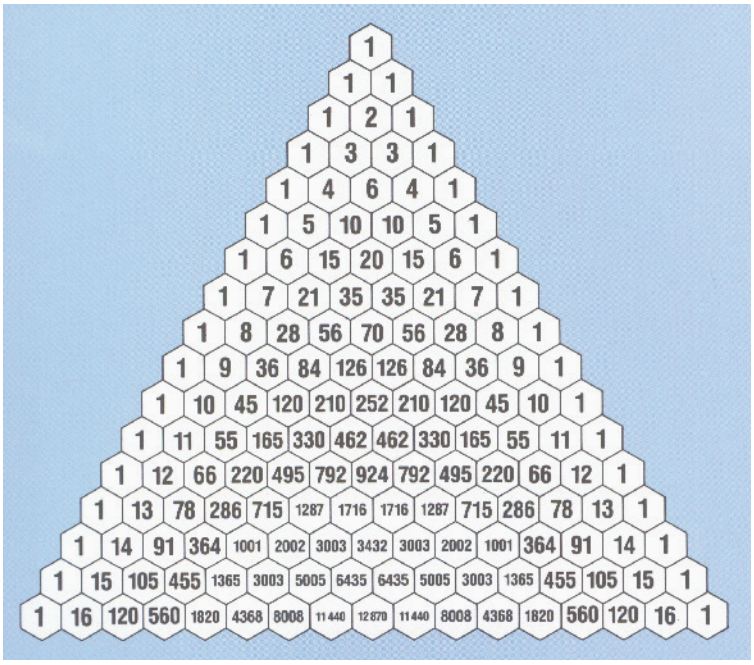
[Απ. 120^0]

4.14. Αν α, β, γ είναι οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει η ισότητα: $\beta = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma}$, να βρείτε την $\hat{B}$.

[Απ. 120^0]

4.15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \alpha - 4$, $\gamma = \alpha - 4$ και $\hat{A} = 120^0$.
i) Να βρεθεί η πλευρά α.
ii) Να βρεθεί το ημΒ.
iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.

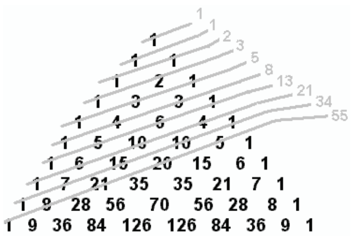
[Απ. i) α=7 ii) ημΒ=$\frac{3\sqrt{3}}{14}$ iii) Ε=$\frac{15\sqrt{3}}{4}$]



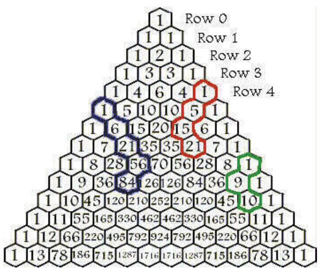
Η τριγωνική διάταξη των αριθμών, με το 1 στην κορυφή, στην οποία κάθε αριθμός προκύπτει από το άθροισμα του ζεύγους των αριθμών που βρίσκονται πάνω από αυτόν, είναι γνωστή ως τρίγωνο του Pascal (1623-1662) , ο οποίος το χρησιμοποίησε στη μελέτη των πιθανοτήτων το 1653.

Το τρίγωνο έχει πολλές ενδιαφέρουσες αριθμητικές ιδιότητες.

- $1 = 2^0$
  $1+1 = 2^1$
  $1+2+1 = 2^2$
  $1+3+3+1 = 2^3$
  $1+4+6+4+1 = 2^4$

- 

  Το άθροισμα των αριθμών όπως φαίνεται στο σχήμα δημιουργούν τους όρους της ακολουθίας Fibonacci.
  Δηλαδή, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …
  η οποία ορίζεται συναρτησιακά ως εξής
  $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ και $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + \alpha_n$.

- 

  Το διαγώνιο άθροισμα των αριθμών ξεκινώντας από μία μονάδα, ισούται με τον αριθμό κάτω από τον τελευταίο, ο οποίος δεν βρίσκεται στη διαγώνιο.
  $1+9 = 10$
  $1+5+15 = 21$
  $1+6+21+56 = 84$